

LINEAARISESTI MUUTTUVALLA NORMAALIVOIMALLA KUORMITETUN SAUVAN NURJAHDUS

Markku Heinisuo

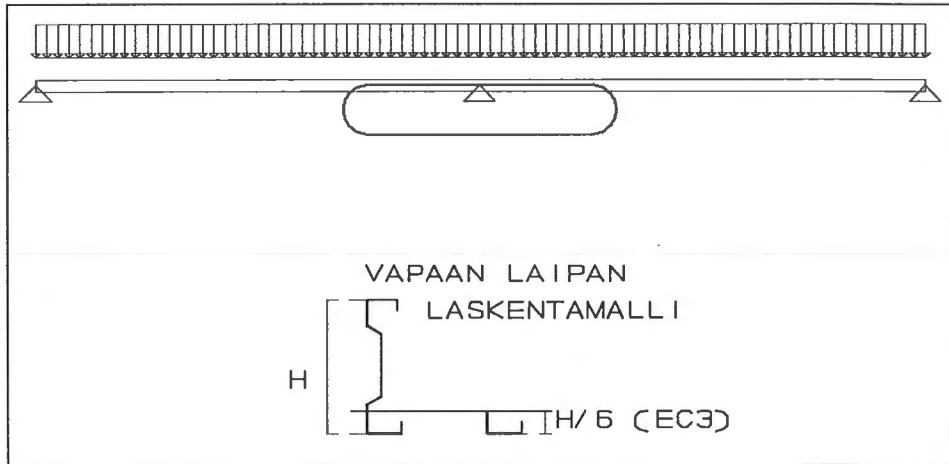
Rakenteiden Mekaniikka, Vol.26
No 4, 1993, pp. 25-37

Tiivistelmä: Artikkelissa esitetään tasonurjahdustarkastelu niveltuetoille sauvalle, kun normaalivoima muuttuu lineaarisesti sauvan akselin suunnassa. Sauva voi olla tasajäykkä tai jäykkyys voi muuttua paloittain (kaksi jäykkyyttä). Laskennassa otetaan huomioon mahdollinen kimmoinen alusta. Ratkaisumenetelmänä käytetään elementtimenetelmää. Tulokset esitetään käytännön mitoitus varten suhteellisina nurjahduspituuksina.

JOHDANTO

Käytännön rakenteissa esiintyy usein kuormitustapaus, jossa sauvan pituussuuntainen normaalivoima muuttuu lähes lineaarisesti. Tällaisia tapauksia on esimerkiksi jatkuvan ristikon alapaarre ja jatkuvan orren alalaipan osa keskituen molemmin puolin (kuva 1). Ristikon sauvavoimat muuttuvat solmuissa, joten ristikon paarteen mitoitukseen esitetty menetelmä on varsin likimääräinen. Jatkuvan palkin sivusuunnassa tukemattoman alalaipan stabiiliutta tarkastellaan usein olettamalla alalaippa tai sopiva osa palkin alareunaa muusta rakenteesta irralliseksi sauvaksi, jota muu osa rakennetta tukee kimmoisesti (kuva 1). Kun palkin kuormituksena on suhteellisen tasan jakautunut kuormitus, niin tämän irrallisen palkin osan kuormitus on lähes lineaarinen normaalivoima keskituen lähellä. Sama tilanne on jatkuvan ristikon alapaarteella, joka on usein tukematon sivusuunnassa tukien välillä. Jatkuvan

sandwich-palkin alapaarteen paikallista nurjahdusta voidaan tarkastella esitetyllä teorialla. Sandwich-palkin ydin on kimmainen alusta paarteelle. Vakio-omallapainolla kuormitetulle pilarille kuormitusoletus on tarkka.



Kuva 1. Jatkuvan orren alalaipan lineaarinen normaalivoimakuormitus keskituen alueella.

