

# SUORAKAIDELAATAN SUURTEN TAIPUMIEN JA JÄNNITYSTEN LASKENTA PAINESKUKUORMITUKSESSA

*Kari Ikonen*  
*Valtion teknillinen tutkimuskeskus*  
*Ydinvoimatekniikan laboratorio*

Rakenteiden Mekaniikka, Vol. 26  
No 2 1993, ss. 17 - 34

**TIIVISTELMÄ:** Artikkelissa kuvataan suorakaidelaatan suurten taipumien dynaamista analysointia differenssimenetelmällä. Analyysien käytännöllistä suorittamista varten kehitettiin tietokoneohjelma, jolla voidaan selvittää olemassa olevien ikkunoiden kestävyys sekä mitoittaa asennettavat ikkunat kestävästi räjähdysten aiheuttaman paineaaltokuormituksen. Tietokoneohjelman toimivuus on verifioitu ulkomailla yksilasisilla ikkunoilla tehdyistä kokeista saatujen tulosten avulla. Yksilasisien ikkunoiden ohella myös useampi-lasisien ikkunoiden analysointiin soveltuvan ohjelman käytöstä esitetään pari esimerkkiä.

## JOHDANTO

Räjähdyssonnettomuuksien laajimmalle alueelle ulottuvat vahingot aiheutuvat räjähdysten paineaallon rikkomista ikkunoista. Tavallinen ikkunalasi muodostaa rikkoutuessaan kolmiomaisia teräväreunaisia sirpaleita, jota voivat aiheuttaa lasien lähellä olijoille pisto- ja viiltohaavoja.

Räjähdyksineiden massaräjähdyksistä saatujen kokemusten perusteella on helppo ennustaa etäisyys, joilla räjähdysten paineaalto (shokkiaalto) rikkoo tietyn osuuden ikkunoista. Esimerkiksi 50 % yksilasisista ikkunoista rikkoutuu etäisyydellä, jolla shokkiaallon huippuarvo  $P_s$  on 3 kPa ja 90 % etäisyydellä, jolla  $P_s$  on 6 kPa. Ikkunoiden rikkoutumisen satunnaisuus aiheutuu useasta tekijästä, kuten

- ikkunaruuutujen vaihteleva koko ja paksuus
- ikkunoiden suunta räjähdyspisteen suuntaan nähden
- ruutujen kiinnitystapa puitteisiin
- ruuduissa olevien säröjen koko ja sijainti.

Suomen räjähdystarvikemääräysten mukaan eri tyyppiset rakennukset on sijoitettava niin etäälle varastosta, että ikkunoiden rikkoutumisesta aiheutuva vaara on vähäinen. Räjähd-

dysaineet voivat kuitenkin räjähtää myös muualla. Massaräjähdyksen lisäksi myös kaasuja ja pölyräjähdykset sekä paineastioiden repeämiset synnyttävät paineaallon, joka voi rikkoa ikkunoita. Teollisuuden ohjaamo-, toimisto- ym. rakennusten ikkunat on valmistettava ikkunalasina paremmin painekuormitusta kestävästä ja rikkoutuessaan vähemmän vaaraa aiheuttavasta materiaalista.

USA:n laivaston rakennuslaboratorio NCEL on monivuotisen tutkimusohjelman perusteella päätyneet suosittelemaan räjähdysten kestävien ikkunoiden valmistamista karkaistusta lasista tai polykarbonaatista. Lasin mitoituksen lähtökohtana oli staattisesti kuormitetun laatan taipumakäyrä. Laatan taipuma shokkiaallon dynaamisessa kuormituksessa laskettiin numeerisesti korvaamalla laatta jousi-massasysteemillä. NCEL on vuosina 1986-87 julkaissut käyrästä, joiden avulla voidaan valita yksiläisen karkaistusta lasista tai polykarbonaatista valmistetun ruudun paksuus, kun painekuormituksen huippuarvo ja kesto tunnetaan /1,2/.

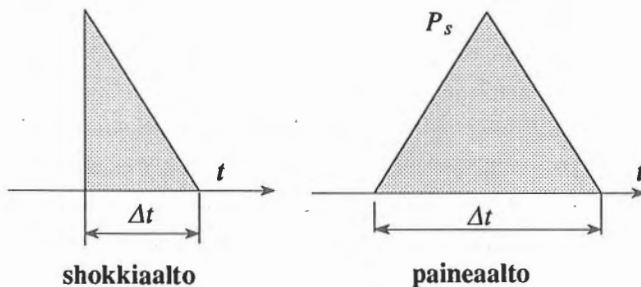
NCEL:n menetelmää ei kuitenkaan voi soveltaa kaksi- ja kolmilasisten ikkunoiden mitoitukseen eikä muille kuin shokkikuormituksille. Tämän vuoksi VTT:ssä on tehty tietokoneohjelma (noin 1000 FORTRAN-lauseetta), jolla voidaan mitoitaa yksi-, kaksi- ja kolmilasiset ikkunat kestävästi ajasta riippuva painekuormitus.

Heikoimman ruutumateriaalin, tavallisen lasin taiputusmurtolujuus dynaamisessa kuormituksessa on luokkaa 70 MPa. Karkaistun lasin taiputusmurtolujuus on lähes kolminkertainen (noin 170 MPa) sen vuoksi, että karkaisuprosessissa pintojen nopeassa jäädytyksessä niihin jää edullinen puristusjännitystilä, jolloin murtumisen alkaminen pinnoissa olevista mikrosäröistä edellyttää suurempaa taiputusjännitystä. Karkaistun lasin pinta-kerrosten puristusjännitystilän kompensoi sisällä vallitseva vetojännitystilä. Tällöin suurissa taipumissa (ohuet lasit), joissa kalvovoimien aiheuttamat jännitykset ovat taiputusmomenttien aiheuttamia jännityksiä suuremmat, keskipinnan alueella olevat mikrosäröt kuormittavat merkittävästi ja karkaistun lasin etu tavalliseen lasiin nähden saattaa vähetä. Ikkunoissa myös käytetyn polykarbonaattilevyn taiputusmurtolujuus on luokkaa 70 MPa.

Eri materiaaleja käytettäessä mitoitus tapahtuu murtojännityksen suhteen varmuuskertoimen ollessa  $n = 2,0 - 2,5$ . Ruudut eivät saa taipua liiaksi (enintään 10 - 15 kertaa ruudun paksuus), koska ne saattavat tällöin irrota karmista. Paineisku sekä paineiskun jälkeinen alipaine on otettava ikkunaruudun kiinnitystavassa huomioon.

