YLISEN NURJAHDUSKAAVAT ELÄVÄT EDELLEEN

Martti Mikkola

Rakenteiden Mekaniikka, Vol.27
No 1, 1994, s. 3-13

Tiivistelmä: Artikkelissa tarkastellaan Ylisen keskisesti puristetuille suorille ja alkukäyrille sauvoille johtamia kriittisen jännityksen kaavoja jännityksen ylittäessä suhteellisuusrajan. Yhdysvalloissa on huomattu niiden ennustavan erittäin hyvin puusauvojen puristuskestävyyden ja ryhdytty käyttämään niitä puupilareiden mitoitukseen.

JOHDANTO

Teknillisen korkeakoulun professori Arvo Ylinen (1902-1975) tutki jo väitöskirjassaan [1], joka ilmestyi 1938, keskisesti puristettujen sauvojen nurjahtamista ei-kimmoisessa alueessa, ts. jännityksien ylittäessä suhteellisuusrajan. Epäkeskisesti puristettuja ja alkukäyriä sauvoja hän käsitteli 1941 ilmestyneessä julkaisussa [2]. Kansainvälisesti tunnetuiksi hänen tutkimustuloksensa tulivat Kansainvälisen sillan- ja talonrakennustekniikan yhdistyksen julkaisujen [3] ja [4] kautta, joissa tarkasteltiin puristussauvojen mitoitusta ja ehdotettiin sen perusteeksi tangenttimoduuliteoriaa.

Ylisen kaavat jäivät pitkään enimmäkseen vain tutkijoiden käyttöön, ks. esim. Zyczkowski [6] s.57. Kuitenkin jo melko varhain Ylisen nurjahduskaavaa (jäljempänä oleva kaava (8)) suositettiin käytettäväksi puristettujen puusauvojen mitoitukseen [8]. Myöhemmin myös Zahn totesi sen sopivan hyvin yhteen koetulosten kanssa [9]. Edelleen Zahnin [11] mukaan National Forest Products Association (NFPA) hyväksyi sen hiljattain (1991) käytettäväksi puurakenteiden mitoitusmääräyksissä (National Design Specification for Wood Construction, NDS), joissa se korvaa Yhdysvalloissa yli 40 vuotta puupilareiden mitoituksessa käytetyn neljännen asteen paraabelin. Se on myös valittu NFPA:n ja ASCE:n (American Society of Civil Engineers) yhteiseen standardiin, Load and Resistance Factor Design Specification for Engineered Wood Construction (LRFD), jonka suhteen tosin ei liene vielä tehty lopullista päätöstä.

Tämän artikkelin tarkoituksena on palauttaa mieliin Ylisen ei-kimmoista nurjahdusta koskevat työt. Herätteen sen kirjoittamiseen on antanut erityisesti Zahnin julkaisu [11].

Aluksi esitetään Ylisen mitoituskaavat puristettuja pilareita varten. Nimitetään niitä lyhyesti nurjahduskaavoiksi. Sitten esitellään eräitä empiirisiä mitoituskaavoja ja tarkastellaan niiden ja Ylisen nurjahduskaavojen keskinäisiä suhteita.

YLISEN NURJAHDUSKAAVAT

Julkaisussa [3] Ylinen tarkastelee keskisesti puristettujen suorien sauvojen mitoitusta jännitysten ylittäessä suhteellisuusrajan. Hän lähtee liikkeelle tangenttimoduulin lausekkeesta

$$E_t \equiv \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = E\frac{a-\sigma}{b-c'\sigma} \tag{1}$$

