

OSITTAIN JÄYKKIEN LIITOSTEN VAIKUTUS TERÄSPALKIN STAATTISEEN TOIMINTAAN

Kari Pajanne

Rakenteiden Mekaniikka, Vol. 26
No 4 1993, pp. 38–50

Tiivistelmä: Teräsrungon liitokset ovat yleensä osittain jäykkiä ja osittain lujia. Liitoksen kiertojäykkyys on tällöin jossain nivelellisen ja täysin jäykän välillä ja sen taivutuskestävyys liitettävää palkkia pienempi. Artikkelissa tarkastellaan tällaisten liitosten vaikutusta yksittäisen palkin staattiseen toimintaan kimmo- ja plastisuusteorian avulla. Artikkelin alussa johdetaan kulmanmuutosmenetelmän laajennetut perusyhtälöt tapauksille, joissa palkin päissä olevien lineaaristen kiertojousien jäykkyydet ovat toisistaan poikkeavat. Palkin päissä olevat osittain jäykät liitokset vaikuttavat palkin kantokykyyn, voimasuurejakaumiin, siirtymiin ja rakenneanalyysin suorittamiseen. Artikkelin alustava osa Teknillisen korkeakoulun teräsrakennetekniikan laboratoriossa tänä vuonna käynnistynyttä tutkimusprojektia "Teräsrungon staattinen toiminta".

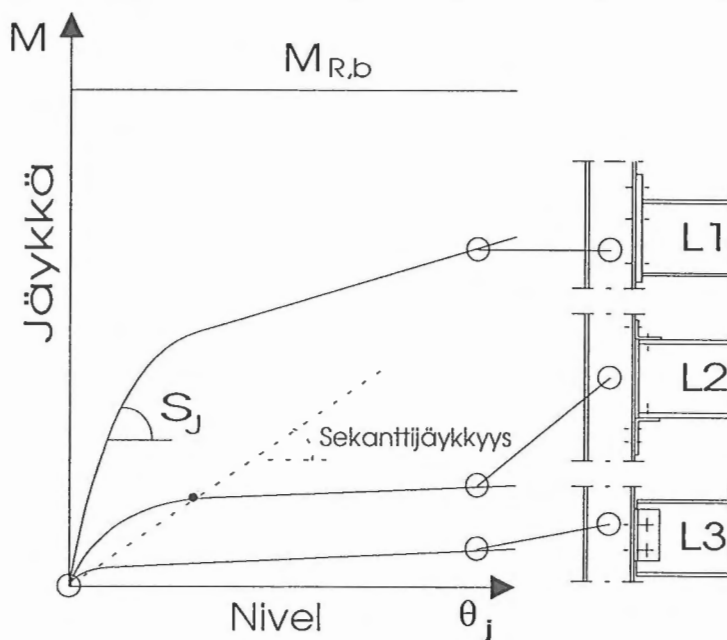
Johdanto

Yleensä teräsrungon liitokset oletetaan joko nivelellisiksi tai täysin jäykiksi, vaikka ne todellisuudessa ovat yleensä osittain jäykkiä ja osittain lujia. Liitoksen kiertojäykkyys on tällöin jossain nivelellisen ja täysin jäykän välillä ja sen taivutuskestävyys ($M_{R,i}$) liitettävää palkkia ($M_{R,b}$) pienempi. Liitosta rasittava taivutusmomentti (M) ja sitä vastaava liitoksen suhteellinen kiertymä (θ_i) voidaan esittää kuvan 1 mukaisilla momentti-kiertymäkuvaajilla. Liitoksen suhteellisella kiertymällä tarkoitetaan sitä nettokiertymää, joka saadaan, kun palkin pään kiertymästä vähennetään pilarin kimmainen kiertymä. Täysin jäykän liitoksen kuvaaja yhtyy pystyakseliin ja nivelellisen vaaka-akseliin. Osittain jäykän liitoksen kuvaaja kulkee näiden ääritapausten välillä. Liitosalueen materiaalin epäjatkuvuus, paikalliset myötäämiset ja lommahtamiset, jännityskeskittymät ja yleinen geometrian muuttuminen aiheuttavat sen, että kuvaaja on yleensä epälineaarinen. Liitoksen kiertojäykkyys (S_i) on momentti-kiertymäkuvaajan kulmakerroin. Liitoksen sekanttijäykkyys (merkitty katkoviivalla kuvaan 1) on momentti-kiertymäkuvaajan kahden pisteen välisen suoran kulmakerroin. Suhteellinen kiertojäykkyys (u) on palkin jäykkyyden (EI/L) ja liitoksen kiertojäykkyyden suhde ($u = EI/LS_i$).