## Paineiskukuormitus

Tarkasteltaessa paineen kehittymistä jossakin pisteessä kaasuräjähdyksessä painepulssin maksimi on tyypillisesti luokkaa  $P_s = 5 - 50$  kPa ja kestoaika on  $\Delta t = 0,01 \dots 0,1$  s. Paineiskukuormitusfunktio idealisoidaan tapauksesta riippuen eri tavoin (kuva 1). Seinän suuntaisesti tuleva paineisku etenee äänen nopeudella ikkunan sivulta toiselle. Laatan dynaamista käyttäytymistä karakterisoi taivutusvärähtelyaaltojen etenemisnopeuden ja äänen nopeuden (ilmassa) suhde. Taivutusvärähtelyaaltojen etenemisnopeus on huomattavasti pitkittäisaaltojen (äänen nopeus lasissa  $\sqrt{E/\rho} = \sqrt{75 \text{ GPa}/2500 \text{ kg/m}^3} = 5477 \text{ m/s}$ ) etenemisnopeutta pienempi, mutta kuitenkin äänen nopeuden (ilmassa) luokkaa. Paineiskun tullessa seinän suuntaisesti painetta laatan alueella ei voida olettaa vakioksi. Jos paineiskun etenemisnopeus (äänen nopeus ilmassa) on  $c$  ja tulosuunnan ja ruudun normaalin välinen kulma on  $\theta$ , "pyyhkäisy nopeus"  $v$  laatan yli on  $v = c/\sin\theta$ . Kohtisuorassa paineiskussa ( $\theta = 0$ ), joka yleensä on pahin, paineisku "pyyhkäisee" ikkunan yli tavallaan äärettömän suurella nopeudella ja paine laatan alueella voidaan olettaa vakioksi. Samoin voidaan olettaa lievästi vinossa paineiskussa. Numeerisella laskentamenetelmällä erilaiset kuormitustapaukset voidaan käsitellä.

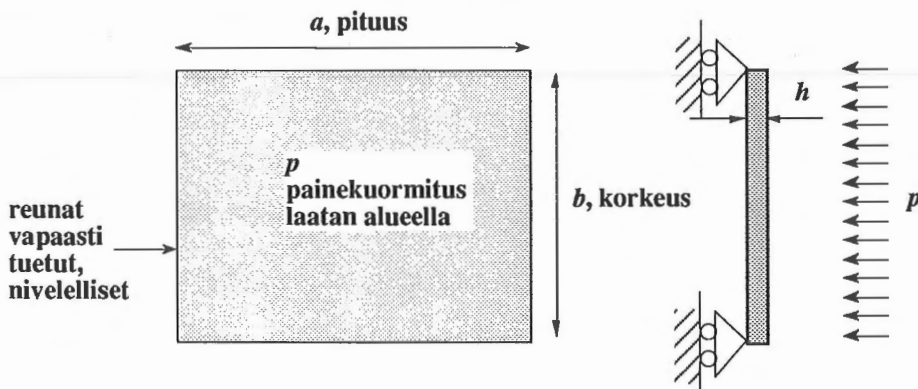


Kuva 1. Paineen aikariippuvuuden erilaisia idealisointitapoja.

## IKKUNALAATAN DYNAAMISEN VASTEEN LASKEMINEN DIFFERENSSIMENETELMÄLLÄ

Laskentamenetelmäksi valittu differenssimenetelmä on nyt tarkasteltavassa tapauksessa erittäin tehokas. Nykyaikana työasemat laskevat yhden kuormitustapauksen läpi muutamassa minuutissa. Aika-askelia tarvitaan tyypillisesti kymmeniä tuhansia. Jokaisella aika-askeleella joudutaan laskemaan mm. useampilaisen ikkunan tapauksessa ruutujen välinen tilavuus välipaineen määrittämistä varten. Kaksinkertainen laskentatarkkuus on osoittautunut UNIX-t työasemia käytettäessä välttämättömäksi.

Ikkunan keskikohdan taipuma kriittisessä painekuormituksessa on tyypillisesti useita kymmeniä millimetrejä, minkä rinnalla seinän ja karmin enintään muutaman millimetrin taipumat voidaan jättää huomioonottamatta ja olettaa alusta täysin peräänantamattomaksi. Kyseessä on siis painekuormitettu nivelellisesti tuettu suorakaidelaatta (kuva 2). Suurin rasitus syntyy ikkunan mittasuhteista ja painekuormituksesta riippuen joko laatan keski-alueelle, sivujen keskelle tai nurkkiin. Jos suurin rasitus syntyy reunan lähelle, reunan epätasaisuudet poistava hionta parantaa kestävyyttä.

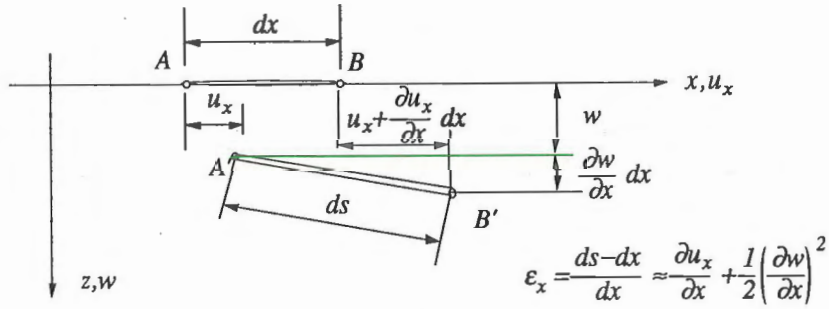


Kuva 2. Nivelellisesti kaikilta reunoiltaan tuettu ikkunalaatta.

Taipuman maksimin  $w_{\max}$  tullessa suuremmiksi kuin luokkaa  $w_{\max} > 0,10 \dots 0,50h$  ( $h$  laatan paksuus) kalvovoimat kantavat osan poikittaiskuormituksesta ja pienten taipumien laattateoria eli ns. KIRCHHOFFIN laattateoria ei ole enää riittävä. Suurten taipumien aiheuttamat venymät laatan keskipinnalla ovat (kuva 3)

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_x^L + \varepsilon_x^{NL} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 = \frac{1}{Eh} (N_x - \nu N_y) \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_y^L + \varepsilon_y^{NL} = \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 = \frac{1}{Eh} (N_y - \nu N_x) \\ \gamma_{xy} &= \gamma_{xy}^L + \gamma_{xy}^{NL} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{2(1+\nu)}{Eh} N_{xy} . \end{aligned} \quad (1)$$

missä  $E$  on kimmokerroin,  $h$  laatan paksuus,  $\nu$  Poissonin vakio ja  $N_x, N_y, N_{xy}$  laatan keskipinnan suuntaiset membraanivoimat. Yläindeksi L viittaa lineaarisiin ja NL epälineaarisiin (nonlinear) venymiin. Membraanivoimat ilmaistaan Airy-tyyppisen jännitys-funktion  $\Phi(x,y)$  avulla samaan tapaan kuin levyteoriassa eli



Kuva 3. Suuren taipuman  $w$  aiheuttama venymä  $\epsilon_x$ .