Ehdoista $d\sigma / d\varepsilon = 0$ kun $\sigma = \sigma_y$ ja $d\sigma / d\varepsilon = E$ kun $\sigma = 0$ seuraa

$$E_t = E\frac{\sigma_y - \sigma}{\sigma_y - c\sigma} \tag{2}$$

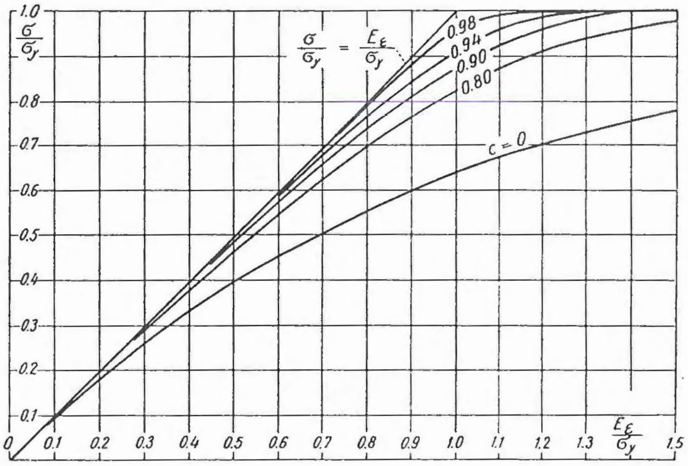
Tästä saadaan integroimalla jännityksen ja venymän välinen yhteys

$$\varepsilon = \frac{1}{E}\left[c\sigma - (1-c)\sigma_y \ln(1-\frac{\sigma}{\sigma_y})\right] \tag{3}$$

jossa integroimisvakio on saatu ehdosta $\varepsilon = 0$ kun $\sigma = 0$. Parametrin c määrittämiseen Ylinen antaa kaavan

$$c = 1 + \frac{E\delta_p / \sigma_y}{\sigma_p / \sigma_y + \ln(1-\sigma_p / \sigma_y)} \tag{4}$$

jossa δ_p on poikkeama epälineaarisen venymän ja Hooken lain mukaisen venymän välillä δ_p=$\varepsilon_p - \varepsilon_{H,p}$ suhteellisuusrajalla σ_p. c:n arvoiksi Ylinen antaa 0,8···0,875 mäntypuulle, 0,93 kuusipuulle, 0,857 alumiiniseokselle, 0,977 teräkselle ja 0,86 betonille. Jossakin määrin erilaisia arvoja on esitetty teoksessa [5] s.82. Arvolla c=1 kaava (3) redusoituu kimmoplastiseksi jännitys-venymäyhteydeksi, ts. Hooken laiksi jännityksen ollessa myötörajan alapuolella ja venymäakselin suuntaiseksi suoraksi myötörajalla. Yhtälön (3) sopiva dimensioton esitysmuoto on (kuva 1)



Kuva 1. Yhtälön (5) mukaiset jännitys-venymäkuvaajat, lähde [3].

$$\frac{E\varepsilon}{\sigma_y} = c\frac{\sigma}{\sigma_y} - (1-c)\ln\left(1-\frac{\sigma}{\sigma_y}\right) \tag{5}$$

Ylinen on käyttänyt myös muotoa

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}\,\frac{1-c(\sigma/\sigma_y)^n}{1-(\sigma/\sigma_y)^n} \tag{6}$$

olevaa yhtälöä jännitys-venymäyhteyksien approksimointiin, [5] ja [6]. Tapauksessa n=1 saadaan parametrin c arvoiksi 0,997 teräkselle ja 0,975 magnesiumseokselle.

Ylinen sovelsi tangenttimoduulin lauseketta (2) keskisesti puristettujen suorien sauvojen nurjahdusjännityksen määrittämiseen. Merkitsemällä Eulerin nurjahdusjännitystä

$$\sigma_E = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \tag{7}$$

jossa $\lambda = L/i$ on sauvan hoikkuus ja $i = \sqrt{I/A}$ poikkipinnan jäyhyyssäde, Ylisen esittämä nurjahdusjännityksen σ_{cr} kaava (17) lähteessä [3] saa muodon

$$\sigma_{cr} = \frac{\sigma_E + \sigma_y}{2c} - \sqrt{\frac{(\sigma_E + \sigma_y)^2 - 4c\sigma_E\sigma_y}{4c^2}} \tag{8}$$