Liitoksen jäykkyyden merkitys teräsrungossa tunnettiin jo tämän vuosisadan alkupuolella. Yhdysvaltalaiset Wilson ja Moore tutkivat niittiliitosten kiertojäykkyyttä vuonna 1917 [1]. Yhdysvalloissa, Kanadassa ja Englannissa tehtiin 1930-luvulla erilliset koesarjat pääosin niittiliitoksille. Viimeisen kahden vuosikymmenen aikana on osittain jäykkiä liitoksia tutkittu valtaisesti, mistä esimerkkinä ovat kirjallisuuskatsauksessa [2] listatut noin 200 artikkelia.

Liitoksen oikea mallintaminen parantaa teräsrunгон analysoinnin tarkkuutta. Käytössä olevien tietokonepohjaisten analysointimenetelmien tarkkuus on monesti ristiriidassa sen virheellisen alkuoletuksen kanssa, että liitokset ovat nivelellisiä tai täysin jäykkiä. Osittaisen jäykkyyden hyödyntäminen saattaa johtaa taloudellisempaan lopputulokseen, mutta edellyttää samalla liitoksen momentti-kiertymäyhteyden tuntemista.

Osittain jäykillä liitoksilla kootun rakennusrungon tarkka analysointi on melko työlästä. Niinpä tässä artikkelissa tarkasteltu vain yksittäistä palkkia, jonka päissä on kiertojäykkyyksiltään toisistaan poikkeavat liitokset. Artikkelin on osa Teknillisen korkeakoulun teräsrakennetekniikan laboratoriossa tehtävää laajempaa tutkimusprojektia "Teräsrunгон staattinen toiminta".



Kuva 1. Liitosten momentti-kiertymäkuvaaja.

Kulmanmuutosmenetelmän laajennetut perusyhtälöt

Tarkastellaan kuvan 2 palkkia ($g(x)$, L , EI). Palkin päiden liitosten lineaariset kiertymisjäykkyydet ovat S_1 ja S_2 .

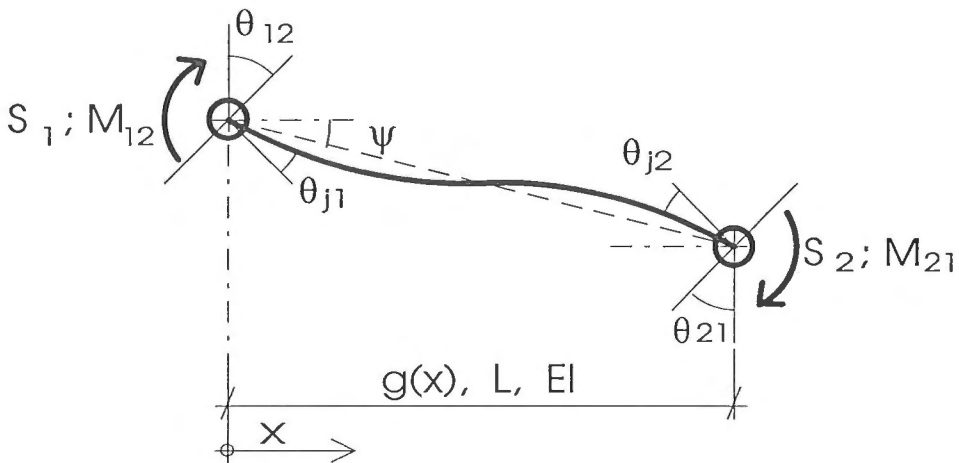
Palkin päiden kulmanmuutoksille voidaan kirjoittaa seuraavat yhteydet:

$$\theta_{12} - \theta_{j1} - \psi = \frac{M_{12}L}{3EI} - \frac{M_{21}L}{6EI} + \theta_{g1} \quad (1)$$

$$\theta_{21} - \theta_{j2} - \psi = \frac{M_{21}L}{3EI} - \frac{M_{12}L}{6EI} + \theta_{g2}$$

Yhtälöissä (1) θ_{gi} on nivelellisesti tuetun palkin tuen kiertymä mielivaltaisesta vertikaalikuormasta $g(x)$ ja θ_{ji} on kiertojousen kiertymä, jolle pätevät kaavat (2) palkin päissä.

$$\theta_{j1} = \frac{M_{12}}{S_1} ; \quad \theta_{j2} = \frac{M_{21}}{S_2} \quad (2)$$



Kuva 2. Kulmanmuutosmenetelmän merkintöjä.

