

## PALKIN POIKKIPINNAN SIIRTYMÄKERTOIMESTA

Mika Reivinen ja Eero-Matti Salonen

Rakenteiden Mekaniikka, Vol.27  
No 2, 1994, s. 30-40

**Tiivistelmä:** Artikkelin tarkoituksena on täydentää teoksessa Arvo Ylinen: Kimmo- ja lujuusoppi, n:o:ssa 96 esitetyn ulokepalkin problemaa eräällä kiinnitetyn pään reunaehdotapauksella, joka tuottaa palkin poikkipinnan siirtymäkertoimelle mielenkiintoisen lukuarvon. Reunaehtoon päädytään määrittelemällä palkin poikkileikkauksen keskimääräiset siirtymäkomponentit ja kiertymä tietyn työkriteerin perusteella.

### JOHDANTO

Leikkausvoiman vaikutus palkin muodonmuutoksiin esitetään palkkiteoriassa tavallisesti muodossa [1, s.287] (kuva 1)

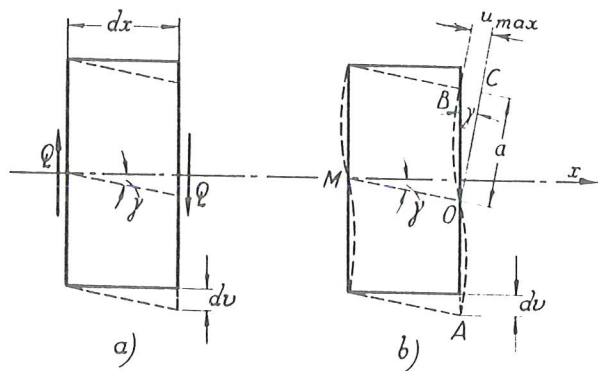
$$dv = \zeta \frac{Q}{GA} dx. \quad (1)$$

Tässä  $dv$  on leikkausvoiman  $Q$  johdosta palkin akselin alkion  $dx$  osuudella syntyvä akselin poikittaissiirtymä,  $A$  palkin poikkileikkauspinta-ala,  $G$  palkin materiaalin (homogeeninen, isotrooppinen) liukukerroin ja  $\zeta$  poikkipinnan siirtymäkerroin.

Kaava (1) esiintyy kirjallisuudessa usein myös vaihtoehtoisessa asussa

$$dv = \frac{Q}{kGA} dx, \quad (2)$$

jolloin siis  $k = 1/\zeta$ . Tästä kertoimesta käytetään englanninkielisessä kirjallisuudessa yleensä nimitystä "shear correction factor".



Kuva 1 Leikkausjännitysten aiheuttama palkin taipuma [1, kuva 189].

Jos leikkausvoimasta syntyvät leikkausjännitykset jakautuisivat tasaisesti poikkileikkauspinnalle, siirtymäkertoimen arvo olisi tasan 1. Näin ei kuitenkaan käy todellisuudessa ja kertoimen  $\zeta$  sopivan numeroarvon valinnalla pyritään saamaan realistinen mallitus. Kirjallisuudessa esitetään eri tavoin johdettuja  $\zeta$ :n arvoja. Esimerkiksi suora-kaidepoikkileikkaukselle on tavanomaisin käyttöarvo [1, s.288]

$$\zeta = \frac{6}{5}, \quad (3)$$

mutta eri perustein voidaan päätyä myös esimerkiksi arvoon [1, s.289]

$$\zeta = \frac{24 + 15\nu}{20(1 + \nu)} \quad (4)$$

tai arvoon [1, s. 329]

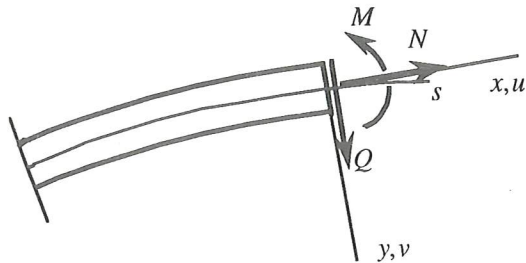
$$\zeta = \frac{5}{4} - \frac{G}{2E}. \quad (5)$$

Näissä  $E$  on kimmokerroin ja  $\nu$  Poissonin vakio.