$$N_x = h \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}$$

$$N_y = h \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}$$

$$N_{xy} = -h \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}. \quad (2)$$

Sijoitetaan nämä yhtälöihin (1) ja derivoidaan sitten yhtälöistä (1) ensimmäinen kahdesti  $y$ :n suhteen, toinen kahdesti  $x$ :n suhteen ja kolmas sekä  $x$ :n että  $y$ :n suhteen. Näin saatujen kahden ensimmäisen yhtälön summasta vähennetään kolmas yhtälö, jolloin siirtymät  $u_x$  ja  $u_y$  eliminoidut ja saadaan yhteensopivuusyhtälö

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = E \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]. \quad (3)$$

Sijoittamalla membraanivoimat (2) laatan suurten taipumien differentiaaliyhtälöön

$$\nabla^4 w = \frac{1}{K} \left( q + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right), \quad (4)$$

missä

$$K = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (5)$$

on laattavakio, tullaan yhtälöön

$$K \left[ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right] = q + h \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right]. \quad (6)$$

Yhtälöt (3) ja (6) yhdessä ovat suurten taipumien perusyhtälöt (von KARMAN, 1910).

Lisäämällä laatan keskipintaa vastaan kohtisuora translaatioinertiavoima kaavasta (6) tulee

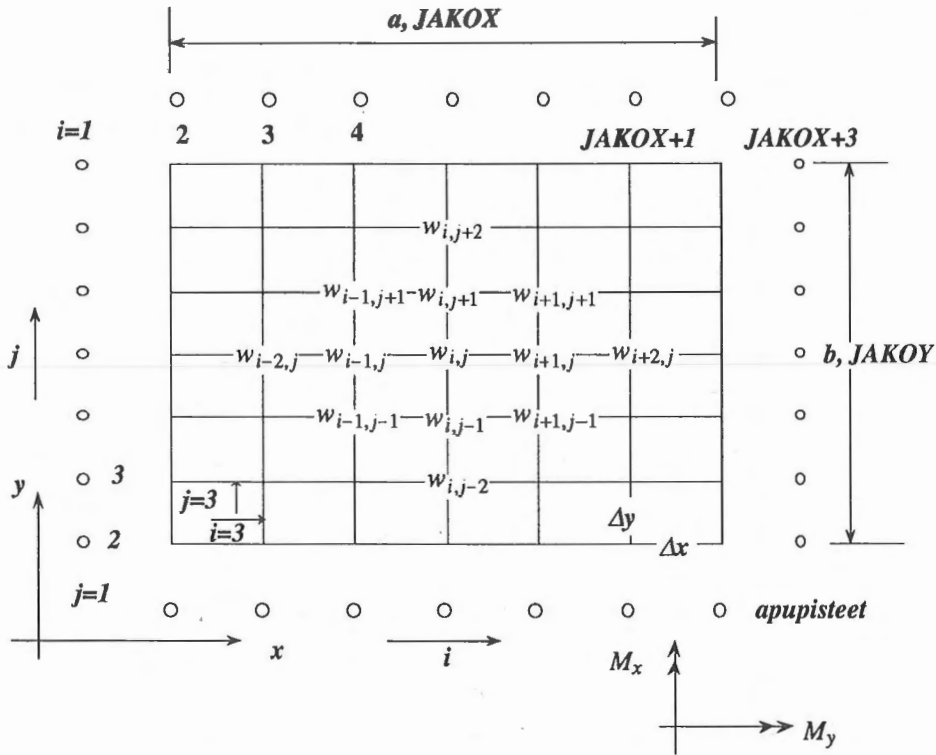
$$\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(x,y,t) - K \left[ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right] + h \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right]. \quad (7)$$

missä  $\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$  ( $\rho$  on laattamateriaalin tiheys,  $h$  laatan paksuus ja  $t$  aika) on inertiakuormitus ja  $q(x,y,t)$  ajasta riippuva tunnettu ulkoinen laatan pintaa vastaan kohtisuora kuormitus. Rotaatioinertiavoimaa ei oteta huomioon, koska laatan paksuus on pieni jänneväliin verrattuna. Laatan keskipinnan suuntaista inertiavoimaa taas ei oteta huomioon, koska keskipinnan suuntaiset siirtymät ovat pieniä taipumiin verrattuna ja keskipinnan suuntaiset heikohkot häiriöaallot etenevät hyvin nopeasti vaikuttamatta merkittävästi huomattavasti hitaampiin poikkittaisvärähtelyihin. Jos taipuma  $w$  on pieni, yhtälöstä (7) jää alempi rivi pois. Yhtälön (7) vasemman puolen aikaderivaatta kirjoitetaan muotoon

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{w_{i,j}^{t+\Delta t} - 2w_{i,j}^t + w_{i,j}^{t-\Delta t}}{(\Delta t)^2}. \quad (8)$$

Tämä mahdollistaa uuden ajanhetken taipuman  $w_{i,j}^{t+\Delta t}$  laskemisen eksplisiittisesti yhtälöstä (7) laatan reunojen sisällä oleville differenssipisteille, kun yhtälön (7) oikean puolen arvo lasketaan ennen uutta ajanhetkeä. Tämän jälkeen kaavasta (3) lasketaan uuden ajanhetken jännitysfunktion  $\Phi$  arvot, minkä jälkeen seuraavan ajanhetken taipumat lasketaan kaavasta (7) jne. Paikkaderivaattojen ilmaisemiseksi differenssien avulla laatta jaetaan kuvassa 4 esitetyllä tavalla suorakulmaiseen differenssiverkoston. Yhtälön (7) oikean puolen taipuman toiset derivaatat pisteelle  $i,j$  ovat

$$\begin{aligned} \frac{\Delta^2 w}{\Delta x^2} &= \frac{w_{i-1,j} - 2w_{i,j} + w_{i+1,j}}{(\Delta x)^2} \\ \frac{\Delta^2 w}{\Delta y^2} &= \frac{w_{i,j-1} - 2w_{i,j} + w_{i,j+1}}{(\Delta y)^2} \\ \frac{\Delta^2 w}{\Delta x \Delta y} &= \frac{w_{i-1,j-1} - w_{i+1,j-1} - w_{i-1,j+1} + w_{i+1,j+1}}{4\Delta x \Delta y}. \end{aligned} \quad (9)$$



Kuva 4. Laatan differenssiverkko ja laattayhtälössä pisteeseen  $i, j$  kytkeytyvät lähipisteet.