Käyttämällä merkintöjä

$$P_y = \sigma_y A, \quad P_E = \sigma_E A, \quad P = \sigma_{cr} A \tag{9}$$

kaava (8) antaa kriittisen puristusvoiman lausekkeen

$$P = \frac{1}{2c}\left(P_E + P_y - \sqrt{(P_E + P_y)^2 - 4cP_E P_y}\right) \tag{10}$$

Se voidaan muuntaa myös muotoon

$$\frac{P}{P_E} + \frac{P}{P_y} = 1 + c\frac{P}{P_E}\frac{P}{P_y} \tag{11}$$

Julkaisussa [4] Ylinen käsitteli epäkeskisesti puristettujen ja alkukäyrien puusauvojen lujuutta soveltaen myös tangenttimoduulia (2). Alkutaipuman $v=f_0\sin(\pi x/L)$ omaavan sauvan kriittiselle reunajännitykselle hän johti lausekkeen (lähde [4] kaava (48))

$$\sigma_{cr} = \frac{1}{2c}\left[(1+\beta m')\sigma_E + \sigma_y - \sqrt{\left((1+\beta m')\sigma_E + \sigma_y\right)^2 - 4c\sigma_E\sigma_y}\right] \tag{12}$$

Yllä olevassa kaavassa lyhenteet ovat

$$m' = \frac{f_0 h}{i^2}, \quad \beta = \frac{\sigma_y}{\sigma_b} \tag{13}$$

h on reunaetäisyys puristettuun reunaan ja σ_b taivutuslujuus, joka voi siis poiketa puristusmyötörajasta σ_y.

Merkinnöin (9) saadaan edelleen kriittisen puristusvoiman lauseke

$$\frac{P}{P_y} = \frac{1}{2c}\left[1 + (1+\beta m')\frac{P_E}{P_y} - \sqrt{\left(1 + (1+\beta m')\frac{P_E}{P_y}\right)^2 - 4c\frac{P_E}{P_y}}\right] \tag{14}$$

tai kaavaa (11) vastaavasti esitettynä

$$\frac{P}{P_E}+(1+\beta m')\frac{P}{P_y}=1+c\frac{P}{P_E}\frac{P}{P_y} \tag{15}$$

EMPIIRISET MITOITUSKAAVAT

Empiiristen kaavojen taustalla on yleensä jokin teoreettisin perustein johdettu tulos, jota sitten on muokattu paremman yhtäpitävyyden saamiseksi koetulosten kanssa esim. lisäkertoimien tai -parametrien avulla. Eräs vanhimmista pilarien mitoitukseen käytetyistä empiirisistä mitoituskaavoista on **Rankinen kaava**

$$P=\frac{P_y}{1+\psi\lambda^2} \tag{16}$$

jossa ψ on sopivasti valittava numeerinen parametri. Rankinen kaavalla on myös muita nimityksiä: Rankinen-Gordonin kaava, Navier'n-Rankinen kaava ja Navier'n-Schwarzin kaava (ks. [3] ja [11]). Timoshenko [12] s.195 mainitsee, että sen esitti ensimmäisenä Tredgold ja sen sovitti Hodgkinsonin kokeisiin Gordon. Lopullisen muodon esitti Rankine 1866. (Ks. myös Todhunter&Pearson [14] Vol. I s.454, Tredgold; Vol. I s.525 Hodgkinson; Vol. II, s.321, Rankine).

Rankinen kaava (16) voidaan saattaa ns. **interaktio-** eli **yhteisvaikutusmuotoon**