Viimeinen tulos on saatu tarkastelemalla ulokepalkin täsmällistä ratkaisua ja tämä artikkeli käsittelee juuri kyseistä tapausta erästä uutta reunaehtovalintaa käyttäen. Siinä toimitaan poikkileikkaukselle määriteltyjen keskimääräisten siirtymäkomponenttien ja keskimääräisen kiertymän avulla ja näiden suureiden tarkastelu suoritetaan esivalmisteluna.

## SAUVAN POIKKILEIKKAUKSEN SIIRTYMÄSUUREET

Tasosauvojen yhteydessä operoidaan jännitysresultanteilla  $N$ ,  $Q$  ja  $M$ , joiden tutut määrittelykaavat ovat kuvan 2 merkinnöin

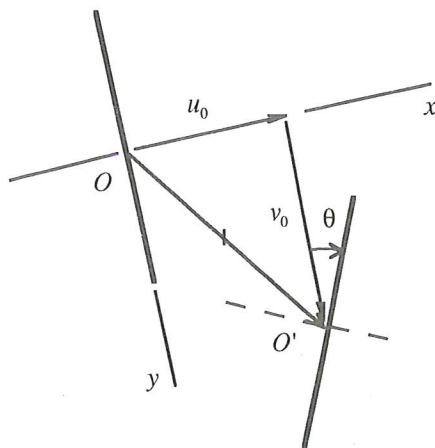


Kuva 2 Sauvan jännitysresultantit.

$$N = \int \sigma_x dA, \quad Q = \int \tau_{xy} dA, \quad M = \int \sigma_x y dA. \quad (6)$$

Lausekkeiden täsmällinen sisältö on ilmeinen.

Sauvan poikkileikkausten ajatellaan tavallisesti liikkuvan kuvan 3 "harjasmallin" tapaan; siis ikäänkuin kukin poikkileikkaus olisi jäykkä tasovevy. Tämä malli on kätevä mm. sauvan liittyessä muihin rakenneosiin, jolloin sauvan pää voidaan tavallaan liimata ympäristöön yksinkertaista kinematiikkaa käyttäen.



Kuva 3 Poikkileikkauksen siirtymä.

Poikkileikkauksen siirtymätilan kuvaavat täysin poikkileikkauksen origon (esimerkiksi) siirtymäkomponentit  $u_0$ ,  $v_0$  ja poikkileikkauksen kiertymä  $\theta$ . Näin ajatellen päädytään lisäksi työkäsitteitä tarkasteltaessa havainnolliseen esitykseen, koska esimerkiksi pienten siirtymien tapauksessa ja lineaarisessa teoriassa jännitysresultanttien poikkileikkauspintaan tekemä työ on yksinkertaisesti

$$W = \frac{1}{2}(Nu_0 + Qv_0 - M\theta) \quad (7)$$

(Viimeisen termin miinusmerkki johtuu tässä valituista merkkisäännöistä, joissa myötäpäivään tapahtuva kiertymä on positiivinen.)

Todellisuudessa sauvan poikkileikkaukset eivät luonnollisesti yleensä liiku aivan kuten kuvassa 3 on esitetty. Tämän kirjoittajille on tullut muussa yhteydessä esille asetelma, jossa toisaalta tiedetään - tai otaksutaan tiedetyksi - poikkileikkauksen sauvateoriatyypinen jännitys jakauma ja toisaalta siirtymien yksityiskohtainen jakauma poikkileikkauksessa. Tällöin on syntynyt tarve määritellä jossain keskimääräisessä mielessä suureiden  $u_0$ ,  $v_0$ ,  $\theta$  vastineet - merkitään näitä tunnuksilla  $\bar{u}_0$ ,  $\bar{v}_0$ ,  $\bar{\theta}$  - joilla on mm. käyttöä verrattessa sauvamaisten rakenteiden täysin elementtimenetelmällä saatuja ratkaisuja puhtaan sauvateorian antamiin ratkaisuihin.