Neljännet derivaatat ovat

$$\frac{\Delta^4 w}{(\Delta x)^4} = \frac{6w_{i,j} - 4(w_{i-1,j} + w_{i+1,j}) + w_{i-2,j} + w_{i+2,j}}{(\Delta x)^4}$$

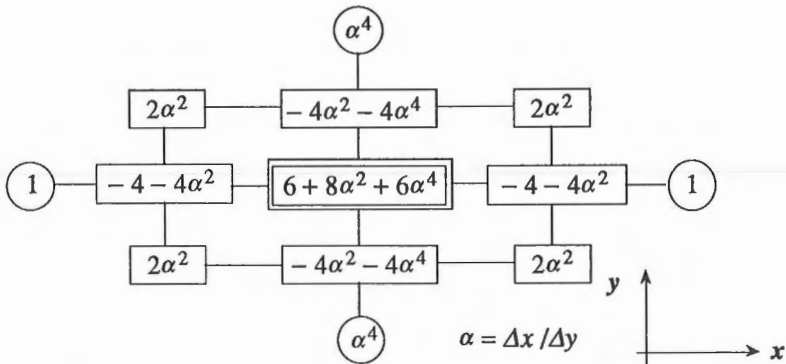
$$\frac{\Delta^4 w}{(\Delta y)^4} = \frac{6w_{i,j} - 4(w_{i,j-1} + w_{i,j+1}) + w_{i,j-2} + w_{i,j+2}}{(\Delta y)^4}$$

$$2 \frac{\Delta^4 w}{(\Delta x)^2 (\Delta y)^2} = \frac{8w_{i,j} - 4(w_{i,j-1} + w_{i-1,j} + w_{i+1,j} + w_{i,j+1}) + 2(w_{i-1,j-1} + w_{i+1,j-1} + w_{i-1,j+1} + w_{i+1,j+1})}{(\Delta x)^2 (\Delta y)^2} \quad (10)$$

Vastaavat lausekkeet pätevät tietysti myös jännitysfunktiolle  $\Phi$  vaihtamalla kaavoissa (9) ja (10)  $w$ :n paikalle  $\Phi$ . Merkitsemällä  $\alpha = \Delta x / \Delta y$  kaavoissa (3) ja (7) esiintyvien neljänsten derivaattojen summia voidaan havainnollistaa kuvan 5 "differenssimolekyylillä" (pä-

tee sekä taipumalle  $w$  että jännitysfunktiolle  $\Phi$ , vastaavat joskin yksinkertaisemmat differenssimolekyylit voidaan kirjoittaa myös toisille derivaatoille).

$$\left( \frac{\Delta^4}{(\Delta x)^4} + 2 \frac{\Delta^4}{(\Delta x)^2 (\Delta y)^2} + \frac{\Delta^4}{(\Delta y)^4} \right) (\Delta x)^4 =$$



Kuva 5. Neljänsien derivaattojen summan (kaavat 3 ja 7) "differenssimolekyylä".

Soveltaessa kaavoja (3) ja (7) vuorotellen taipumien ja jännitysfunktion arvojen laskemiseen uusi taipuman arvo ratkeaa suoraan yhtälöitä (7) uuden ajanhetken taipuma-arvojen kytkeytymättä toisiinsa (eksplisiittinen laskentamenetelmä). Sen sijaan jännitysfunktion uuden ajanhetken arvot kytkeytyvät toisiinsa, mikä johtaa lineaariseen yhtälöryhmään. Sen kerroinmatriisi syntyy, kun kaavan (3) vasen puoli kirjoitetaan kaikille laatan reunojen sisäpuolelle jääville differenssipisteille. Kerroinmatriisi on pelkästään differenssiväliden ( $\Delta x$  ja  $\Delta y$ ) funktio ja ajan suhteen vakio sekä symmetrinen (kuvan 5 molekyylä symmetrinen keskelle piirretyn pysty akselin suhteen). Tämän vuoksi kerroinmatriisi  $[A]$  voidaan kaavan (3) oikean puolen arvoja tuntematta redusoida Choleskyn dekompositiomenetelmällä muotoon  $[A] = [S]^T [S]$ , jolloin laskenta nopeutuu merkittävästi verrattuna suoran Gaussin eliminaation käyttöön.

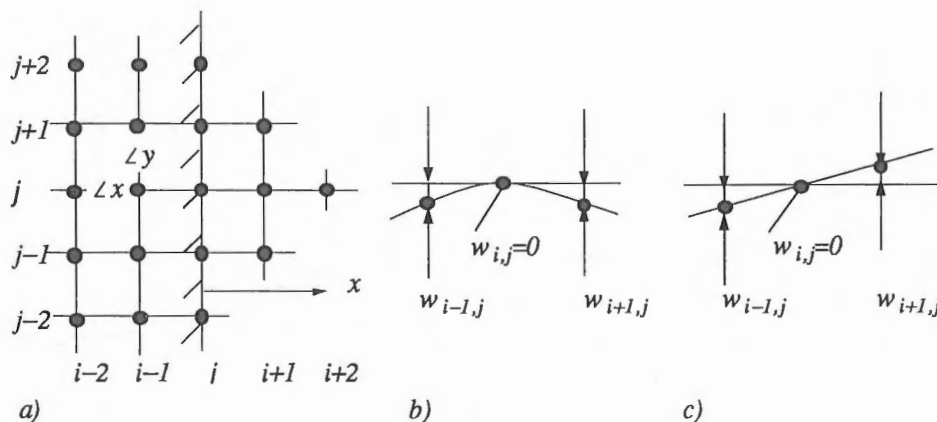
### Reunaehdot

Ennen paineiskua levossa olevan jännityksettömän laatan kaikissa differenssipisteissä  $w = \Phi = 0$ . Taipuman  $w$  reunaehdot otetaan huomioon kuten pienten taipumien analyysissä. Jotta taivutusmomentti olisi nolla reunalla, tulee ulkopuolisen apupisteen taipuman



olla yhtä suuri mutta erimerkkinen kuin sisällä olevan differenssipisteen. Jännitysfunktion  $\Phi$  suhteen todetaan, että laatan ikkunaruuuden kiinnitystavasta johtuen eli reunojen ollessa vapaat keskipinnan suuntaisista kalvovoimista voimat  $N_x, N_y, N_{xy}$  ovat nollia laatan reunoilla, mistä seuraa, että laatan reunalla jännitysfunktio  $\Phi = 0$  ja sen derivaatat reunan suunnassa ja reunan normaalin suunnassa häviävät. Derivaattoja koskevat ehdot toteutuvat, kun laatan ulkopuolella olevien apupisteiden  $\Phi$ -arvot ovat jatkuvasti nollia. Huomattakoon, että kaavojen (3) ja (7) oikeiden puolien hakasulkulausekkeet häviävät taipumattomina pysyvillä ulkoreunoilla.

Taipumareunaehtoien huomioonottamisessa käytetään laatan ulkopuolisia apupisteitä. Tarkastellaan reunaa, jolla  $x = \text{vakio}$ . Reunan, jolla  $y = \text{vakio}$ , tarkastelu käy vastaavasti.



Kuva 6. Laatan reuna (a), jäykkä tuenta (b) ja vapaa tuenta (c).

