

# MUODONMUUTOKSET JA KIINTEÄT PAIKALLISET KARTEESISET KOORDINAATIT

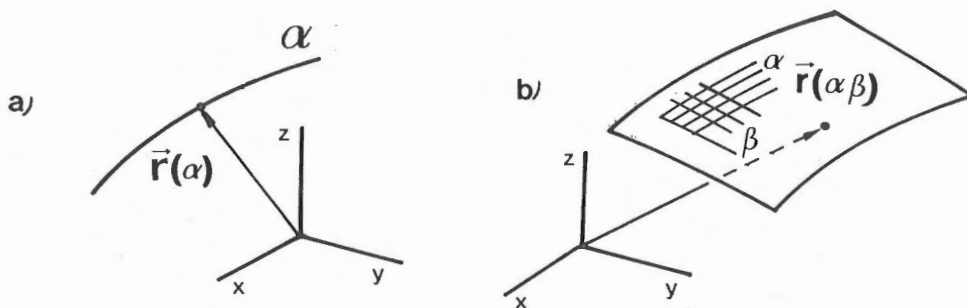
Rakenteiden Mekaniikka, Vol. 24  
No 3 1991, ss. 38 - 55

Juha Paavola ja Eero-Matti Salonen

**TIIVISTELMÄ** Artikkelissa osoitetaan kiinteiden paikallisten karteesisten suorakulmaisten koordinaattien soveltuvan erinomaisesti numeeristen laskentamenetelmien lisäksi kaarevien sauva- ja kuorirakenteiden analyyttiseen käsittelyyn. Esitetyillä tuloksilla ei sinänsä ole tieteellistä uutuusarvoa, mutta kehitetty lähestymistapa, joka on ilmeisen hyödyllinen erikoisesti opetuksen tarpeita silmällä pitäen, avaa yksinkertaisen ja systemaattisen esitystapansa myötä uuden näkökulman matemaattisesti usein hankaliksi tulkittuihin teoreettisiin tarkasteluihin. Sovelluksina johdetaan sekä taivutettujen että kalvotilassa olevien sauva- ja kuorirakenteiden lineaaristen muodonmuutosten analyyttiset lausekkeet määritettyinä kulloinkin käypien ortogonaalisten käyräviivaisten koordinaattien avulla.

## JOHDANTO

Kaarevien rakenteiden - kuten sauvojen ja kuorien - tarkastelussa käytetyt koordinaattijärjestelmät valitaan tavanomaisesti siten, että koordinaattiviivat yhtyvät rakenteen tiettyihin karakteristisiin viivoihin ja ovat näin ollen kaarevia eli käyräviivaisia. Kuva 1 (a) esittää tyypillistä yksidimensioista rakennetta, kaarevaa sauvaa ja sen käyräparametria  $\alpha$  kolmidimensioisessa avaruudessa ja kuva 1 (b) vastaavasti ohutta pintarakennetta ja sen referenssipinnan pintaparametreja  $\alpha$  ja  $\beta$ . Laskennallisessa tarkastelussa on tällöin luontevaa - muiden mahdollisuuksien jäädessä useimmiten kokonaan harkinnan ulkopuolelle - esittää rakenteen siirtymätila käyttämällä apuna kyseisen käyräviivaisen koordinaattijärjestelmän kantavektoreita. Oleellista on, että nämä yksikkökantavektorit eivät ole suunnaltaan paikan suhteen vakioita, mikä seikka tekee tarvittavat muodonmuutosten lausekkeet helposti varsin mutkikkaiksi. Alan kirjallisuudessa on käytetty perinteisesti kahta vaihtoehtoista menetelmää kyseisten lausekkeiden johtamiseksi. Ensinnä, on käytetty apuna erilaisia differentiaaligeometrisia piirroksia, joiden avulla kuvataan rakenteen deformatumista ja määritetään muodonmuutokset, FLÜGGE (1966) ODEN (1967). Tämän menettelyn etuna on silloin, kun piirros on taitavasti tehty, havainnollisuus, mutta usein tämä tarkastelutapa jättää lukijalle kuitenkin hieman epävarman tunteen käsittelyn eksaktiudesta. Toinen, matemaattisesti ehdottomasti luotettava menettelytapa, perustuu tensorilaskennan keinoin johdettuihin yleisiin käyräviivaisessa koordinaattijärjestelmässä lausuttuihin venymätensorin