Tässä tarkoitetaan (lineaarilla) sauvateoriatyypisellä jännitys jakaumalla, että tietyssä poikkileikkauksessa jännityskomponenttien lausekkeet ovat periaatteessa muotoa

$$\begin{aligned} \sigma_x &= f_N N + f_Q Q + f_M M, \\ \tau_{xy} &= g_N N + g_Q Q + g_M M. \end{aligned} \quad (8)$$

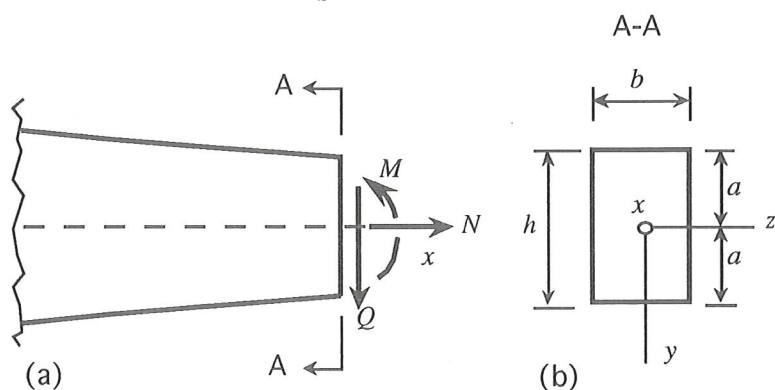
Suureet  $f$  ja  $g$  ovat kussakin poikkileikkauksessa tietyjä annettuja  $y$ :n ja mahdollisesti  $z$ :n funktioita ja erityisesti siis jännitykset riippuvat (lineaarisesti) pelkästään kyseisessä poikkileikkauksessa vallitsevista jännitysresultanttien arvoista. Eräs kaavojen (8) sovellus on (kuva 4)

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{1}{A} N + \frac{y}{I} M, \\ \tau_{xy} &= \frac{1}{A} \left( \frac{h'}{h} y \right) N + \frac{1}{A} \left( \frac{3}{2} - \frac{6y^2}{h^2} \right) Q + \frac{1}{Ih} \left( \frac{3h'}{2h^2} y^2 - \frac{1}{8} h' \right) M \end{aligned} \quad (9)$$

Kyseessä ovat lähteessä [2, s. 93] esitetyn teorian lievällä modifikaatiolla saadut kaavat. Sauvan akseli on suora, poikkileikkaus on suorakaide, jonka korkeus  $h = 2a$  voi muuttua ( $h' = dh/dx$ ) ja materiaali on homogeenista ja isotrooppista. Lisäksi

$$A = bh = 2ab, \quad I = \frac{1}{12}bh^3 = \frac{2}{3}a^3b. \quad (10)$$

Riippuvuus z-koordinaatista puuttuu ja  $f_Q = 0$ .



Kuva 4 (a) Korkeudeltaan muuttuva palkki. (b) Palkin poikkileikkaus.

Kun asetetaan  $h' = 0$ , päädytään tässä jatkossa sovellettaviin poikkileikkaukseltaan muuttumattoman palkin tuttuihin kaavoihin

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{1}{A}N + \frac{y}{I}M, \\ \tau_{xy} &= \frac{3}{2A} \left( 1 - \frac{y^2}{a^2} \right) Q. \end{aligned} \quad (11)$$

Jännitysresultanttien  $N$ ,  $Q$ ,  $M$  kuviteltuun jäykkänä kappaleena liikkuvaan poikkileikkaukseen tekemä työ on lausekkeen (7) perusteella

$$W_1 = \frac{1}{2}(N\bar{u}_0 + Q\bar{v}_0 - M\bar{\theta}). \quad (12)$$

Poikkileikkauksessa vaikuttavien jännitysten siirtymien  $u(y,z)$  ja  $v(y,z)$  yhteydessä tekemä työ - otaksutaan  $w = 0$  -

$$W_2 = \frac{1}{2} \left( \int \sigma_x u dA + \int \tau_{xy} v dA \right). \quad (13)$$