Palkinpään momenteille M_{12} ja M_{21} voidaan yhtälöistä (1) lähtien johtaa seuraavat lausekkeet:

$$M_{12} = \frac{1}{U} [(6u_2 + 2)\theta_{12} + \theta_{21} - (6u_2 + 3)\psi - (6u_2 + 2)\theta_{g1} - \theta_{g2}] \frac{2EI}{L}$$

$$M_{21} = \frac{1}{U} [(6u_1 + 2)\theta_{21} + \theta_{12} - (6u_1 + 3)\psi - \theta_{g1} - (6u_1 + 2)\theta_{g2}] \frac{2EI}{L} \quad (3)$$

$$\text{Missä } u_i = \frac{EI}{LS_i} \quad (i=1,2) \quad \text{ja} \quad U = 12u_1u_2 + 4u_1 + 4u_2 + 1$$

Lyhennysmerkintä $u = EI/LS_i$ on liitoksen suhteellinen kiertojäykkyys. Yhtälöt (3)

palautuvat perinteiseksi kulmanmuutosmenetelmän perusyhtälöiksi sijoittamalla niihin $u_i = 0$ eli kun $S_i = \infty$.

Palkin päässä olevien lineaaristen kiertojousien vaikutus voimasuureisiin

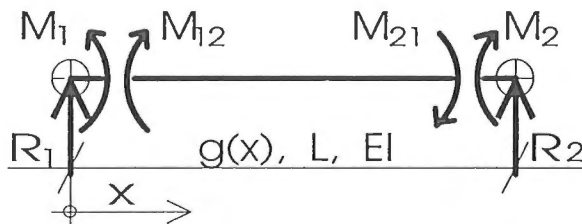
Yleinen tapaus

Yksittäisen, vaakatasossa olevan palkin kuvan 3 mukaiset tukimomentit M_1 ja M_2 saadaan yhtälöistä (3) sijoittamalla niihin $\theta_{12} = \theta_{21} = \Psi = 0$ eli:

$$M_1 = M_{12} = \frac{1}{U} [-(6u_2 + 2)\theta_{g1} - \theta_{g2}] \quad (4)$$

$$M_2 = -M_{21} = \frac{1}{U} [\theta_{g1} + (6u_1 + 2)\theta_{g2}]$$

Yhtälöissä (4) θ_{g_i} on nivelellisesti tuetun palkin tuen kiertymä mielivaltaisesta vertikaalikuormasta $g(x)$.



Kuva 3. Yksittäisen palkin tukireaktiot ja -momentit.

Palkin tukireaktioiksi (R_1, R_2) ja kentän taivutusmomenttijakaumaksi ($M(x)$) saadaan lausekkeet:

$$R_1 = R_{g1} + \frac{M_2 - M_1}{L} \quad ; \quad R_2 = R_{g2} + \frac{M_1 - M_2}{L} \quad (5)$$

$$M(x) = M_1 \left(1 - \frac{x}{L}\right) + M_2 \frac{x}{L} + M_g(x)$$

Lausekkeissa (5) R_{g_i} on nivelellisesti tuetun palkin tukireaktio ja $M_g(x)$ sen taivutusmomenttijakauma mielivaltaisesta vertikaalikuormasta $g(x)$.

Tasan jakaantunut kuormitus

Sijoittamalla yhtälöihin (4) ja (5) nivelpalkin päiden kiertymät ja keskikohtan taivutusmomentti eli lausekkeet

$$\theta_{g1} = -\theta_{g2} = \frac{gL^3}{24EI}, \quad M_g\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{gL^2}{8} \quad (6)$$

saadaan seuraavat lausekkeet tukimomentille ja palkin keskikohtan taivutusmomentille:

$$M_1 = -\frac{6\alpha u_1 + 1}{12\alpha u_1^2 + 4(1 + \alpha)u_1 + 1} \frac{gL^2}{12}$$
$$M_2 = \frac{6u_1 + 1}{6\alpha u_1 + 1} M_1$$
$$M\left(\frac{L}{2}\right) = \left[\frac{3}{2} - \frac{3(1 + \alpha)u_1 + 1}{12\alpha u_1^2 + 4(1 + \alpha)u_1 + 1} \right] \frac{gL^2}{12} \quad (7)$$
$$= \frac{M_1 + M_2}{2} + \frac{gL^2}{8}$$

$$\text{Missä: } u_1 = \frac{EI}{LS_1} \text{ ja } \alpha = \frac{S_1}{S_2} = \frac{u_2}{u_1}$$

Palkin keskikohtan taivutusmomentin lauseke vastaa kentän maksimimomenttia vain tapauksessa $\alpha = 1$. Kuvassa 4 on esitetty kaavojen (7) mukaiset pään 1 tukimomentin ja keskikohtan taivutusmomentin itseisarvot u_1 :n funktiona α :n eri arvoilla (0, 0.5, 1, 2 ja ∞).