$$\left(\frac{\psi\pi^2 EA}{P_y}\right)\frac{P}{P_E}+\frac{P}{P_y}=1 \tag{17}$$

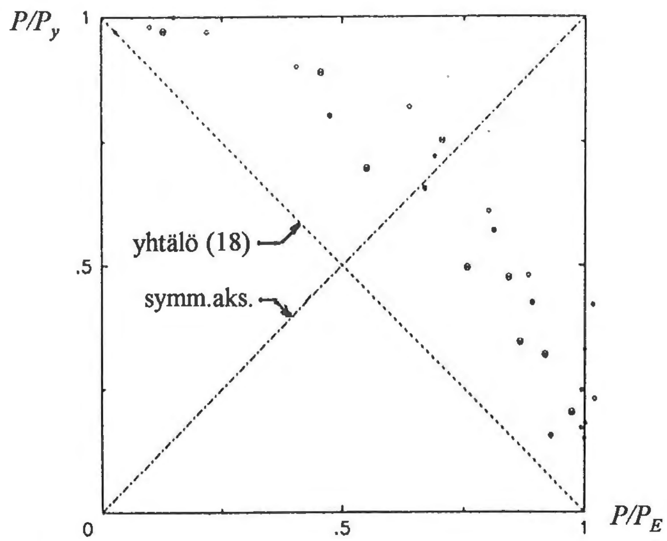
Interaktioyhtälön ajatuksena on, että kriittinen kuorma riippuu molemmista (tai yleisesti useasta) murtumistavoista eli se on murtosuhteiden P/P_y ja P/P_E funktio. Mikäli sama yhtälö kuvaa kriittistä kuormaa koko hoikkuusalueella, sillä on on oltava oikea käyttäytyminen rajatilanteissa, ts. jomman kumman murtosuhteen ollessa nolla. Rankinen kaavasta nähdään, että se kuvaa puhdasta nurjahdusta vain, kun $\psi=\sigma_y/\pi^2 E$. Tällöin tullaan yksinkertaiseen interaktioyhtälöön

$$\frac{P}{P_E}+\frac{P}{P_y}=1 \tag{18}$$

joka esitetään joskus myös muodossa

$$\frac{1}{P_E} + \frac{1}{P_y} = \frac{1}{P} \tag{19}$$

Jos $\psi < \sigma_y / \pi^2 E$, niin kaava (17) antaa liian suuria P:n arvoja riittävän hoikille sauvoille. Muulloin se on konservatiivinen.



Kuva 2. Puupilareiden puristuskokeiden tuloksia, lähde [11].

Yhtälö (18) on symmetrinen muuttujien P/P_y ja P/P_E suhteen, mikä on sopusoinnussa Zahnin [11] keräämien puupilareita koskevien koetulosten kanssa. Sitä vastoin koetulokset eivät vahvista yhtälön (18) mukaista lineaarista riippuvuutta muuttujien suhteen. Yhtälö (18) antaa aivan liian konservatiivisia tuloksia (kuva 2). Koetulosten mukaan murtosuhteiden summan tulee olla ykköstä suurempi kummankin ollessa nollasta poikkeava. Tähän päästään lisäämällä oikealle puolelle positiivinen symmetrian säilyttävä termi. Yksinkertaisin tällainen termi on murtosuhteiden tulo

$$\frac{P}{P_E} + \frac{P}{P_y} = 1 + \frac{P}{P_E}\frac{P}{P_y} \tag{20}$$

Tällä on kuitenkin sellainen merkillinen vaikutus, että yhteisvaikutus häviää, niin kuin nähdään kirjoittamalla yllä oleva yhtälö muotoihin

$$\frac{P}{P_y}\left(1-\frac{P}{P_E}\right)+\frac{P}{P_E}=1 \text{ ja } \frac{P}{P_y}+\frac{P}{P_E}\left(1-\frac{P}{P_y}\right)=1 \tag{21}$$

Yhteisvaikutuskuvio on neliö, ts. interaktio häviää, koska esim. P/P_y :n ollessa nollan ja ykkösen välissä P/P_E on ykkönen ja kääntäen. Tämä tulos antaa viitteen, jonka mukaan lisätermi olisi kerrottava ykköstä pienemmällä luvulla c. Silloin päädytään vuorovaikutusyhtälöön