Kuva 1. (a) Sauvan akseli, paikkavektori  $\vec{r}$  ja käyräparametri  $\alpha$ . (b) Kuoren referenssipinta, paikkavektori  $\vec{r}$  sekä pintaparametrit  $\alpha$  ja  $\beta$ .

lausekkeisiin, FLÜGGE (1972). Näin johdettuja tuloksia on taas puolestaan kovin hankala todeta yleispäteviksi varsinkin silloin, kun lukijalla ei ole riittävää tensorilaskennan perusteiden tuntemusta.

Tässä artikkelissa pyritään tuomaan esiin muodonmuutosten lausekkeiden johtamiseksi edellämainituista kahdesta vaihtoehdosta poikkeava lähestymistapa, jossa myös kaarevia rakenteita käsiteltäessä voidaan virhettä tekemättä hyödyntää suoraan kiinteässä karteesisessa suorakulmaisessa koordinaatistossa päteviä tuttuja ja yksinkertaisia venymien ja liukumien lausekkeitä. Tämän menettelyn toivotaan tuovan helpotusta muun muassa monasti varsin hankalaksi koetun kuoriteorian oppimiseen. Ilmeinen vastenmielisyyys, joka on syntynyt vaikeaksi tulkitun matemaattisen käsittelyn myötä, pitäisi tältä osin poistua, sillä esitetty menettely perustuu ainoastaan yksinkertaisiin vektorilaskennan alkeista tuttuihin laskutoimituksiin. Samalla toivotaan alennettavan sitä korkeaksi noussutta kynnyksiä, joka pyrkii vieroittamaan monet insinöörit mekaniikan teoreettisten tehtävien parista.

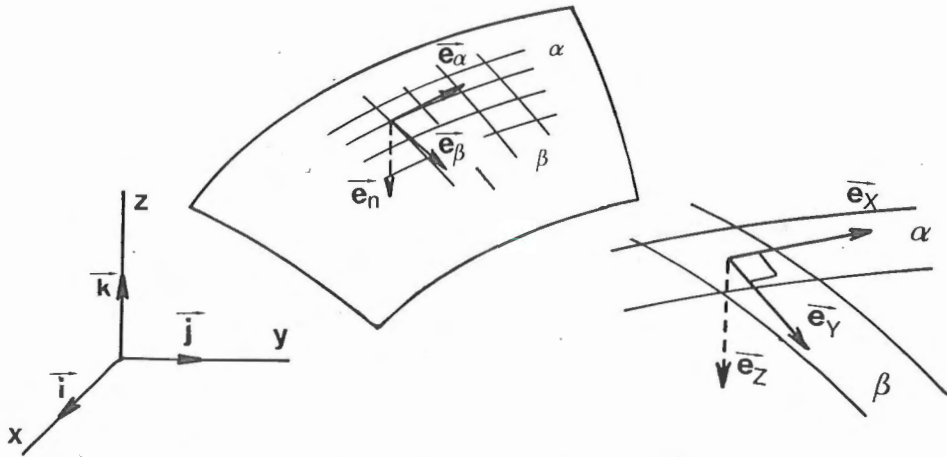
## KOORDINAATISTON MUUNNOKSET

Esityksessä tullaan käyttämään kolmea eri koordinaattijärjestelmää, jotka kaikki on esitetty kuvassa 2. Koko rakennetta tarkastellaan ns. globaalissa kiinteässä koordinaatistossa  $x, y, z$ , jonka kantavektorit  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  ovat kiinteitä muodostaen oikeakätisen järjestelmän. Rakenteen geometria määritellään tavanomaiseen tapaan sauvan ja kuoren osalta käyräviivaisia viiva- ja pintakoordinaatteja käyttämällä siten, että paikkavektori

$$\vec{r} = \vec{r}(\alpha) = x(\alpha)\vec{i} + y(\alpha)\vec{j} + z(\alpha)\vec{k} \quad (1a)$$

$$\vec{r} = \vec{r}(\alpha, \beta) = x(\alpha, \beta)\vec{i} + y(\alpha, \beta)\vec{j} + z(\alpha, \beta)\vec{k} \quad (1b)$$