Havainnollisuuden vuoksi on tässä artikkelissa laskettu kuvan 1 254x102x22 UB -palkin ($I = 28.7E6 \text{ mm}^4$) ja 152x152x23 UC -pilarin välisille liitoksille [3] sekantti-jäykkyys välille 0..0.01 rad. Olettamalla palkin pituudeksi $L = 6000\text{mm}$ saadaan suhteellisen kiertäjykkyyden (u) arvoiksi tällöin:

L1: Päätylevy 350x135x15, pultit 6M16, pilari jäykistetty	$u = 0.2$
L2: Kulmateräkset $t = 8\text{mm}$ laipoissa, pultit 10M16	$u = 0.7$
L3: Kulmateräkset $t = 8\text{mm}$ uumassa, pultit 6M16	$u = 2.1$

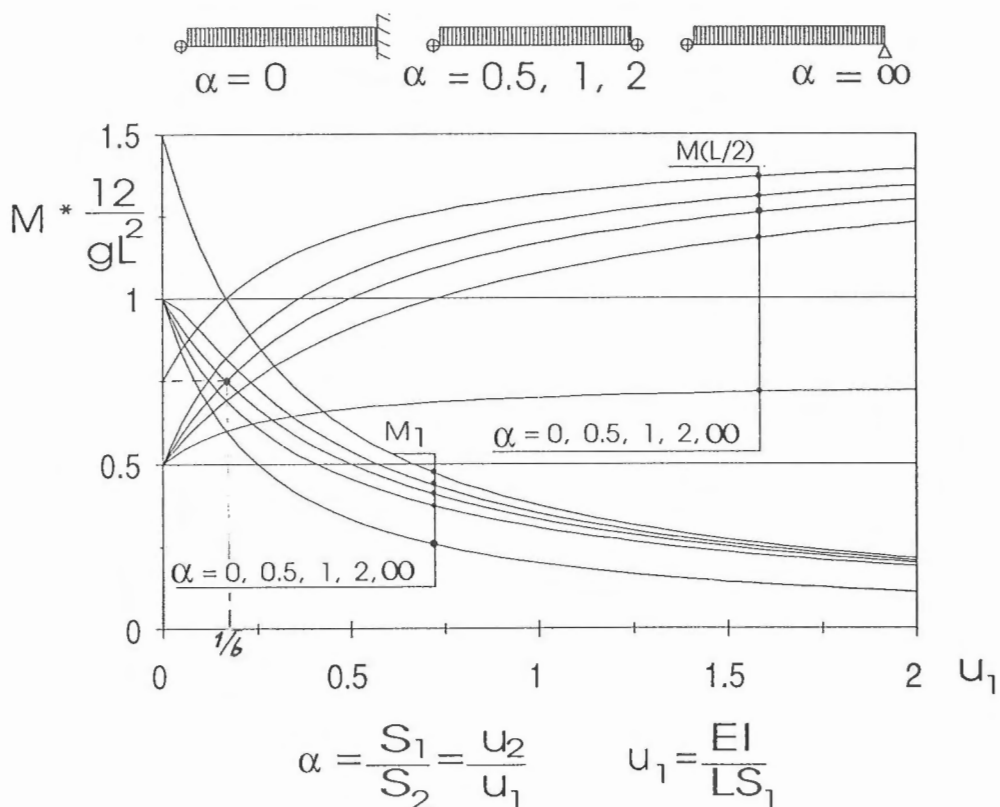
Kuvan 4 ja kaavojen (7) perusteella voidaan tehdä seuraavia johtopäätöksiä:

1. Tietyllä palkin pään liitoksen kiertäjykkyyden arvolla palkin tuki- ja kenttämomentit ovat yhtäsuuria. Kun palkin päiden liitosten suhteelliset kiertäjykkyydet ovat samoja ($u_1 = u_2 = u = 1/6$) palkin maksimi tuki- ja kenttämomentti on $gL^2/16$.

2. Kun liitoksen suhteellinen kiertäjykkyys (u) pieni, niin melko pienikin muutos

suhteellisessa kiertäjykydessä muuttaa taivutusmomenteja oleellisesti. Kun liitoksen suhteellinen kiertäjykyys on suuri, niin muutos suhteellisessa kiertäjykydessä ei muuta taivutusmomenteja oleellisesti. Koska liitoksen kiertäjykyys (S_j) on kääntäen verrannollinen suhteellisen kiertäjykyteen (u), tarkan rakenneanalyysin tekeminen edellyttää sitä, että mitä joustavampi liitos on, sitä tarkemmin sen kiertäjykyys ja samalla momentti-kiertymäyhteys on tunnettava.

3. Tarkastelemalla kuvaajia α :n arvoilla 0,5, 1 ja 2 voidaan todeta, että pienet keskinäiset erot päiden suhteellisissa kiertäjykyksissä vaikuttavat enemmän keskikohdan kuin tuen taivutusmomenttiin erojen ollessa sielläkin suhteellisen pieniä.