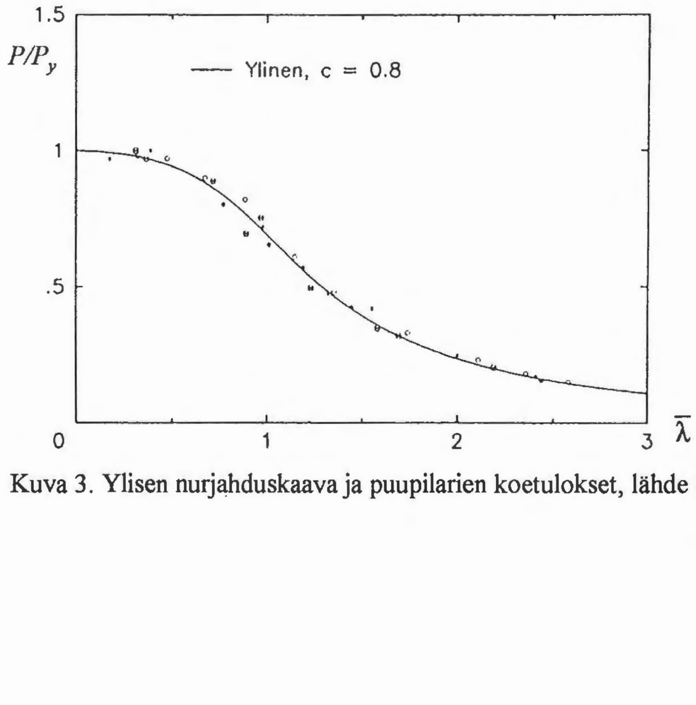
$$\frac{P}{P_y}+\frac{P}{P_E}=1+c\frac{P}{P_y}\frac{P}{P_E} \tag{22}$$

Mutta tämä on täsmälleen Ylisen yhtälö (11), johon tultiin täysin toiselta pohjalta. Parametrin c ollessa $0 \leq c \leq 1$, kuten Ylisellä, vuorovaikutusyhtälö (22) antaa rajatapauksina lineaarisen yhteyden (18) ja neliökuvion (21) ja on muulloin näiden välissä.

Sopivalla parametrin c arvolla saadaan hyvä yhteensopivuus koetulosten kanssa. Zahn [11] on osoittanut, että puupilareille sopiva arvo on c=0,8. Tämä näkyy selvästi kuvasta 3, jossa kaavan (22) tai pikemminkin kaavan (10) mukainen käyrä

$$\frac{P}{P_y}=\frac{1}{2c}\left(1+\frac{1}{\bar{\lambda}^2}-\sqrt{\left(1+\frac{1}{\bar{\lambda}^2}\right)^2-\frac{4c}{\bar{\lambda}^2}}\right) \tag{23}$$

on esitetty rinnan koetulosten kanssa. Abskissana on suhteellinen hoikkuus $\bar{\lambda}=\sqrt{P_y/P_E}$.



Kuva 3. Ylisen nurjahduskaava ja puupilarien koetulokset, lähde [11].

Tulos on hiukan yllättävä: Ylisen kaava (11) osoittautuu erittäin hyvin sopivaksi sellaiseen tarkoitukseen, johon sitä ei alunperin johdettu. Ylinenhän tarkasteli nurjahdusta tangenttimoduuliteorian mukaan, kun taas yhteisvaikutuskäyrän (22) johto oli puhtaasti *ad hoc*-tyyppinen ja se pyrkii ottamaan huomioon sauvojen epähomogeenisuuden, alkukäyryyden ym. epätäydellisyyksiä.

Mainittakoon tässä myös toinen symmetrinen interaktioyhtälö, joka sisältää vain yhden parametrin. Se on potenssiyhtälö

$$\left(\frac{P}{P_y}\right)^a + \left(\frac{P}{P_E}\right)^a = 1, \text{ jossa } a \geq 1 \tag{24}$$

Siihen ei kuitenkaan ole yhtä helppoa liittää epälineaarista jännitys-venymäyhteyttä kuin Ylisen kaavaan.