Vapaasti tuetulla reunalla (kuva 6c), jollaisena ikkunaruuuden kiinnitystapaa voidaan pitää, on  $w = 0$  ja momenttiehdosta

$$M_x|_{\text{reunalla}} = -K \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -K \frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} = 0 \quad (11)$$

saadaan apupisteen  $(i+1, j)$  taipumaksi

$$w_{i+1,j} = -w_{i-1,j} \quad (12)$$

Jäykästi tuetulla reunalla (kuva 6b), jota ei nyt tarkastella, seuraa kallistumisen estymisestä  $w_{i+1,j} = w_{i-1,j}$ .

Kun taipumat  $w_{i,j}$  on ratkaistu, momentit lasketaan kaavoista

$$\begin{aligned}
 M_x &= -K\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = -K\left(\frac{w_{i-1,j} - 2w_{i,j} + w_{i+1,j}}{(\Delta x)^2} + \nu \frac{w_{i,j-1} - 2w_{i,j} + w_{i,j+1}}{(\Delta y)^2}\right) \\
 M_y &= -K\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = -K\left(\frac{w_{i,j-1} - 2w_{i,j} + w_{i,j+1}}{(\Delta y)^2} + \nu \frac{w_{i-1,j} - 2w_{i,j} + w_{i+1,j}}{(\Delta x)^2}\right) \\
 M_{xy} &= -(1-\nu)K \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -(1-\nu)K \frac{w_{i+1,j+1} - w_{i-1,j+1} - w_{i+1,j-1} + w_{i-1,j-1}}{4\Delta x \Delta y}
 \end{aligned} \tag{13}$$

ja taiputuksesta johtuvat jännitykset laatan pinnalla kaavoista

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= \frac{M_y}{h^2/6} \\
 \sigma_y &= \frac{M_x}{h^2/6} \\
 \tau_x &= \frac{M_{xy}}{h^2/6} .
 \end{aligned} \tag{14}$$

Suurten taipumien tapauksessa taiputusmomenttien aiheuttamiin jännityksiin lisätään kaavoista (2) saatavat kalvojännitykset

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= \frac{N_x}{h} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \\
 \sigma_y &= \frac{N_y}{h} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \\
 \tau_{xy} &= \frac{N_{xy}}{h} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} .
 \end{aligned} \tag{15}$$

Yhdistetyn jännityksen laskemiseksi lasille sovelletaan usein maksimipääjännityskriteeriä. Maksimipääjännitys lasketaan kaavasta

$$\sigma_{max} = \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} . \tag{16}$$

## Tukivoimien laskenta

Karmien mitoitusta varten tarvittavien tukivoimien laskennan lähtökohta ovat ns. redusoi-  
tujen tai korvikeleikkausvoimien laskukaavat

$$\begin{aligned}\bar{Q}_x &= -K \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] \\ \bar{Q}_y &= -K \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right].\end{aligned}\quad (17)$$

Taipumien ollessa estettyjä laatan reunalla on  $y$ -akselin suuntaisilla sivuilla  $\partial w / \partial y = 0$  ja  $x$ -akselin suuntaisilla sivuilla  $\partial w / \partial x = 0$ , joten tukivoimien laskukaavat (17) yksinker-  
taistuvat muotoon

$$\begin{aligned}\bar{Q}_x &= -K \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \\ \bar{Q}_y &= -K \frac{\partial^3 w}{\partial y^3}.\end{aligned}\quad (18)$$

Kolmannen derivaatan muodostamisessa reunan differenssipisteelle reunan sisäpuolelta  
tarvitaan kaksi ja ulkopuolelta kaksi differenssipistettä. Koska vapaasti tuetulla reunalla  
taipuma on antimetrisen reunapisteen suhteen, ovat ulkopuolisten apupisteiden taipumat  
yhtä suuria mutta erimerkkisiä kuin vastaavalla etäisyydellä reunasta olevien sisäpisteiden  
taipumat (vrt. laatan taipuman Fourier-sarjaratkaisu). Reunapisteen  $i, j$  tukivoimien las-  
kukaavat (18)  $x$ - ja  $y$ -akseleihin yhtyvillä laatan sivuilla ovat differenssimuodossa

$$\begin{aligned}\bar{Q}_x &= K \frac{2w_{i+1, j} - w_{i+2, j}}{(\Delta x)^3} \quad (y\text{-akselilla}) \\ \bar{Q}_y &= K \frac{2w_{i, j+1} - w_{i, j+2}}{(\Delta y)^3} \quad (x\text{-akselilla}).\end{aligned}\quad (19)$$

Vastaavasti kahdelle muulle sivulle saadaan (huomattava, että laattateoriassa positiivisilla  
reunoilla vaikuttava positiivinen leikkausvoima vaikuttaa ulkoisen kuormituksen  $q$  suun-  
taan ollen negatiivinen tukireaktiovoima)

$$\bar{Q}_x = K \frac{2w_{i-1,j} - w_{i-2,j}}{(\Delta x)^3} \quad (\text{y-akselin suutaisella oikealla sivulla})$$

$$\bar{Q}_y = K \frac{2w_{i,j-1} - w_{i,j-2}}{(\Delta y)^3} \quad (\text{x-akselin suutaisella yläsivulla}). \quad (20)$$

### Aika-askleen valinnasta

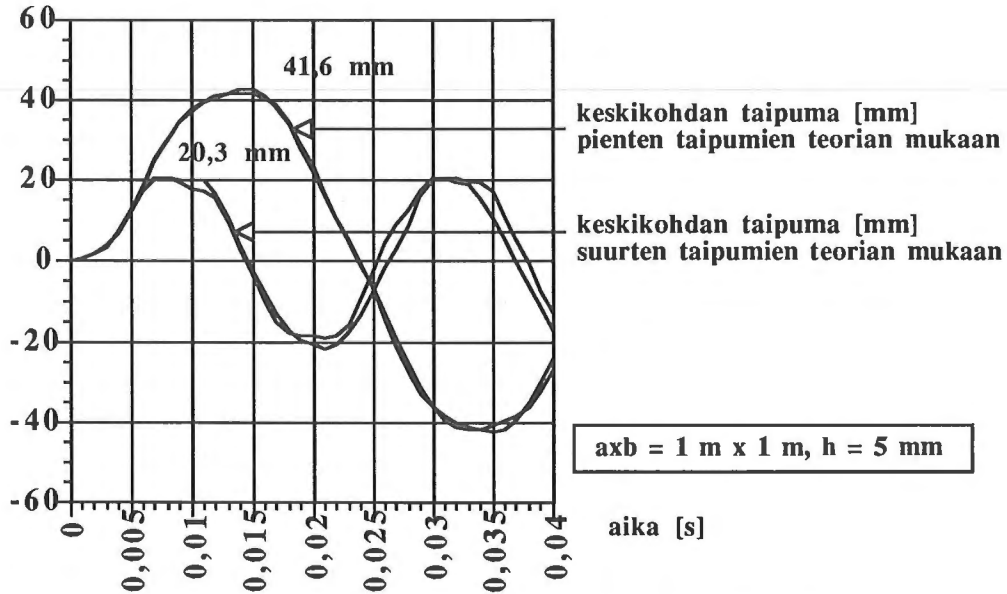
Jotta nyt sovellettu eksplisiittinen laskentamenetelmä olisi stabiili, aika-askleen on oltava riittävän pieni. Pienten taipumien tapauksessa stabiiliusehto eli kriittinen aika-askel on  $\Delta t < \Delta x / \sqrt{E/\rho}$ .