Muu rakenne tukee tätä irrallista osaa kimmoisesti. Yleensä oletetaan konservatiivisesti, että muu osa rakennetta ei tue puristettua osaa lainkaan. Jatkuvan palkin tapauksessa palkin uuma ja muu yläpuolinen rakenne aiheuttaa joustavan tuen irralliselle alaosalle sivusuunnassa. Tämä jousto voidaan laskea tarkastelemalla poikkileikkausta kehänä. Ympäröivien rakenteiden (uuma + muut yläpuoliset rakenteet) vaikutus saadaan selville tarkastelemalla riittävän laajaa kokonaisuutta. Uusimmissa suunnitteluohjeissa on annettu osittain kokeisiin perustuvia arvoja tälle joustokertoimelle $1/1$, kun palkki on teräksinen kevytors, jonka ylälaippa on tuettu sivusuunnassa katon ohutlevyprofiiliin. Jatkuvan ristikon tapauksessa sivusuuntaisen tuennan aiheuttaa uumasauvojen ja

yläpuolisten rakenteiden yhdistelmä. Tämä tuenta on diskreetti ja se toimii vain uumasauvojen kohdilla.

Lineaarisella normaalivoimalla kuormitetun pilarin mitoitus perustuu käsilaskennassa käsitteeseen nurjahduspituus. Nurjahduspituuden perusteella lasketaan hoikkuus ja tarkistetaan poikkileikkauksen kapasiteetti rasitetuimmassa kohdassa. Kapasiteettitarkastelussa otetaan luonnollisesti huomioon kaikki vaikuttavat jännitykset. Esimerkiksi ristikon alapaarteeseen saattaa kohdistua paitsi koko ristikon taivutuksesta aiheutuvia aksiaalivoimia myös paikallisesta kuormituksesta aiheutuvia taivutusrasituksia. Käytännössä kapasiteettitarkistus tehdään normien yhteisvaikutuskaavoilla, jolloin näiden kaavojen taustalla on jännitystarkastelu, eli rakenteen jännitykset pyritään pitämään tietyissä rajoissa. Normien mitoituskaavat on vain "naamioitu" nurjahduskaavojen muotoon, jotta mitoitus olisi helpompaa.

Seuraavassa keskitytään yksinkertaiseen tapaukseen, jossa tarkastellaan paloittain (kaksi jäykkyyttä sauvan matkalla) tasajäykkää sauvaa, jota kuormittaa lineaarisesti nolasta täyteen arvoonsa kasvava normaalivoima. Lisäksi tarkastellaan kimmoisen rakenteen tasonurjahdusta, joka voidaan kuvan 1 tapauksessa ymmärtää nurjahdukseksi pois kuvan tasosta. Rakenteen alaosan normaalijännitysten resultantin jakauma on lähes lineaarinen koko rakenteen taivutusmomentin nolakkohdan ja keskituen välillä. Materiaalin säästämiseksi tukialueella vahvistetaan usein profiilia, joten tämä otetaan seuraavassa tarkastelussa huomioon. Tärkeä erikoistapaus on se, jossa profiilia ei muuteta valmisteknisistä syistä, vaan profiili on sama koko tarkasteltavalla matkalla.

Edellä kuvattu tapaus on erikoistapaus siitä, kun profiilin tuenta on hyvin heikko ja sitä ei oteta huomioon. Tässä käsitellään myös tapaus-ta, jossa sauva on tuettu jatkuvasti ja kimmoisesti koko matkaltaan. Oletetaan, että kimmainen tuenta ei muutu sauvan matkalla. Tällainen tilanne on käytännössä esimerkiksi jatkuvan kevytorren taivutustapauksessa. Jatkuvan tuennan muodostaa yläpuolinen profiloitu ohutlevy, liitos ohutlevyyden sekä kevytorren uuma. Jos kevytorsin on rajoitettu tuella, niin uuman tukeva vaikutus kasvaa, mutta yläpuolisen ohutlevyn vaikutus ei kasva, koska tätä ei yleensä vahvisteta. Näin menetellen ollaan varmallalla puolella, kun kevytorren alalaipan nurjahduksessa sivulle päin kimmoista tukea ei muuteta, vaikka kevytorsin olisikin rajoitettu. Uuman ja yläpuolisten rakenteiden vaikutukset alaosan sivuttaistukeen ovat yleensä samaa suuruusluokkaa. Tuenta oletetaan Winkler-tyyppiseksi eli tuennan viereisten pisteiden välillä ei ole mitään kytkentää ja tuen oletetaan käyttäytyvän samalla lailla kuormituksen suunnasta riippumatta.