Näille koordinaateille, jotka on määritetty sauvan akselilla ja kuoren referenssipinnalla, on siis käytetty tässä yhteydessä merkintöjä  $\alpha$  ja  $\beta$ . Lisäksi näihin koordinaattijärjestelmiin liitetään ns. normaalikoordinaatti  $n$ , joka on pisteittäin kohtisuorassa tarkasteltavan kuoren pintaa ja pintakoordinaatteja vastaan ja tasosauvan tapauksessa



Kuva 2. Käytetyt koordinaattijärjestelmät.

yhtyy tarkastelutasoon ollen samalla kohtisuorassa sauvan akselia vastaan. Koordinaattiakselit muodostavat kuvan 2 mukaisesti aina oikeakätisen järjestelmän, jossa koordinaattiviivojen tangentiaalisia yksikkövektoreita merkitään tunnuksilla  $\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\beta$  ja normaalin suuntaista yksikkövektoria vastaavasti tunnuksella  $\vec{e}_n$ . Suoritettavien analyttisten tarkastelujen osalta rajoitutaan tässä yhteydessä niihin tapauksiin, joissa koordinaatit  $\alpha$  ja  $\beta$  ovat keskenään ortogonaalisia. Sen sijaan numeerisissa laskentamenetelmissä ei ortogonaalisuusvaatimusta ole tarpeen asettaa.

Tämän lisäksi rakenteen referenssipinnalle määritellään kulloinkin tarkasteltavaan pisteeseen kiinnitetty paikallinen suorakulmainen karteesinen koordinaattijärjestelmä  $X, Y, Z$ , jonka  $X$ -koordinaattiviiva sivuaa, yksidimensioista rakennetta tarkasteltaessa, sauvan akselia ja jonka  $X$ - ja  $Y$ -koordinaattiviivat pintarakenteita käsiteltäessä sivuavat tarkasteltavaa pintaa. Koordinaatti  $Z$  yhtyy tarkastelupisteessä kuoren ja kaarevan sauvan edellä määriteltyihin normaaleihin. Näiden viivojen suuntaisia yksikkövektoreita merkitään tunnuksilla  $\vec{e}_X, \vec{e}_Y, \vec{e}_Z$ . Vektori  $\vec{e}_X$  on siis kaarevan sauvan tangenttivektori ja vektorit  $\vec{e}_X$  ja  $\vec{e}_Y$  vastaavasti kuoren tangenttivektoreita siinä pisteessä, missä paikallinen koordinaattijärjestelmä on määritetty. On huomattava, että jatkossa ortogonaalisen koordinaattijärjestelmän kyseessä ollessa paikallisen koordinaattijärjestelmän yksikkövektorit valitaan siten, että ne yhtyvät käyräviivaisten koordinaattien yksikkötangenttivektoreihin kussakin pisteessä erikseen.

Koska rakenteen geometria määritellään käyräviivaisten viiva- ja pintakoordinaattien avulla ja koska tarkoituksena on määrittää muodonmuutokset paikallisissa suorakulmaisissa koordinaateissa, tarvitaan eri koordinaatistoissa laskettujen derivaattojen väliset yhteydet. Tähän tarkoitukseen on käytettävissä ketjuderivoimissääntö, jota sovelletaan muodossa