ECCS:n nurjahduskäyrät perustuvat **Perryn-Robertsonin** kaavaan

$$\sigma_{cr} = \frac{1}{2}\left[(1+\eta)\sigma_E + \sigma_y - \sqrt{((1+\eta)\sigma_E + \sigma_y)^2 - 4\sigma_E\sigma_y}\right] \tag{25}$$

jota vastaava yhteisvaikutusyhtälö on

$$\frac{P}{P_E} + (1+\eta)\frac{P}{P_y} = 1 + \frac{P}{P_E}\frac{P}{P_y} \tag{26}$$

Suhteellisen hoikkuuden funktiona kriittisellä kuormalla on lauseke

$$\frac{P}{P_y} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1+\eta}{\bar{\lambda}^2} - \sqrt{\left(1 + \frac{1+\eta}{\bar{\lambda}^2}\right)^2 - \frac{4}{\bar{\lambda}^2}}\right) \tag{27}$$

(Perry 1886, Robertson 1925, ks. [13]). Alunperin kerroin η oli $\eta = f_0 h / i^2$, jossa f_0 on alkutaipuma, h reunaetäisyys ja i jäyhyyssäde. Otaksuen alkutaipuma verrannolliseksi pilarin pituuteen ja reunaetäisyys jäyhyyssäteeseen saadaan η verrannolliseksi hoikkuuteen $\eta = k\lambda$. Kertoimen k lukuarvona on ollut 0,001-0,003, [13]s.122. Brittiläisessä normissa BS 449 käytetään nykyään parabolista lauseketta $\eta = 30 \cdot 10^{-6}\lambda^2$ (Godfrey, 1962, ks.[13]). Myös Ranskan normi perustuu paraboliseen yhteyteen (Dutheil, 1952, ks.

[13]). Vertailu Ylisen alkukäyrää sauvaa koskevaan kaavaan (15) osoittaa taas yhtenevyyden, mikäli parametrin c arvoksi pannaan c=1.

ECCS:n ja Suomen B7-normin nurjahduskäyrä on melkein sama kuin Perryn-Robertsonin kaava. Erona on tekijän η lauseke, joka B7:ssa on

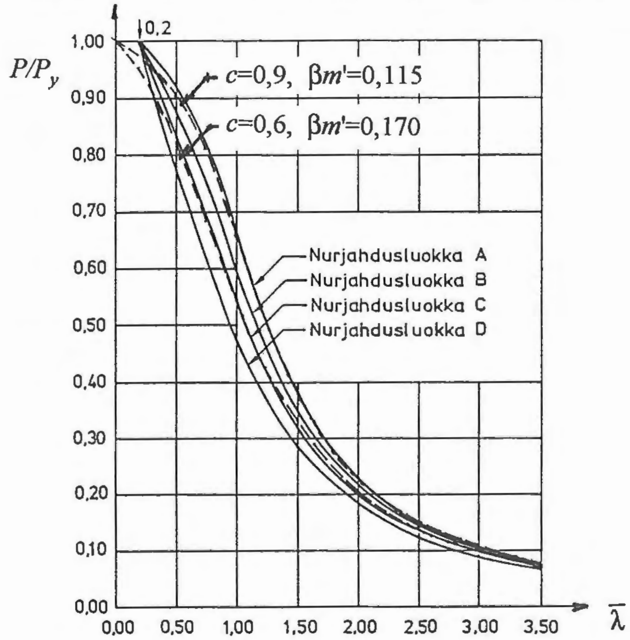
$$\eta = \alpha(\lambda\sqrt{E/\pi^2\sigma_y} - 0,2) \tag{28}$$

Numeerinen kerroin α riippuu sauvan poikkipinnan muodosta. Sen katsotaan ottavan huomioon sekä alkukäyryyden että jäännösjännitysten vaikutukset.

Kirjoittamalla Ylisen alkukäyrää sauvaa koskeva kaava (14) suhteellisen hoikkuuden funktiona

$$\frac{P}{P_y} = \frac{1}{2c}\left(1 + \frac{1+\beta m'}{\bar{\lambda}^2} - \sqrt{\left(1+\frac{1+\beta m'}{\bar{\lambda}^2}\right)^2 - \frac{4c}{\bar{\lambda}^2}}\right) \tag{29}$$

nähdään selvästi sen samankaltaisuus Perryn-Robertsonin kaavan kanssa. Parametrin c sopivalla valinnalla saadaan B7:n nurjahduskäyriin hyvin yhtyviä käyriä (kuva 4).