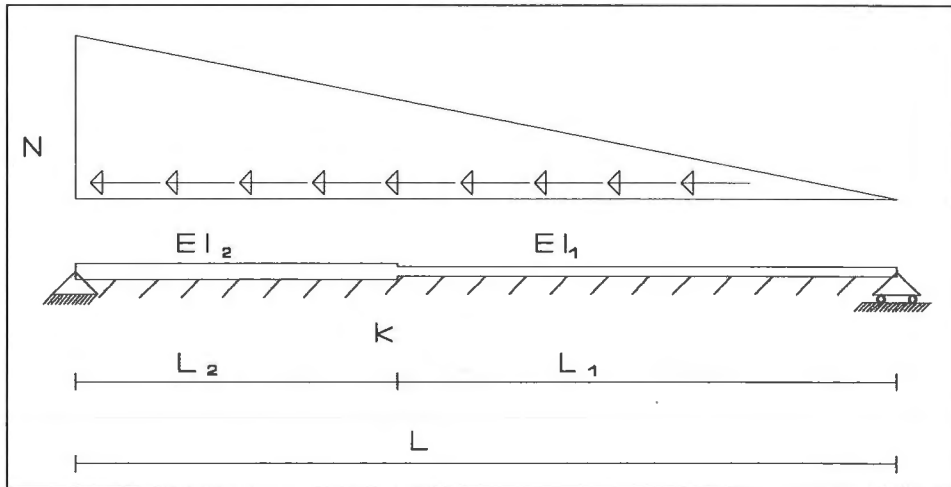
Reunaehtotapauksena tarkastellaan vain haarukkalaakeroitua sauvaa. Saatuja tuloksia voidaan soveltaa varovasti myös muille reunaehtotapauksille. Alustavat laskelmat osoittivat, että ainakin toisesta päästä jäykästi tuetulle ja toisesta päästä haarukkalaakeroidulle sauvalle saadut tulokset olivat konservatiivisia.

Käsitellään kuvan 2 tasonurjahdustapauksista kimmoisen alustan kanssa ja ilman sitä. Kuvassa 2 EI on taivutusjäykkyys, L sauvan tai sauvan osan pituus, N normaalivoima sauvan päässä ja k alustan jäykkyys. Probleema on sangen yksinkertainen ja helpohkosti ratkaistavissa tietokoneella likimäärin. Jopa analyyttinen ratkaisu tehtävälle saattaa

löytyä. Kuten edellä on todettu, niin kyseinen tehtävä on käytännön kannalta sängen tärkeä. Normien mukaista mitoitusta varten tulokset esitetään nurjahduspituuksina vertaamalla saatua tulosta vastaavan Eulerin tapauksen nurjahduspituuteen.

Ratkaisumenetelmänä käytetään elementtimenetelmää. Kyseessä on tasotapaus, ja elementteinä käytetään kuuden vapausasteen palkkielementtiä, jossa solmujen välistä taipumaa interpoloidaan kolmannen asteen muotofunktiolla ja aksiaalista siirtymää lineaarisella muotofunktiolla. Kimmoinen alusta mallinnetaan poikittaisilla nivelpäisillä sauvaelementeillä, joiden jäykkyyttä säätämällä saadaan alustalle erilaisia kuvauksia. Elementtijako valitaan riittävän tiheäksi (h-versio), jotta saatu tulos on piirtämistarkkuuden rajoissa oikea.

Vastaavia probleemoita on kirjallisuudessa ratkaistu monilla tavoilla. Energiamenetelmät ovat olleet sängen suosittuja. Timoshenko ja Gere esittävät yhden erikoistapauksen ratkaisun /2/. Käsikirjoissa on myös ratkaistuna useita tapauksia (esim. /3/), jotka perustuvat energiamenetelmiin. Näiden ratkaisujen tarkkuus eroaa usein lähes 30% tarkemmista ratkaisuista. Myös teräsrakenteiden uuden Euronormin /1/ likikaavat perustuvat energiamenetelmään /4/. Näiden antamat tulokset näyttävät sängen konservatiivisilta ainakin kevytorsille sovellettuina /5/. Myös muut mitoitustaulukot /6/ perustuvat yleisesti energiamenetelmiin.