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \alpha} &= \frac{\partial X}{\partial \alpha} \frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial Y}{\partial \alpha} \frac{\partial}{\partial Y} + \frac{\partial Z}{\partial \alpha} \frac{\partial}{\partial Z} \\
 \frac{\partial}{\partial \beta} &= \frac{\partial X}{\partial \beta} \frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial Y}{\partial \beta} \frac{\partial}{\partial Y} + \frac{\partial Z}{\partial \beta} \frac{\partial}{\partial Z} \\
 \frac{\partial}{\partial n} &= \frac{\partial X}{\partial n} \frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial Y}{\partial n} \frac{\partial}{\partial Y} + \frac{\partial Z}{\partial n} \frac{\partial}{\partial Z}
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

eli

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial}{\partial \beta} \\ \frac{\partial}{\partial n} \end{pmatrix} = \mathbf{J} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial X} \\ \frac{\partial}{\partial Y} \\ \frac{\partial}{\partial Z} \end{pmatrix} \quad (3)$$

missä

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial \alpha} & \frac{\partial Y}{\partial \alpha} & \frac{\partial Z}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial X}{\partial \beta} & \frac{\partial Y}{\partial \beta} & \frac{\partial Z}{\partial \beta} \\ \frac{\partial X}{\partial n} & \frac{\partial Y}{\partial n} & \frac{\partial Z}{\partial n} \end{bmatrix} \quad (4)$$

on Jacobin matriisi. Derivaattojen välisten yhteyksien lähtökohta on yhtälö (3). Siihen liittyvän Jacobin matriisin alkiot on helppo määrittää, koska paikallinen koordinaattijärjestelmä lausutaan käyräviivaisten koordinaattien avulla, toisin sanoen  $X = X(\alpha, \beta, n)$ ,  $Y = Y(\alpha, \beta, n)$ ,  $Z = Z(\alpha, \beta, n)$ . Tällöin derivaatat  $\partial X/\partial \alpha$ ,  $\partial X/\partial \beta$  jne. ovat helposti laskettavissa. Derivaattojen  $\partial \alpha/\partial X$ ,  $\partial \beta/\partial X$  jne. lausekkeet ovat sen sijaan yleisesti varsin hankalasti löydettävissä ja on helpompi määrittää tarvittava käänteinen yhteys käyttämällä apuna Jacobin matriisin kääntematriisia

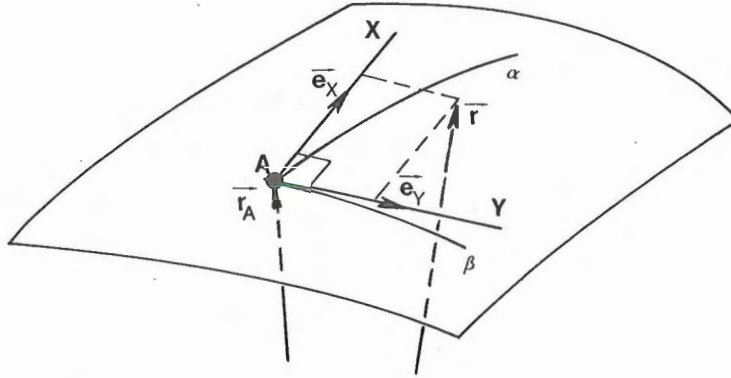
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial X} \\ \frac{\partial}{\partial Y} \\ \frac{\partial}{\partial Z} \end{pmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial}{\partial \beta} \\ \frac{\partial}{\partial n} \end{pmatrix} \quad (5)$$

Johdetaan Jacobin matriisin alkioiden lausekkeet tarkastelemalla esimerkkinä havainnollisuuden vuoksi kuvassa 3 esitettyä kaksidimensioista kuorirakennetta, jossa paikallinen koordinaattijärjestelmä on kiinnitetty keskipinnan pisteeseen A. Kunkin ympäristössä olevan pisteen koordinaatit voidaan määrittää tällöin kiinnitettyssä järjestelmässä projisioimalla paikkavektorien erotus  $\vec{r} - \vec{r}_A$  kiinteille koordinaattiakseleille, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} X &= (\vec{r} - \vec{r}_A) \cdot \vec{e}_X \\ Y &= (\vec{r} - \vec{r}_A) \cdot \vec{e}_Y \end{aligned} \quad (6)$$

Derivoimalla näin saatuja yhtälöitä pintakoordinaattien  $\alpha$  ja  $\beta$  suhteen ja ottamalla huomioon, että paikkavektori  $\vec{r}_A$  ja kiinteät kantavektorit ovat vakioita derivoimisen suhteen, saadaan

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial \alpha} &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} \cdot \vec{e}_X, & \frac{\partial Y}{\partial \alpha} &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} \cdot \vec{e}_Y \\ \frac{\partial X}{\partial \beta} &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial \beta} \cdot \vec{e}_X, & \frac{\partial Y}{\partial \beta} &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial \beta} \cdot \vec{e}_Y \end{aligned} \quad (7)$$



Kuva 3. Kiinteä paikallinen koordinaattijärjestelmä.