Sijoittamalla tähän lausekkeet (8) saadaan

$$\begin{aligned}
 W_2 = & \frac{1}{2} \left\{ \left[ \int (f_N u + g_N v) dA \right] N + \right. \\
 & \left. + \left[ \int (f_Q u + g_Q v) dA \right] Q + \right. \\
 & \left. + \left[ \int (f_M u + g_M v) dA \right] M \right\} .
 \end{aligned} \tag{14}$$

Eräs loogiselta tuntuva tapa määrittää keskimääräiset siirtymäsuureet  $\bar{u}_0$ ,  $\bar{v}_0$ ,  $\bar{\theta}$  on asettaa vaatimus  $W_1 = W_2$ , josta seuraa - koska  $N$ ,  $Q$ ,  $M$  ovat mielivaltaisia -

$$\begin{aligned}
 \bar{u}_0 &= \int (f_N u + g_N v) dA, \\
 \bar{v}_0 &= \int (f_Q u + g_Q v) dA, \\
 \bar{\theta} &= - \int (f_M u + g_M v) dA.
 \end{aligned} \tag{15}$$

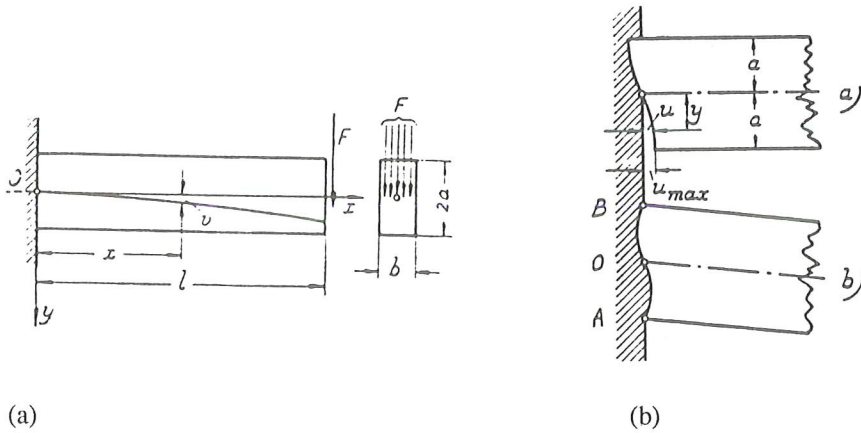
Erityisesti kaavoihin (11) liittyvässä yksinkertaisessa tapauksessa saadaan

$$\begin{aligned}
 \bar{u}_0 &= \int f_N u dA = \int \frac{1}{A} u dA = \frac{1}{A} \int u dA, \\
 \bar{v}_0 &= \int g_Q v dA = \int \frac{3}{2A} \left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right) v dA = \frac{3}{2A} \int \left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right) v dA, \\
 \bar{\theta} &= - \int f_M u dA = - \int \frac{y}{I} u dA = - \frac{1}{I} \int y u dA.
 \end{aligned} \tag{16}$$

Nämä ovat ne poikkileikkauksen keskimääräisten siirtymäkomponenttien ja keskimääräisen kiertymän lausekkeet, joita käytetään jatkossa. Mielenkiintoista on huomata suureiden  $\bar{u}_0$  ja  $\bar{v}_0$  määritelmiin syntynyt aluksi ehkä hieman oudolta vaikuttava muotoero.

## ULOKEPALKIN TÄSMÄLLINEN RATKAISU

Lähteessä [1, s. 325] on käsitelty kapean suorakaidepoikkileikkauksen omaavan isotrooppisen ja homogeenisen päästään kuormitetun ulokepalkin (kuva 5 (a)) matemaattisen kimmoteorian antamaa ratkaisua ja verrattu sitä palkkiteorian mukaiseen ratkaisuun.



Kuva 5 (a) Päästä kuormitettu ulokepalkki [1, kuva 210]. (b) Ulokepalkin kiinnitystapa [1, kuva 211].