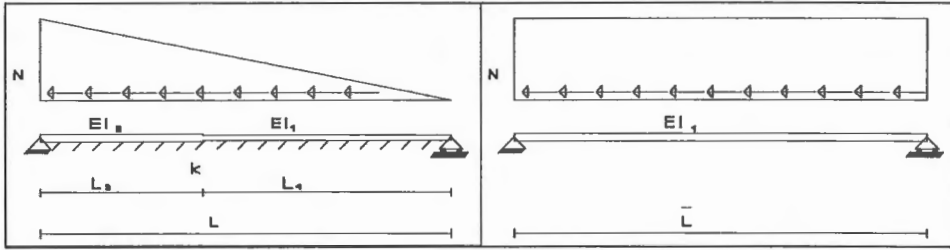


Kuva 2. Esimerkitapauksena tarkasteltu sauva.

Jos kuormitus on paloittain vakio, niin tehtävälle löytyy helpohkosti analyttinen ratkaisu. Näitä tehtäviä on totuttu ratkomaan stabiilisuusteorian oppikurssien laskuharjoituksissa. Tarkkoja analyttisiä tuloksia tähän erikoistapaukseen erityisesti ilman kimmoista alustaa on julkaistu laajasti (esim. /7/).

TEHTÄVÄ JA SEN RATKAISU

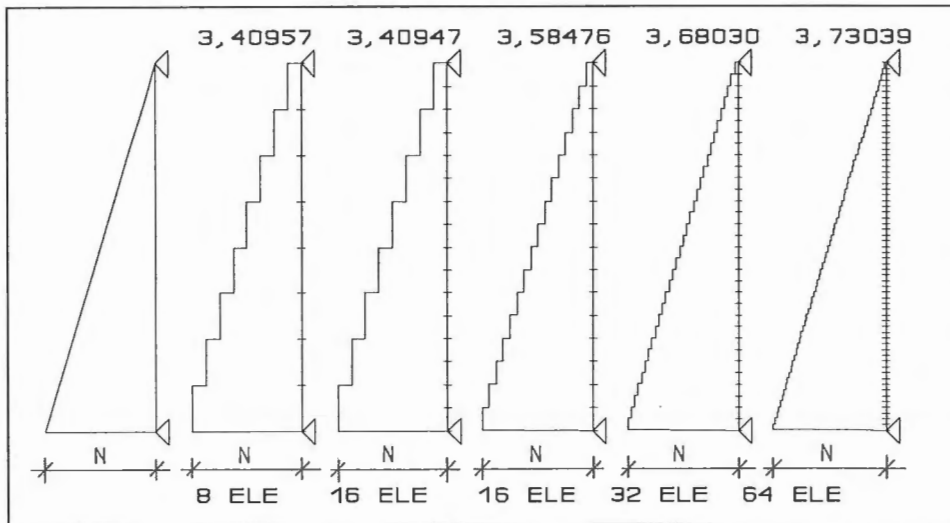
Seuraavassa on tavoitteena ratkaista kuvassa 2 esitetylle sauvalle nurjahduspituus. Nurjahduspituus määritellään siten, että kuvan 3 sauvojen tasonurjahduskuormitukset ovat samat.



Kuva 3. Ekvivalenttisen nurjahduspituuden (\bar{L}) määritelmä.

Lineaarisesti muuttuva normaalivoima on estimoitu porraskäyrällä. Sauva on jaettu tasavälein elementteihin ja kuormitus annettu solmuihin aksiaalisina pistevoimina. Elementtijakoa muuteltiin ja tulokset kirjattiin. Lopullinen malli valittiin virhetarkastelun perusteella, joka tehtiin tasavahvalle sauvalle ilman kimmoista alustaa. Kuvassa 4 on esitetty testatut mallit ja niiden antamat tulokset. Numeroarvot on laskettu lähtötiedoilla $L = 10 \text{ m}$, $N = 100 \text{ kN}$, $E = 210000 \text{ MPa}$ ja $I = 969 \text{ cm}^4$. Kuvassa 4 on esitetty alimmat ominaisarvot tasonurjahduksille, eli kuormituskertoimet, joilla kuvan kuormitukset on kerrottava, jotta pilarit nurjahtavat. Laskelmat on tehty ohjelmalla KPM-TERÄS.