Näin saatiin Jacobin matriisille esitysmuoto

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} \cdot \vec{e}_X & \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} \cdot \vec{e}_Y \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial \beta} \cdot \vec{e}_X & \frac{\partial \vec{r}}{\partial \beta} \cdot \vec{e}_Y \end{bmatrix} \quad (8)$$

joka yksinkertaistaa huomattavasti jatkossa suoritettavaa tarkastelua ja on erikoisen käyttökelpoinen erilaisten numeeristen algoritmien ohjelmoinnissa. Tämän esitysmuodon ovat todennäköisesti ensimmäisinä ottaneet käyttöön IRONS ja AHMAD (1980). Esitetty johto on luonnollisesti helposti laajennettavissa kolmidimensioiseen tapaukseen.

Vektorilaskennan keinoin voidaan määrittää ortogonaalisen koordinaattijärjestelmän  $\alpha, \beta, n$  yksikkövektoreiden pintakoordinaattien suhteen lasketuille derivaatoille lausekkeet

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \begin{Bmatrix} \vec{e}_\alpha \\ \vec{e}_\beta \\ \vec{e}_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{H_\beta} \frac{\partial H_\alpha}{\partial \beta} & -\frac{H_\alpha}{R_\alpha} \\ \frac{1}{H_\beta} \frac{\partial H_\alpha}{\partial \beta} & 0 & \frac{H_\alpha}{R_{\alpha\beta}} \\ \frac{H_\alpha}{R_\alpha} & -\frac{H_\alpha}{R_{\alpha\beta}} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{e}_\alpha \\ \vec{e}_\beta \\ \vec{e}_n \end{Bmatrix} \quad (9)$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \begin{Bmatrix} \vec{e}_\alpha \\ \vec{e}_\beta \\ \vec{e}_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial H_\beta}{\partial \alpha} & \frac{H_\beta}{R_{\alpha\beta}} \\ -\frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial H_\beta}{\partial \alpha} & 0 & -\frac{H_\beta}{R_\beta} \\ -\frac{H_\beta}{R_{\alpha\beta}} & \frac{H_\beta}{R_\beta} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{e}_\alpha \\ \vec{e}_\beta \\ \vec{e}_n \end{Bmatrix}$$

joita tarvitaan jatkossa analyyttisiä lausekkeita johdettaessa. Kaavojen johtaminen on esitetty useimmissa kuoriteorian oppikirjoissa, eikä sitä ole tarkoitus tässä yhteydessä toistaa. Käytetyt LAMÉ:n parametrien eli ns. mittakaavatekijöiden, jotka määräytyvät

yhtälöistä

$$\begin{aligned}\partial\vec{r}/\partial\alpha &= H_\alpha\vec{e}_\alpha \\ \partial\vec{r}/\partial\beta &= H_\beta\vec{e}_\beta\end{aligned}\quad (10)$$

lausekkeet ovat

$$\begin{aligned}H_\alpha &= |\partial\vec{r}/\partial\alpha| = \left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial\alpha} \cdot \frac{\partial\vec{r}}{\partial\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} \\ H_\beta &= |\partial\vec{r}/\partial\beta| = \left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial\beta} \cdot \frac{\partial\vec{r}}{\partial\beta}\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}\quad (11)$$

Koska rakenteen geometrian kuvauksessa ei käytetä koordinaattia  $n$ , joka on suoraviivainen ja jonka otaksutaan kaikissa tapauksissa olevan kohtisuorassa muita koordinaattiviivoja vastaan, ei yksikkövektoreiden derivaattoja normaalin suhteen jatkossa tarvita.