Sopivaa vaadittavat ehdot toteuttavaa Airyn jännitysfunktion polynomimuotoista lauseketta käyttäen saadaan jännitykset

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -\frac{3F}{2a^3b}(l-x)y, \\ \sigma_y &= 0, \\ \tau_{xy} &= \frac{3F}{4a^3b}(a^2 - y^2).\end{aligned}\tag{17}$$

Tässä

$$N = 0, \quad Q = F, \quad M = -F(l-x)\tag{18}$$

ja palkkiteorian kaavojen (11) havaitaan antavan täsmälleen samat arvot suureille  $\sigma_x$  ja  $\tau_{xy}$ .

Siirtymäkentäksi saadaan

$$\begin{aligned}u &= -\frac{F}{4a^3b} \left[ -3\frac{a^2}{G}y + \left( \frac{1}{G} - \frac{\nu}{E} \right) y^3 + \frac{3}{E}(2lx - x^2)y \right] - C_1y + C_3, \\ v &= \frac{3F}{4Ea^3b} \left[ \nu(l-x)y^2 + \left( lx^2 - \frac{x^3}{3} \right) \right] + C_1x + C_2,\end{aligned}\tag{19}$$

jossa  $C_1, C_2, C_3$  ovat integroimisvakioita.

Ylinen käsittelee kuvassa 5 (b) esitetyt reunaehtotapaukset. Kummassakin asetetaan ensinnäkin origossa ehdot  $u = 0, v = 0$ , joista seuraa

$$C_2 = 0, \quad C_3 = 0. \quad (20)$$

Edellisessä tapauksessa vaaditaan lisäksi, että origossa  $dv/dx = 0$ , jolloin

$$C_1 = 0. \quad (21)$$

Jälkimmäisessä tapauksessa otaksutaan, että palkin ylä- ja alareunassa  $u = 0$ , josta seuraa

$$C_1 = \frac{F}{4Eab}(4 + 5v). \quad (22)$$

Ylinen tarkastelee erityisesti jälkimmäistä tapausta, jossa kimmoviivan yhtälöksi saadaan (asetetaan jälkimmäisessä lausekkeessa (19)  $y = 0$ )

$$v = \frac{F}{6EI}(3lx^2 - x^3) + \frac{5 - 2\frac{G}{E}}{4} \frac{F}{GA}x \quad (23)$$

ja pystysiirtymä palkin vapaassa päässä

$$\delta = \frac{Fl^3}{3EI} + \frac{5 - 2\frac{G}{E}}{4} \frac{Fl}{GA}. \quad (24)$$

Vertailu teknillisen taivutusopin mukaiseen lausekkeeseen

$$\delta = \frac{Fl^3}{3EI} + \zeta \frac{Fl}{GA} \quad (25)$$

antaa siirtymäkertoimen arvon (5).



## UUDEN REUNAEHDON KÄYTTÖ

Kun tutkitaan ratkaisua (19) leikkauksessa  $x = 0$ , saadaan lausekkeet

$$\begin{aligned}u(0, y) &= -\frac{F}{4a^3b} \left[ -3\frac{a^2}{G}y + \left( \frac{1}{G} - \frac{\nu}{E} \right) y^3 \right] - C_1y + C_3, \\v(0, y) &= \frac{3F}{4Ea^3b} \nu ly^2 + C_2\end{aligned}\tag{26}$$

ja kaavat (16) antavat lopuksi

$$\begin{aligned}\bar{u}_0(0) &= C_3, \\\bar{v}_0(0) &= \frac{3F\nu l}{20Eab} + C_2, \\\bar{\theta}(0) &= \frac{1}{I} \left( -\frac{2Fa^2}{5G} - \frac{F\nu a^2}{10E} + \frac{2a^3b}{3} C_1 \right).\end{aligned}\tag{27}$$

Jäykän kiinnityksen ajatellaan vastaavan tapausta

$$\bar{u}_0(0) = 0, \quad \bar{v}_0(0) = 0, \quad \bar{\theta}(0) = 0.\tag{28}$$

Näistä seuraa integroimisvakioiden arvoiksi

$$\begin{aligned}C_1 &= \frac{F}{4Eab} \left( \frac{12}{5} \frac{E}{G} + \frac{3}{5} \nu \right), \\C_2 &= -\frac{3F\nu l}{20Eab}, \\C_3 &= 0.\end{aligned}\tag{29}$$