$$\Delta t \leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3(1-\nu^2)\rho}{E}} \frac{1}{h} \frac{1}{\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2}}. \quad (21)$$

Jos laskentamallissa olisivat mukana myös keskipinnan suuntaiset värähtelyt, joihin sovellettaisiin vastaavaanlaista eksplisiittistä keskeisdifferenssiformulaatiota kuin taipuvuusvärähtelyihin, tarvittava aika-askelvaatimus laskettaisiin kaavoista  $\Delta t < \min\{\Delta x/\sqrt{E/\rho}, \Delta y/\sqrt{E/\rho}\}$ . Tämä johtaisi pienempään aika-askleen enimmäisarvoon kuin kaava (21).

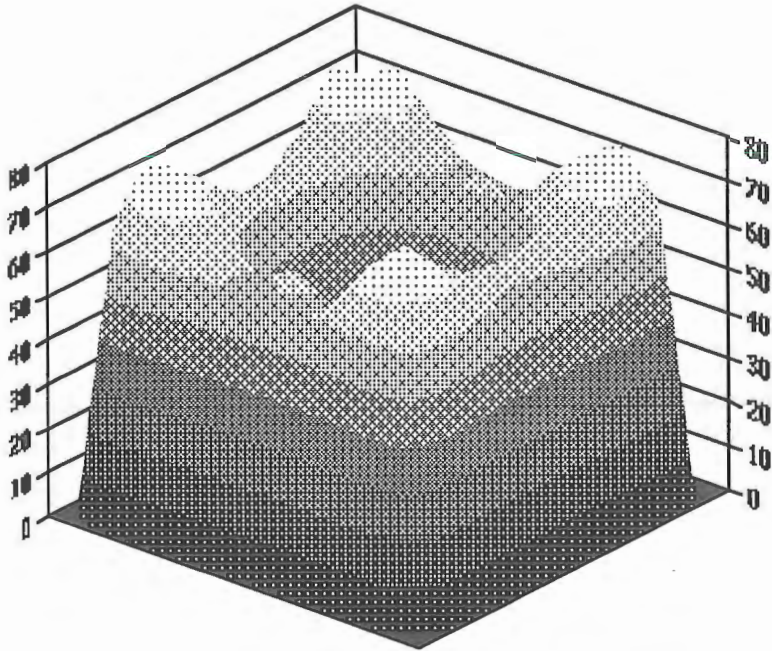
Suurten taipumien tapauksessa aika-askelvaatimusta ei nyt selvitetty analyttisesti, vaan kokeilemalla käyttämällä lähtökohtana kaavan (21) antamaa arvoa. Suurten taipumien tapauksessa aika-askleen tulee olla kalvovoimien takia lyhyempi kuin pienten taipumien tapauksessa. Yleensä stabiilius menetetään äkillisesti vasta hyvin lähellä kriittistä aika-askelta. Laskennassa käytetty tyypillinen aika-askel on ollut 0,00001 s.

**Esimerkki 1:** Analysoidaan vapaasti tuettu yksilasininen ikkuna sivujen pituuksien ollessa  $a = b = 1$  m ja paksuuden  $h = 5$  mm. Kuormituksen muoto on kuvassa 1 esitetty shokkiaalto, jonka  $P_s = 11$  kPa ja kestoaika  $\Delta t = 0,01$  s. Lasin kimmokertoimelle käytetään arvoa  $E = 69$  GPa, Poissonin vakiolle  $\nu = 0,25$  ja tiheydelle  $\rho = 2500$  kg/m<sup>3</sup>. Laatta jaetaan  $10 \times 10$  -ruudukkoon ja aika-askeleeksi valitaan  $0,00001$  s. Tutkittiin pienten ja suurten taipumien teorialla laskettujen tulosten eroja. Laatan keskikohdan taipuman maksimi ja alimpaan taajuuteen liittyvä värähdysaika tulivat pienten taipumien teorialla lähes kaksinkertaisiksi suurten taipumien teorialla laskettuihin arvoihin verrattuna (kuva 8).

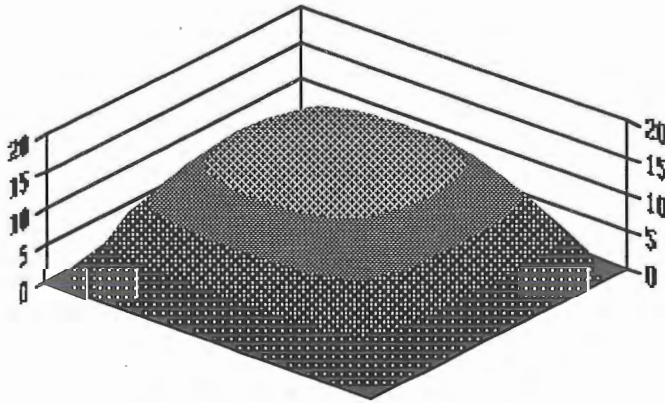


Kuva 8. Laatan keskikohdan taipuma ajan funktiona käyttäen  $10 \times 10$  - ja  $20 \times 20$  -ruudukkoa (merkityt taipuman maksimin numeroarvot laskettu  $10 \times 10$  -ruudukolla).

Pienten taipumien teorialla suurin redusoitu jännitys  $107,3$  MPa syntyi ajanhetkellä  $0,0170$  s laatan keskelle. Suurten taipumien teorialla taas suurin redusoitu jännitys  $77,8$  MPa tuli ajanhetkellä  $0,0090$  s nurkan lähelle (kuva 9). Kuva 10 esittää taipuman muotoa samalla ajanhetkellä. Analyysit tehtiin myös  $20 \times 20$  -ruudukkoa käyttämällä. Tällöin pienten taipumien teorialla maksimitaipumaksi tuli  $42,9$  mm ajanhetkellä  $0,0146$  s ja maksimijännitykseksi  $107,1$  MPa ajanhetkellä  $0,0147$  s sekä suurten taipumien teorialla maksimitaipumaksi  $20,8$  mm ajanhetkellä  $0,0075$  s ja maksimijännitykseksi  $85,2$  MPa ajanhetkellä  $0,0089$  s. Jännitykset muuttuivat siis enemmän kuin taipumat, mikä oli odotettavissakin, koska jännitykset saadaan tarkkuutta alentavilla derivoinneilla taipumista. Analyysit tehtiin myös käyttämällä aika-askelta  $0,000001$  s, millä oli kuitenkin vähäinen vaikutus tuloksiin.