Kuvan 4 tuloksista nähdään, että virhe, joka taipuman estimoinnissa tehdään on huomattavasti pienempi kuin kuormituksen estimoinnissa tehty. Jos kuormitus olisi tasaisempi kuin tässä tarkasteltu, niin suhteellisen hyviä tuloksia saataisiin huomattavasti harvemmillä elementtijaolla kuin tässä käytetyssä lopullisessa mallissa. Edellä olevat päätelmät voidaan tehdä, kun verrataan tuloksia, jotka on saatu samalla kuormituksen estimaatilla käyttäen 8 tai 16 tasapitkää elementtiä. Tässä käytettiin vain tasapitkiä elementtejä, koska niitä on helppo generoida malliin.



Kuva 4. Testipilarit ja niiden nurjahduksen kuormituskertoimet.

Kuvan 4 tuloksista nähdään myös, että virhe syntyy pääosin kuormituksen estimoinnista. Lineaarinen kuormitusfunktio on korvattu porraskuormitusfunktiolla. Virhe on tällöin suoraan verrannollinen elementtijakoon. Lähes samaan tulokseen päädytään myös tarkastelemalla kuvan 4 tuloksia. Olettamalla, että virhe on verrannollinen elementin pituuden potenssiin r saadaan seuraavat tulokset.

$$\frac{\lambda_{cr2} - \lambda_{cr1}}{\lambda_{cr2}} = t * L_{ele}^r \Rightarrow$$

$$a: \frac{3,584764 - 3,409574}{3,584764} = t * 1250^r$$

$$b: \frac{3,680303 - 3,584764}{3,680303} = t * 625^r$$

$$c: \frac{3,730398 - 3,680303}{3,730398} = t * 312,5^r$$

$$a \& b \Rightarrow 1,8825 = 2^r$$

$$b \& c \Rightarrow 1,9325 = 2^r$$

$$\Rightarrow r = 0,9126$$

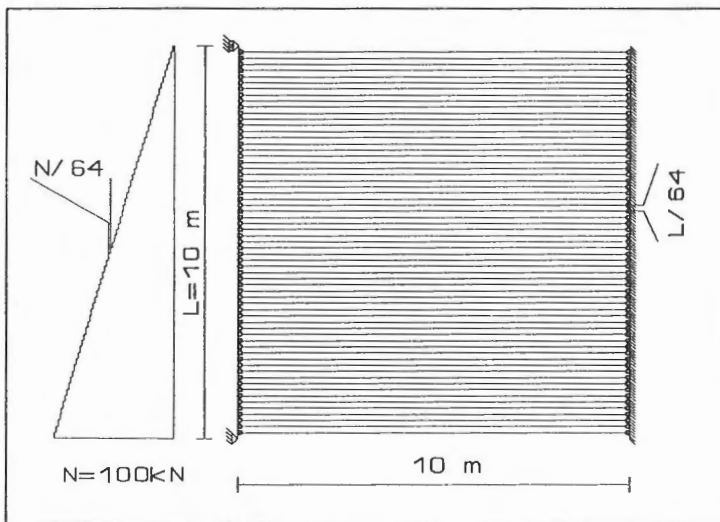
$$\Rightarrow r = 0,9505$$

Edellä olevan perusteella voidaan arvioida, että jakamalla sauva 64 elementtiin saadaan tulos, jossa virhe on alle 1%. Tähän tulokseen päädytään, kun verrannollisuuskerroin t ratkaistaan ($r=1$) eo yhtälöstä ja ekstrapoloidaan.

$$\frac{\lambda_{cr} - 3,73040}{\lambda_{cr}} = \frac{0,01343}{312,5} * 156,25 \Rightarrow$$

$$\lambda_{cr} = 3,7556 \Rightarrow N_{cr} = 375,56 \text{ kN}$$

Seuraavassa on oletettu, että virhetarkastelu pätee myös muihin laskettuihin tapauksiin. Kuvassa 5 on esitetty lopullinen laskentamalli.



Kuva 5. Lopullinen laskentamalli.