Kimmoviivan yhtälöksi tulee lopuksi

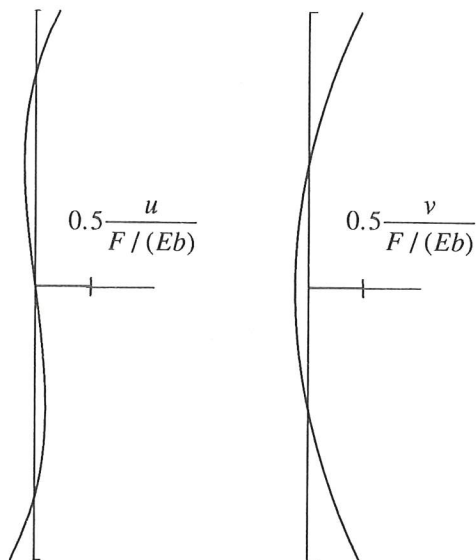
$$v = \frac{F}{6EI} (3lx^2 - x^3) + \left( \frac{6}{5} \frac{F}{GA} + \frac{3\nu F}{20Eab} \right) x - \frac{3\nu Fl}{20Eab}\tag{30}$$

ja pystysuuntainen siirtymä palkin vapaassa päässä

$$\delta = \frac{Fl^3}{3EI} + \frac{6}{5} \frac{Fl}{GA}. \quad (31)$$

Täten suoritettu analyysi tuottaakin tavanomaisen poikkipinnan siirtymäkertoimen arvon (3).

Kuvassa 6 on esitetty siirtymäkomponenttien jakaumat palkin tuetussa päässä tapauksessa  $l = 2h = 4a$ ,  $\nu = 0,2$ . Origossa ollut piste ei siirry  $x$ -suunnassa, mutta  $y$ -suuntainen siirtymä on kaavan (30) mukaisesti  $-3\nu Fl / (20Eab)$ . Tämä siirtymä kumoaa palkin päässä juuri kaavassa (30) esiintyvän toisen Poissonin vakiosta riippuvan termin ja siis siirtymäkertoimen arvon riippuvuus Poissonin vakiosta häviää yllättäen kokonaan.



Kuva 6 Siirtymäkomponenttien  $u$  ja  $v$  jakaumat palkin tuetussa päässä.

Jäykällä kiinnityksellä voitaisiin tarkoittaa kontinuumin yhteydessä esimerkiksi vaatimuksia

$$u(0, y) = 0, \quad v(0, y) = 0. \quad (32)$$

Näitä ei pystytä tietenkään toteuttamaan käytetyn yksinkertaisen Airyn jännitysfunktioon perustuvan ratkaisun yhteydessä, vaan voidaan pelkästään estää kappaleen jäykän kappaleen liikkeen mukaiset siirtymät jollain valinnalla, joista kaksi josain mielessä kaavojen (32) kanssa sopuinnussa olevaa käyvät ilmi kuvasta 5 (b). Kaavat (16) antavat vaihtoehtoisen perustan diskretoida äärettömän monessa pisteessä kirjatut ehdot (32) kolmeksi erilliseksi ehdoksi: Lausekkeiden (32) sijoitus kaavoihin (16) tuottaa selvästi vaatimukset (28). Näiden soveltaminen valitun Airyn jännitysfunktion yhteydessä on sikäli tyydyttävää, että analyysi johtaa kirjallisuudessa tavanomaisesti suositeltuun suorakaidepoikkileikkauksen siirtymäkertoimen arvoon  $\zeta = 6/5$ .

### Kirjallisuusviitteet

- [1] Ylinen, A., Kimmo- ja lujuusoppi I, Werner Söderström 1969.
- [2] Oden, J.T., Mechanics of Elastic Structures, Mc Graw-Hill Book Company 1967.

Mika Reivinen, DI  
Laskennallinen dynamiikka  
Teknillinen korkeakoulu

Eero-Matti Salonen, apulaisprofessori  
Laskennallinen dynamiikka  
Teknillinen korkeakoulu