Kuva 9. Maksimipääjännitys jakauman muoto laatan alueella ajanhetkellä 0,009 s, jolla saavutetaan suurin jännitysarvo 77,8 MPa nurkan lähellä (suurten taipumien teoria).



Kuva 10. Taipuman muoto laatan alueella ajanhetkellä 0,009 s, jolla saavutetaan suurin jännitysarvo (suurten taipumien teoria).

Tutkittiin myös laattaa, jossa laatan toisen sivun pituus kasvatettiin arvoon  $a = 1,5$  m. Tällöin suurten taipumien teorialla maksimijännitys tuli lyhyen sivun keskelle.

## USEAMPILASINEN IKKUNA

Useampilasisessa ikkunassa ruutujen väliin kehittyvä paine lasketaan adiabaattiyhtälöstä

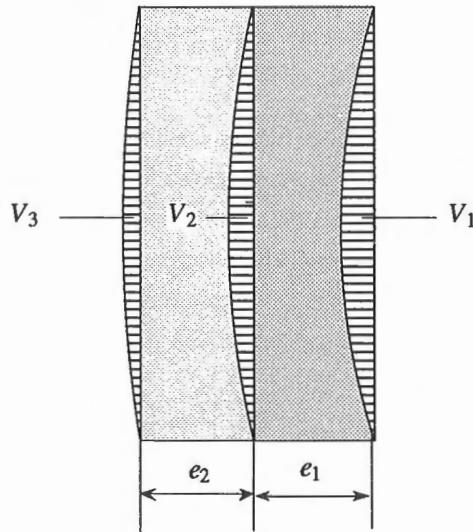
$$p V^\kappa = \text{vakio}, \quad (22)$$

missä ilman adiabaattivakio on  $\kappa = 1,4$ . Jos oletetaan ruutujen välisessä tilavuudessa paine paikan suhteen vakioksi ja käytetään ruutujen 1 ja 2 taipumista lasketuista tilavuuksista merkintöjä  $V_1$  ja  $V_2$  ja yhden ruudun pinta-alasta merkintää  $A$ , ruutujen 1 ja 2 väliseksi paineeksi tulee

$$p_{12} = p_0 \left(1 + \frac{V_2 - V_1}{A e_1}\right)^{-\kappa}, \quad (23)$$

missä  $p_0 = 0,1$  MPa ympäristön ilmanpaine. Vastaavasti ruutujen 2 ja 3 välisen tilan paineeksi tulee

$$p_{23} = p_0 \left(1 + \frac{V_3 - V_2}{A e_2}\right)^{-\kappa}. \quad (24)$$



Kuva 11. Kolminkertainen ikkuna.

Tilavuudet  $V_1$ ,  $V_2$  ja  $V_3$  lasketaan numeerisesti jokaisen aika-askeleen jälkeen. Ikkunaruutujen välisessä tilavuudessa paine voidaan olettaa vakioksi, jos ruutujen taipumisnopeus on äänen nopeuteen verrattuna sen verran pieni, että paineaallot ehtivät tasaantua riittävästi välitullassa. Tähän ääritapaukseen nähden vastakkainen ääritapaus syntyy, kun ik-

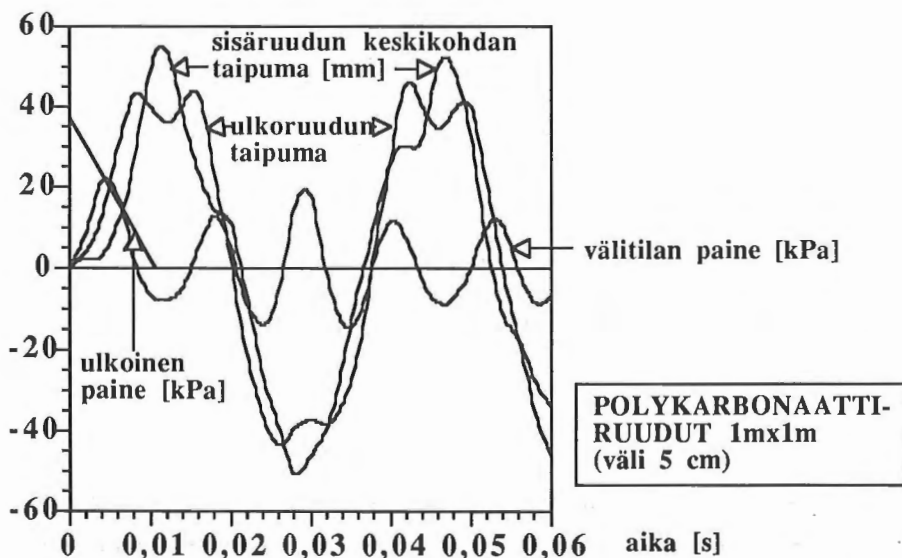
kunaruutujen taipumisnopeus on hyvin suuri. Tällöin tilanne vastaa kimmoisella alustalla olevaa laatua, jolloin ruutujen väliset paineet lasketaan kaavoista

$$p_{12} = p_0 \left(1 + \frac{w_2 - w_1}{e_1}\right)^{-\kappa}$$

$$p_{23} = p_0 \left(1 + \frac{w_3 - w_2}{e_2}\right)^{-\kappa} \quad (25)$$

Ikkunan paineiskukuormitus on kuitenkin lähellä ensin kuvattua tilannetta, jossa painetta välitilassa voidaan pitää paikan suhteen vakiona, kuten seuraavan esimerkin tuloksista ilmenee.

**Esimerkki 2:** Tarkastellaan neliömäistä kaksilasista ikkunaa, jonka  $a = b = 1$  m, ulomman ruudun paksuus  $h = 14$  mm ja sisemmän  $h = 12$  mm ruutujen välinen etäisyyden ollessa 50 mm. Polykarbonaatin kimmokertoimelle käytetään arvoa  $E = 2,39$  GPa, Poissonin vakiolle  $\nu = 0,38$  ja tiheydelle  $\rho = 1200$  kg/m<sup>3</sup>. Levy jaetaan  $10 \times 10$  -ruudukkoon ja aika-askeleeksi valitaan  $0,00001$  s. Paikan suhteen vakioksi oletettu ulkoinen annettu paine, välitilan laskettu paine ja ruutujen keskikohtien suurten taipumien teoriassa laskettu taipuma ajan funktiona on esitetty kuvassa 12. Ulkoruudun suurin reductoitu jännitys  $24,1$  MPa saatiin ajanhetkellä  $0,0419$  s laatan keskelle ja sisäruudun  $21,6$  MPa ajanhetkellä  $0,0110$  s myös laatan keskelle.