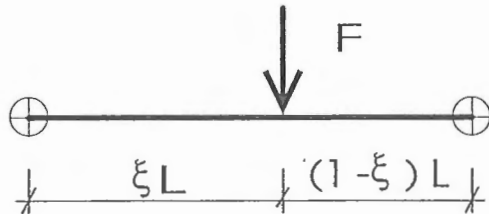


Kuva 4. Liitosten suhteellisen kiertäjykyden vaikutus palkin tukimomenttiin (M_1) ja keskikohdan taivutusmomentin arvoon ($M_{L/2}$).

Pistekuorma

Kuvan 5 mukaiseen palkkiin vaikuttavan pistekuorman (F) aiheuttamat tukimomentit saadaan kaavoista (4) sijoittamalla niihin yksinkertaisesti tuetun palkin päiden kiertymät eli

$$\begin{aligned}\theta_{g1} &= (1 - \xi)[1 - (1 - \xi)^2] \frac{FL^2}{6EI} \\ \theta_{g2} &= -\xi(1 - \xi^2) \frac{FL^2}{6EI}\end{aligned}\quad (8)$$



Kuva 5. Pistekuorman (F) kuormittama palkki.

Kun pistekuorma on palkin keskellä ($\xi = 0.5$ ja $M_g(L/2) = FL/4$), saadaan pään 1 tukimomentiksi ja keskikohdan taivutusmomentiksi seuraavat lausekkeet:

$$\begin{aligned}M_1 &= -\frac{6\alpha u_1 + 1}{12\alpha u_1^2 + 4u_1 + 4u_2 + 1} \frac{FL}{8} \\ M\left(\frac{L}{2}\right) &= \left[2 - \frac{6(1 + \alpha)u_1 + 2}{12\alpha u_1^2 + 4u_1 + 4u_2 + 1}\right] \frac{FL}{8} \\ \text{Missä: } u_1 &= \frac{EI}{LS_1} \quad \alpha = \frac{S_1}{S_2} = \frac{u_2}{u_1}\end{aligned}\quad (9)$$

Palkin päissä olevien lineaaristen kiertojousien vaikutus siirtymiin

Yleinen tapaus

Palkin taipumaviiva voidaan ratkaista integroimalla kaavan (5) taivutusmoment-

tijakauma kahdesti ja ottamalla huomioon reunaehdot. Palkin taipumaviiva saadaan superpositioperiaatteella seuraavasti:

$$\begin{aligned}
 w(x) &= w_g(x) + w_{M_1}(x) + w_{M_2}(x) \\
 w_{M_1}(x) &= \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right) \left(2 - \frac{x}{L}\right) \frac{M_1 L^2}{6EI} \\
 w_{M_2}(x) &= \frac{x}{L} \left[1 - \left(\frac{x}{L}\right)^2\right] \frac{M_2 L^2}{6EI}
 \end{aligned} \tag{10}$$

Yhtälöissä (10) $w_g(x)$ on nivelellisesti tuetun palkin taipumaviiva mielivaltaisesta vertikaalikuormasta $g(x)$.

Tuen kiertymät saadaan tukimomentin ja tunnetun kiertöjäykkyyden avulla kaavoista (2).