Kuva 4. Ylisen nurjahduskäyrät ja B7:n käyrät.

YHTEENVETO

Ylisen kaavat (8) ja (12) johdettiin alkuaan ei-kimmoista nurjahdusta tai alkukäyrää puristusta varten. Niiden uusi soveltaminen puusauvojen mitoitukseen perustuu kuitenkin kokonaan toisenlaiseen lähestymistapaan. Vertaamalla koetuloksiin on huomattu, että Ylisen kaava (11) kuvaa hämmästyttävällä tarkkuudella puupilareiden puristuskestävyyttä koko hoikkuusalueella valitsemalla parametrille c sopiva arvo. Voidaan siis sanoa, että Ylisen kaava osoittautuu yllättäen sopivaksi sellaiseen tarkoitukseen, johon sitä ei alunperin johdettu. Ylinenhän tarkasteli nurjahdusta tangenttimoduuliteorian mukaan,kun taas yhteisvaikutuskäyrän (22) johto oli puhtaasti *ad hoc*-tyyppinen ja se pyrkii ottamaan huomioon sauvojen epähomogeenisuuden, alkukäyryyden ym. epätäydellisyyksiä.

Myös alkukäyriä sauvoja koskeva Ylisen kaava (29) kelpaa hyvin kuvaamaan nykyisin käytettyjä nurjahduskaavoja.

Kirjallisuusviitteet

[1] Ylinen A., Die Knickfestigkeit eines zentrisch gedrückten geraden Stabes im elastischen und unelastischen Bereich. Diss. Technische Hochschule Helsinki, 1938.

[2] Ylinen A., Über die Knickbiegefestigkeit eines exzentrisch belasteten geraden Stabes und eines zentrisch belasteten ursprünglich gekrümmten Stabes. Suomalaisen Tiedeakatemian toimituksia. Sarja A. Nid. LVII, N:o 14. Helsinki, 1941.

[3] Ylinen A., A method for determining the buckling stress and the required cross-sectional area for centrally loaded straight columns in elastic and inelastic range. IABSE Publications, Vol. 16, 529-550. Zürich, 1956.

[4] Ylinen A., Über die Festigkeit von gedrückten Holzstäben. IABSE Publications, Vol. 26, 611-626. Zürich, 1956.

[5] Ylinen A., Kimmo- ja lujuusoppi I. 2. painos. WSOY, Porvoo, 1965.

[6] Ylinen A. ja Eskola A., Theory of a statically indeterminate pin-jointed framework the material of which does not follow Hooke's law. IABSE 6th Congress, Preliminary Publication, 167-176. Stockholm, 1960.

[7] Zyczkowski M., Combined loadings in the theory of plasticity. PWN-Polish Scientific Publishers, Varsova, 1981. 714 s.

[8] Malhotra S.K., A rational approach to the design of solid timber columns. *Applications of Solid Mechanics*, Study No. 7, University of Waterloo, Waterloo, Ontario, Canada, 1972.

[9] Zahn J.J., Design of wood members under combined load. J. Struct. Engrg., ASCE, Vol. 112, No. 9, Sep. 1986, 2109-2126.

[10] Zahn J.J., Empirical failure criteria with correlated resistance variables. J. Struct. Engrg., ASCE, Vol. 116, No. 11, Nov. 1990, 3122-3137.

[11] Zahn J.J., Re-examination of Ylinen and other column equations. J. Struct. Engrg., ASCE, Vol. 118, No. 10, Oct. 1992, 2716-2728.

[12] Timoshenko S.P.&Gere J.M., Theory of elastic stability. 2nd edition. McGraw-Hill Book Company, 1961.

[13] Allen H.G.&Bulson P.S., Background to buckling. McGraw-Hill Book Company, 1980.

[14] Todhunter I.&Pearson K., The history of the theory of elasticity. Vol. I., Vol. II . Dover Publications, 1960.

Martti Mikkola, professori
Rakenteiden mekaniikka
Teknillinen korkeakoulu