Kuva 12. Ulkoinen paine, välitilan paine ja ruutujen keskikohtien taipuma ajan funktiona.



Ulko- ja sisäruudun keskialue taipuvat lähes samalla alimmalla taajuudella (locking- ilmiö), vaikka ruutujen vapaat ominaistajuudet ovat erilaisen paksuuden takia erilaiset (pienien taipumien teorialla laskettu ulkoruudun 19,4 Hz ja sisäruudun 16,6 Hz). Laatan taipuman suurimmaksi nopeudeksi saadaan kuvasta 12 graafisesti derivoimalla noin 10 m/s, joka on pieni verrattuna äänen nopeuteen noin 340 m/s ilmassa tehden oletuksen ruutujen välisestä vakiopaineesta oikeutetuksi.

Joissakin tapauksissa jatkettaessa laskentaa pitkälti taipuman ja jännityksen ensimmäisten maksimikohtien ohi laskennan stabiilius menetettiin, minkä seurauksena siirtymät ja jännitykset kasvoivat mielivaltaisen suuriksi. Epästabiilius aiheutui nähtävästi siitä, että pakkokuormituksen lakattua ja suurimpien värähtelyjen tasaannuttua jäljelle jäi pieniamp- litudisia korkeita taajuuksia, joiden analysointi olisi edellyttänyt tiheämpää laskentaverk- koa ja lyhyempää aika-askelta. Ongelma vältettiin lisäämällä laskentamalliin pieni sisäi- nen vaimennus, joka hävittää korkeammat taajuudet vaikuttamatta alempiin taajuuksiin.

### Ohjelmaan lisättyjä piirteitä

Ohjelmaan tehdyn pienen lisäyksen (yksi ohjelmarivi) jälkeen ohjelmalla voidaan laskea myös staattisia kuormitustapauksia. Kaavan (7) inertia-termiin lisättiin nopeuteen verran- nollinen vaimennustermi eli

$$\begin{aligned} \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c \frac{\partial w}{\partial t} &= \rho h \frac{w_{i,j}^{t+\Delta t} - 2w_{i,j}^t + w_{i,j}^{t-\Delta t}}{(\Delta t)^2} + c \frac{w_{i,j}^{t+\Delta t} - w_{i,j}^t}{\Delta t} \\ &= \rho h \frac{(1 + \frac{c \Delta t}{\rho h})w_{i,j}^{t+\Delta t} - (2 + \frac{c \Delta t}{\rho h})w_{i,j}^t + w_{i,j}^{t-\Delta t}}{(\Delta t)^2}, \end{aligned} \quad (26)$$

jossa  $c$  on vaimennuskerroin. Tällöin vakiopaineella kuormitetun laatan värähtelyt vai- menevat ja jäljelle jää staattinen muodonmuutostila. Ilmeisesti kriittistä vaimennus- kerrointa käyttämällä päästään nopeimmin staattiseen lopputilaan. Kriittistä vaimennus- kerrointa on kuitenkin vaikea määrittää varsinkaan suurten taipumien tapauksessa. Ko- keilujen mukaan sopiva valinta on esimerkiksi  $c \Delta t / (\rho h) \approx 0,1$  (korkeiden taajuuksien suodatuksen sopiva valinta oli kokeilujen mukaan  $c \Delta t / (\rho h) \approx 0,00001$ ). Parissa staatti- sessa tapauksessa (toisessa pienet ja toisessa suuret taipumat) ohjelman tulostamaa taipu- maa verrattiin kirjallisuudesta saatuun arvoon ja todettiin tarkka yhtäpitävyys.

Monilasisissa ikkunoissa ulkoruutu rikkoutuu ensin. Ohjelmaan tehtiin lisäys, jonka avulla on mahdollista annetulla ulkoruudun murtumisjännityksellä tapahtuvan rikkoutu-

misen jälkeen kohdistaa ulkoinen painekuormitus sellaisenaan sisempään ruutuun. Näin voidaan arvioida sisäruutujen rikkoutumista paineen vaikutuksesta. Kolmelasisissa ikkunoissa sisälasina käytetään umpiolasia (väli 12 mm). Tällöin pienen välitilavuuden ansiosta painekuormitus jakaantuu kutakuinkin tasan jäljellä olevien kahden ruudun kannettavaksi. Ohjelmalla voitaisiin myös selvittää optimaaliset ruutujen väliset etäisyydet annetussa paineiskukuormituksessa.

## JATKOTUTKIMUSMAHDOLLISUUKSIA

Lasiruuduilla tehtyjen kokeiden mukaan lasiruudun murtumisjännityksessä esiintyvä huomattava hajonta (luokkaa 20–40 %) aiheutuu ruuduissa olevista säröistä. Jos särö sattuu ruudun voimakkaasti jännittyvälle alueelle, ruudun rikkoutumiskuormitus alenee. Hajonnan suuruus voitaisiin selvittää teoreettisesti tutkimalla lasilevyssä olevia pinta- ja mahdollisesti sisäisiä säröjä valitsemalla säröjen esiintymistiheydelle, koolle, orientaatiolle ja suunnalle erilaisia todennäköisyysjakaumia. Esimerkiksi puolielliptisten pintasäröjen jännitysintensiiteettikertoimelle on esitetty kirjallisuudessa valmiiksi laskettuja arvoja vedon ja taivutuksen rasittamassa laattassa. Tutkimuksesta olisi mm. se hyöty, että saataisiin selville, miten hajonta staattisessa kuormituksessa eroaa hajonnasta dynaamisessa kuormituksessa johtuen erilaisesta jännitys jakaumasta ruudun alueella.

## KIITOKSET

Erikoistutkija Risto Lautkaskea kiitän osallistumisesta johdanto-osan kirjoittamiseen sekä professori Mauri Määttästä ja erikoistutkija Heikki Raikoa artikkelin tarkistuksesta.

## LÄHDELUETTELO

1. Meyers, G.E. Blast-resistant glazing. Design considerations for toxic chemical and explosives facilities. New Orleans, La., 30 Aug. – 4 Sep. 1987. Washington, D.C., American Chemical Society, Symposium Series 345. ss. 107 – 129.
2. Meyers, G.E. & Tancreto, J.A. Interim design criteria for polycarbonate blast-resistant glazing. Design considerations for toxic chemical and explosives facilities. New Orleans, La., 30 Aug. – 4 Sep. 1987. Washington, D.C., American Chemical Society, Symposium Series 345. ss. 130 – 145.
3. Ikonen, K., Ajasta riippuvien ilmiöiden numeerisissa ratkaisuihin käytetyn aika-astelehen valinnasta. Rakenteiden Mekaniikka 14(1981), ss. 1–9.