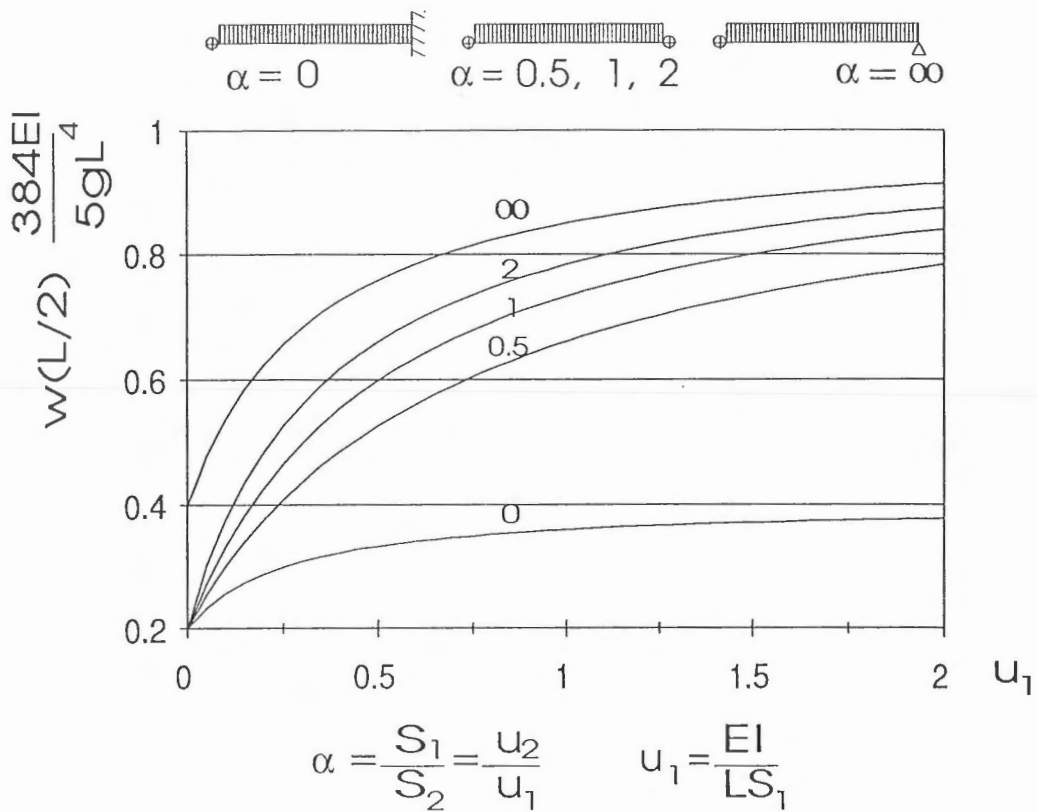
Tasan jakaantunut kuormitus

Sijoittamalla kaavoihin (10) tukimomentit M_1 ja M_2 kaavoista (7) ja yksinkertaisesti tuetun palkin keskikohdan taipuma ($5gL^4/384EI$), saadaan keskikohdan taipumaksi:

$$\begin{aligned}
 w\left(\frac{L}{2}\right) &= \frac{5gL^4}{384EI} + \frac{(M_1 + M_2) L^2}{16EI} \\
 &= \left[1 - \frac{4}{5} \left(\frac{3(1 + \alpha)u_1 + 1}{12\alpha u_1^2 + 4(1 + \alpha)u_1 + 1}\right)\right] \frac{5gL^4}{384EI} \\
 \text{Missä: } u_1 &= \frac{EI}{LS_1} \quad \alpha = \frac{S_1}{S_2} = \frac{u_2}{u_1}
 \end{aligned} \tag{11}$$

Esitetty taipuma on kentän maksimitaipuma vain tapauksessa $\alpha = 1$. Kuvassa 6 on esitetty kaavan (11) mukaiset keskikohdan taipumat u_1 :n funktiona α :n eri arvoilla (0, 0.5, 1, 2 ja ∞).

Kuvan 6 ja kaavan (11) perusteella voidaan todeta liitoksen todellisen kiertöjäykkyyden merkittävä vaikutus palkin keskikohdan taipumaan.



Kuva 6. Liitosten suhteellisen kiertöjäykkyyden vaikutus palkin keskikohdan taipu-
maan.

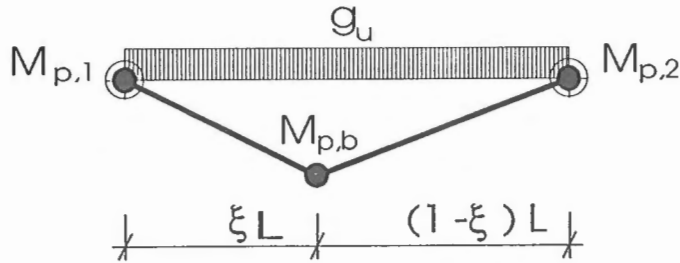
Plastisuusteorian mukainen palkin kantokuorma tasan jakaantuneelle kuor- malle

Kuvan (7) mukaisen mekanismin työyhtälön perusteella saadaan palkin kanto-
kuormaksi (g_u):

$$g_u = \frac{2}{L^2} \left[\frac{(1 - \xi)M_{p,1} + \xi M_{p,2} + M_{p,b}}{\xi(1 - \xi)} \right] \quad (12)$$

$$M_{p,i} = \min \{M_{p,ji} ; M_{p,b}\}$$

Kaavassa (12) $M_{p,b}$ on palkin ja $M_{p,ji}$ liitoksen plastinen taivutuskestävyys.



Kuva 7. Tasaisesti kuormitetun palkin mekanismi

Parametri (ξ) on määritettävä siten, että murtokuorma saavuttaa minimin. Kun palkin päiden liitosten plastiset taivutuskestävyydet ovat samat ja pienemmät kuin palkin, minimi saavutetaan arvolla $\xi = 0.5$ ja kantokuormaksi saadaan :