Yhtälöistä (9) on lisäksi helposti määritettävissä kaarevuuksien ja kierevyyden lausekkeet

$$\begin{aligned}\frac{1}{R_\alpha} &= -\frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial\vec{e}_\alpha}{\partial\alpha} \cdot \vec{e}_n, & \frac{1}{R_\beta} &= -\frac{1}{H_\beta} \frac{\partial\vec{e}_\beta}{\partial\beta} \cdot \vec{e}_n \\ \frac{1}{R_{\alpha\beta}} &= \frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial\vec{e}_\beta}{\partial\alpha} \cdot \vec{e}_n = \frac{1}{H_\beta} \frac{\partial\vec{e}_\alpha}{\partial\beta} \cdot \vec{e}_n\end{aligned}\quad (12)$$

Kaarevuussäteet ja jatkossa vastaavasti kaarevuuden muutokset määritellään positiivisiksi silloin, kun kaarevuuskeskipiste sijaitsee normaalin negatiivisella puolella, NOVOZHILOV (1964). Kirjallisuudessa esiintyy myös käytäntö, jossa kaarevuussäde on valittu positiiviseksi silloin, kun kaarevuuskeskipiste sijaitsee positiivisella normaaliakselilla, esim. WASHIZU (1975). Tällöin tulee kussakin edellä esitetystä yhtälöstä vaihtaa kaarevuus- ja kierevyyssäteiden etumerkki.

Jos tarkastellaan kolmidimensioisessa avaruudessa mielivaltaista käyrää, jonka akseliin koordinaatti  $\alpha$  yhtyy ja jos määritellään koordinaatti  $\beta$  käyrän sivunormaaliksi, havaitaan, että edelliset lausekkeista (9) sisältävät vektorianalyysistä, VÄISÄLÄ (1975), tutut FRENET:n kaavat. Tällöin on huomattava, että mittakaavatekijän  $H_\alpha$  derivaatat häviävät ja erikoisesti, jos valitaan koordinaatti  $\alpha$  käyrän pituuden mitaksi mittakaavatekijä saa yksikön suuruisen vakioarvon. Tasokäyrälle pätevät yhtälöt saadaan taas jättämällä sivunormaalien osuus lausekkeista kokonaan pois.

Tässä luvussa esitetyt matemaattiset apuvälineet ovat pitkälti riittäviä jatkossa esitettävien tulosten ymmärtämiseksi. Oleellisimpia ovat ketjuderivointisääntö (5) sekä yksikkövektoreiden derivaattojen lausekkeet (9), joita tavanomaisestikin sovelletaan sauva- ja kuorirakenteita analysoitaessa. Vastaavanlaiset derivaattojen lausekkeet on helposti johdettavissa muille ortogonaalisille koordinaattijärjestelmille, kuten esimerkiksi napa-, pallo- ja sylinterikoordinaateille.

## SIIRTYMÄ- JA MUODONMUUTOSTILA

Tarkasteltavan rakenteen mielivaltaisen pisteen siirtymävektori voidaan lausua käyttämällä kantavektoreina erikseen kunkin edellämäinitun koordinaatiston yksikkövektoreita. Yleisissä globaaleissa koordinaateissa lausuttuna siirtymävektori on

$$\vec{u} = u_x\vec{i} + u_y\vec{j} + u_z\vec{k}\quad (13)$$

Sama vektori on lausuttavissa paikallisessa karteesisessa tai käyräviivaisessa koordinaattijärjestelmässä muodoissa

$$\vec{u} = u_X \vec{e}_X + u_Y \vec{e}_Y + u_Z \vec{e}_Z \quad (14a)$$

$$\vec{u} = u_\alpha \vec{e}_\alpha + u_\beta \vec{e}_\beta + u_n \vec{e}_n \quad (14b)$$

missä kertoimina esiintyvät siirtymäkomponentit ovat vastaavasti

$$u_X = \vec{u} \cdot \vec{e}_X, \quad u_Y = \vec{u} \cdot \vec{e}_Y, \quad u_Z = \vec{u} \cdot \vec{e}_Z \quad (15a)$$

$$u_\alpha = \vec{u} \cdot \vec{e}_\alpha, \quad u_\beta = \vec{u} \cdot \vec{e}_\beta, \quad u_n = \vec{u} \cdot \vec{e}_n \quad (15b)$$