Numeroarvot on laskettu käyttäen lähtötietoja $L = 10 \text{ m}$, $N = 100 \text{ kN}$, $E = 210000 \text{ MPa}$, $I_1 = 969 \text{ cm}^4$, $I_2 = 2096 \text{ cm}^4$ ($I_2/I_1 = 2$), $L_2/L = 0, 0.250, 0.500, 0.750, 1.000$, poikkipalkkien $A = 1.513E-11 \text{ m}^2, 1.513E-09 \text{ m}^2, 1.513E-07 \text{ m}^2, 1.513E-05 \text{ m}^2$, poikkipalkkien $I = 1 \text{ m}^4$. Tulokset voidaan esittää dimensiottomien muuttujien avulla. Tulokset on esitetty näin taulukossa 1 ja kuvassa 6. Nurjahduspituus on laskettu eo. nurjahduspituuden määritelmän mukaan.

Taulukko 1. Nurjahduskertoimet λ_{cr} ja suhteelliset nurjahduspi-
tuudet.

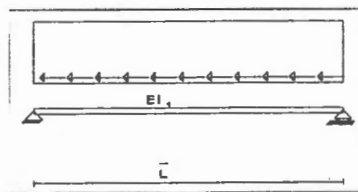
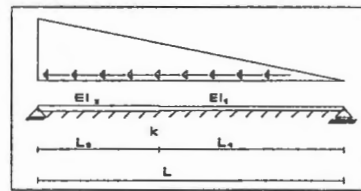
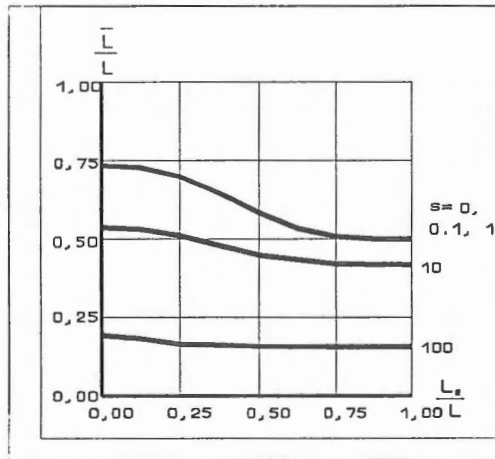
| $s = \sqrt{\frac{k \cdot L^4}{E \cdot I_1}}$ | 0,0 | 1,0 | 10 | 100 |
|--|-------------|--------------------|--------------|---------------------|
| $\frac{L_2}{L}$ | | | | |
| 0,00 | 3,730/0,733 | 3,766/0,730 | 7,002/0,535 | 53,582/0,193 |
| 0,25 | 4,124/0,697 | 4,162/0,694 | 7,718/0,510 | 73,444/0,165 |
| 0,50 | 5,888/0,584 | <u>5,930/0,581</u> | 9,968/0,448 | <u>79,635/0,158</u> |
| 0,75 | 7,801/0,507 | 7,839/0,506 | 11,407/0,419 | 81,818/0,156 |
| 1,00 | 8,059/0,499 | 8,095/0,498 | 11,495/0,417 | 82,006/0,156 |

ENS. LUKU

$N_{cr}/100 \text{ kN}$

TOINEN LUKU

$$\frac{\bar{L}}{L} = \frac{\pi}{L} * \sqrt{\frac{E \cdot I_1}{N_{cr}}}$$

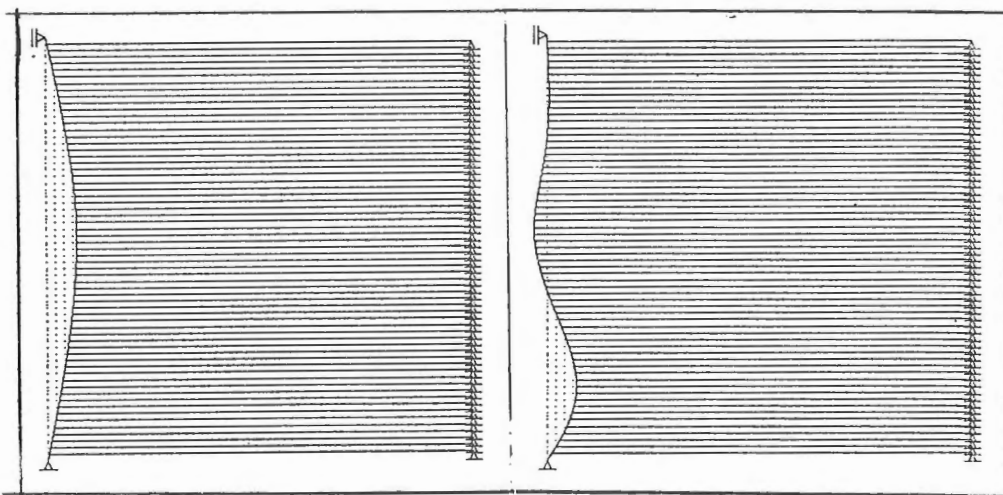


Kuva 6. Ekvivalenttinen nurjahduspi-
tuus \bar{L} .