$$g_u = \frac{8}{L^2} (M_{p,l} + M_{p,b}) \quad (13)$$

Siirtymät

Palkin lopullisen murtomekanismin muodostuminen edellyttää ensin syntyviltä plastisilta niveliltä riittävää kiertymiskykyä. Toisaalta joskus voidaan joutua arvioimaan palkin taipuma juuri ennen sortumista. Tarvittavan kiertymiskyvyn ja taipuman "tarkka" analysointi on hankalaa, koska rakenteen jäykkyys muuttuu sen plastisoituessa. Olettamalla, että palkin sekä liitosten kimmo- ja plastisuusteorian mukaiset kestävyudet ovat yhtäsuuret ($M_y = M_p = M_R$) ja että ensimmäiset nivelet syntyvät liitoksiin, voidaan symmetristen liitosten tapauksessa kirjoittaa kaavojen (1), (6) ja (13) avulla epävarmalla puolella oleva arvio vaadittavalle kiertymiskyvylle:

$$\theta_u = \frac{L}{6EI} (2M_{p,b} - M_{p,l}) \quad (14)$$

Tasaisesti kuormitetun palkin kantokyky

Tarkastellaan tasaisesti kuormitettua palkkia (g, L, EI), jonka päissä on identtiset liitokset ($\alpha = 1$). Sekä liitosten että palkin kimmo- ja plastisuusteorian mukaiset kestävyudet oletetaan yhtäsuuriksi ($M_y = M_p = M_R$). Kaavojen (7) ja (13) avulla voidaan palkin suhteellinen kantokyky ($g l^2 / M_{R,b}$) esittää kimmoteorian (e) ja

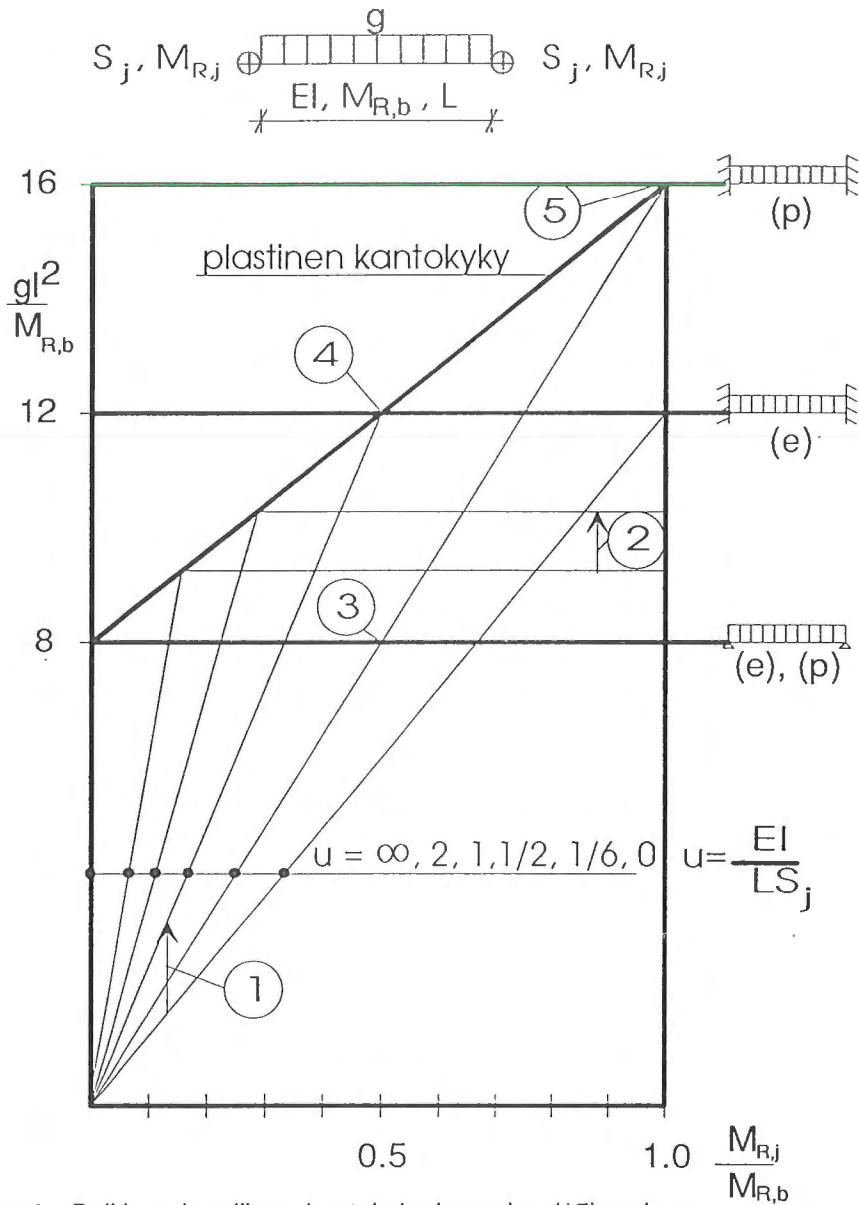
plastisuusteorian (p) mukaan seuraavilla lausekkeilla:

$$\begin{aligned} \left(\frac{gl^2}{M_{R,b}}\right)_e &= 12(2u + 1) \frac{M_{R,j}}{M_{R,b}} & ; & \quad \frac{M_{R,j}}{M_{R,b}} \leq \frac{2}{6u + 1} \\ \left(\frac{gl^2}{M_{R,b}}\right)_e &= 12 \frac{4u + 2}{6u + 1} & ; & \quad \frac{M_{R,j}}{M_{R,b}} \geq \frac{2}{6u + 1} \\ \left(\frac{gl^2}{M_{R,b}}\right)_p &= 8\left(1 + \frac{M_{R,j}}{M_{R,b}}\right) \\ \text{Missä: } u &= \frac{EI}{LS_j} \end{aligned} \tag{15}$$

Kaavojen (15) ylempi kimmoteorian mukainen kantokyky on voimassa silloin, kun kantokyvyn määrää liitoksen kestävyys ja alempi silloin, kun kantokyvyn määrää palkin kestävyys keskellä.

Pitäen mielessä lähtöoletus ($M_y = M_p = M_R$) voidaan kaavojen (16) ja kuvan 8 perusteella todeta :

1. Kun palkin kantokyvyn määrää liitoksen kestävyys, palkin kimmoteorian mukainen kantokyky kasvaa kun liitoksen kiertojäykkyys (S_j) pienenee.
2. Kun palkin kantokyvyn määrää palkin kestävyys, palkin kimmoteorian mukainen kantokyky kasvaa liitoksen kiertojäykkyyden kasvaessa.
3. Mitä jäykempi liitos , sitä suurempi täytyy sen momenttikestävyiden olla, jotta palkin kimmoteorian mukainen kantokyky ylittäisi vastaavan, yksinkertaisesti tuetun palkin kantokyvyn.
4. Kun palkin ja liitoksen jäykkyyksien suhde eli suhteellinen kiertojäykkyys on riittävän suuri ($u \geq 1/6$), on olemassa sellainen liitoksen suhteellisen kiertojäykkyyden ja momenttikestävyiden yhdistelmä ($M_{R,j} = 2M_{R,b}/(6u + 1)$), että palkin kimmoinen ja plastinen kantokyky ovat samat. Tässä pisteessä liitosten ja palkin momenttikestävyudet saavutetaan samanaikaisesti. Tämän pisteen vasemmalla puolella saavutetaan liitosten momenttikestävyudet ensin ja oikealla vastaavasti palkin. Jotta palkin kimmoinen kantokyky ylittäisi vastaavan, jäykästi tuetun palkin kantokyvyn, liitoksen kiertojäykkyyden ja momenttikestävyiden oltava riittävän suurina ($u \leq 0.5$ ja $M_{R,j} \geq 0.5 M_{R,b}$).
5. Palkin maksimi kimmoteorian mukainen kantokyky saavutetaan suhteellisen kiertojäykkyyden arvolla $u = 1/6$ ja kun liitos on yhtä kestävä kuin palkki.



Kuva 8. Palkin suhteellinen kantokyky kaavojen (15) mukaan.

Johtopäätökset

Palkin kimmoteorian mukaiset voimasuureet ja siirtymät muuttuvat oleellisesti, kun täysin jäykäksi tai nivelelliseksi oletettujen liitosten todelliset kiertojäykkyydet otetaan huomioon.

Liitosten osittaisen jäykkyyden hyödyntäminen palkin kantokyvyssä edellyttää

yleensä plastisuusteorian soveltamista, jolloin liitosten kiertymäkyky on tarkistettava. Plastisuusteorian mukaisessa tarkastelussa osittain jäykät liitokset voivat muuttaa nivelten syntyjärjestyksen päinvastaiseksi kuin on totuttu..

Tarkastelemalla päästään lineaarisilla kiertojousilla tuetulle palkille johdettuja lausekkeita voidaan todeta, että jopa näin yksinkertaisen rakenteen tarkka analysointi osittain jäykkien liitosten tapauksessa on hankalaa.

Lähdeluettelo

- [1] Jones, S.W. Kirby, P.A. Nethercot, D.A. 1983. The Analysis of Frames with Semi-Rigid Connections - A State-of-the-Art Report. J. of Constructional Steel Research 3, 2, s. 1-13.
- [2] Pajanne Kari. 1993. Teräsrakenteiden osittain jäykät liitokset - Kirjallisuuskatsaus. Teräsrakennetekniikan erikoistyö, TKK. (Julkaisematon)
- [3] Davison, J.B. Kirby, P.A. Nethercot, D.A. 1987. Rotational Stiffness Characteristics of Steel Beam-to-Column Connections. J. of Constructional Steel Research 8, s. 17-54.

Kari Pajanne, DI
Teknillinen korkeakoulu
Teräsrakennetekniikka