TULOSTEN TARKASTELUA

Taulukosta 1 ja kuvasta 6 havaitaan, että kaksi löysintä alustaa antavat lähes samat nurjahduskuormitukset kuin tapaus, jossa kimmoista alustaa ei ole ollenkaan. Näissä tapauksissa on yksinkertaisempaa käyttää käytännön sovellutuksissa laskentamenetelmää, jossa alustaa ei oteta lainkaan huomioon. Numerolaskut osoittivat, että normaalin 300 mm korkean sigmaorren vapaa alalaippa on tällainen tapaus. Tällaiselle orrelle saadaan numeroarvot $l_5/L = 1,25$ m, $I = 268400$ mm⁴, $k = 6,66$ kN/m², joista suure $s = 0,54$ eli ollaan kahden löysimmän alustan välillä.

Nurjahdusmuodot osoittivat lisäksi, että kahden suurimman alustajäykkyyden välillä on rajajäykkyys, jolloin nurjahdusmuoto muuttuu yhdestä aallosta useammaksi. Kuvassa 7 on piirrettynä taulukossa 1 alleviivattujen tapauksien nurjahdusmuodot.



Kuva 7. Nurjahdusmuotoja.

Nurjahduskuormitus kasvaa ja toisaalta nurjahduspituus pienenee voimakkaasti kahden jäykimmän tapauksen välialueessa. Taivutusjäykkyydet EI1 ja EI2 vastaavat teräksisiä suorakaideputkia 150*150*5 ja 180*180*6.3 ja kaksi jäykintä alustaa vastaavat noin 3,9*3,9 mm² ja 0,39*0,39 mm² poikkileikkauksisia umpiteräksiä.

KIITOKSET

Kimmokkeen tähän kirjoitukseen sain työskennellessäni VTT-RROY-kevytrunkojärjestelmän mitoitustyöryhmässä. Kiitän myös KPM-Yhtiötä ohjelmankäyttömahdollisuudesta. Rahallisesta tuesta kiitän Suomen Akatemiaa. Tämä kirjoitus kuuluu Akatemian rahoittamaan teräsrakenteiden suunnittelun asiantuntijajärjestelmät tutkimukseen.

LÄHDEKIRJALLISUUS

- /1/ Eurocode No. 3. Design of steel structures. Part 1.3. Cold formed thin gauge members and sheeting. CEN/TC250/SC3-PT1A (Draft for preliminary vote August 1992)
- /2/ Timoshenko S., Gere J., Theory of Elastic Stability, McGraw-Hill, Tokyo 1961
- /3/ Rakennustekniikan käsikirja 1. osa: Yleiset perusteet, Luku 15. Lujuusoppi, Tammi 1969
- /4/ Toma A.W., Soetens F., Research for the mechanical behaviour of cold-formed sections and drafting of design rules, TNO Report BI-87-100

- /5/ Laine M., Avoprofiillisten kylmämuovattujen teräsohutlevyosien mitoitustutkimus, TKK, Rakennus- ja maanmittaustekniikan osasto, Rakennus- ja yhdyskuntatekniikan koulutusohjelma, Diplomityö, 1993
- /6/ Goltermann P., Svensson S.E., Lateral Distortional Buckling: Predicting Elastic Critical Stress, Journal of Structural Engineering, Vol 114, No 7, July, 1988 pp. 1606-1625
- /7/ Thomsen K., Angerskov H., Stalkonstruktioner opgaver og losninger, Polyteknisk Forlag, Lyngby, 1973

Markku Heinisuo, tekn tri
Vanhempi tutkija/Suomen Akatemia
TTKK/Rakennusstatiikka
PL 600
33100 Tampere