Muodonmuutoskomponenttien lausekkeet kiinteän paikallisen koordinaattijärjestelmän koordinaattien suhteen ovat tavanomaista muotoa

$$\begin{aligned} \epsilon_X &= \frac{\partial u_X}{\partial X}, & \gamma_{YZ} &= \frac{\partial u_Y}{\partial Z} + \frac{\partial u_Z}{\partial Y} \\ \epsilon_Y &= \frac{\partial u_Y}{\partial Y}, & \gamma_{ZX} &= \frac{\partial u_Z}{\partial X} + \frac{\partial u_X}{\partial Z} \\ \epsilon_Z &= \frac{\partial u_Z}{\partial Z}, & \gamma_{XY} &= \frac{\partial u_X}{\partial Y} + \frac{\partial u_Y}{\partial X} \end{aligned} \quad (16)$$

Sijoittamalla näihin siirtymäkomponenttien lausekkeet (15a), joissa kantavektorit  $\vec{e}_X$ ,  $\vec{e}_Y$  ja  $\vec{e}_Z$  ovat kiinteitä ja näinollen vakioita, saadaan välittömästi

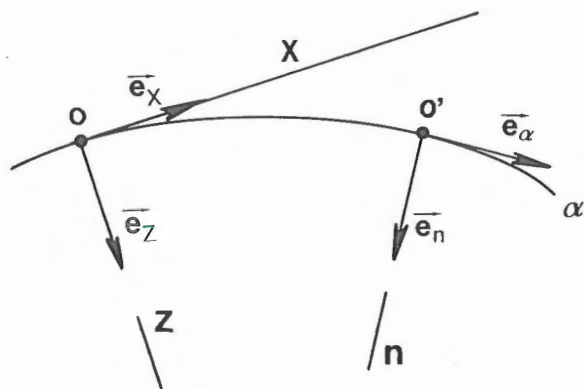
$$\begin{aligned} \epsilon_X &= \frac{\partial \vec{u}}{\partial X} \cdot \vec{e}_X, & \gamma_{YZ} &= \frac{\partial \vec{u}}{\partial Z} \cdot \vec{e}_Y + \frac{\partial \vec{u}}{\partial Y} \cdot \vec{e}_Z \\ \epsilon_Y &= \frac{\partial \vec{u}}{\partial Y} \cdot \vec{e}_Y, & \gamma_{ZX} &= \frac{\partial \vec{u}}{\partial X} \cdot \vec{e}_Z + \frac{\partial \vec{u}}{\partial Z} \cdot \vec{e}_X \\ \epsilon_Z &= \frac{\partial \vec{u}}{\partial Z} \cdot \vec{e}_Z, & \gamma_{XY} &= \frac{\partial \vec{u}}{\partial Y} \cdot \vec{e}_X + \frac{\partial \vec{u}}{\partial X} \cdot \vec{e}_Y \end{aligned} \quad (17)$$

Nämä skalaaritulotyyppiset lausekkeet osoittautuvat olevan laskennallisesti erittäin käyttökelpoisia ja ovat tietävästi myös IRONS:n käyttöönottamia, IRONS ja AHMAD (1980).

## VEDETTY SAUVA

Tarkastellaan aluksi yksinkertaisena esimerkkinä kuvassa 4 esitettyä, globaalissa  $x, z$ -tasossa sijaitsevaa kaareva-akselista tasosauvaa. Yhtyköön käyräviivainen  $\alpha$ -koordinaatti sauvan akseliin ja olkoon  $n$  tämän normaali rakenteen tasossa, jolloin yksikkövektorit tangentin ja normaalin suunnille mielivaltaisessa pisteessä  $O'$  ovat  $\vec{e}_\alpha$  ja  $\vec{e}_n$ . Kiinnitetään paikallinen karteesinen koordinaattijärjestelmä, jonka yksikkövektorit ovat  $\vec{e}_X$  ja  $\vec{e}_Z$ , pisteeseen  $O$ . Tarkoituksena on määrittää sauvan akselin suhteellinen venymä pisteessä  $O$ . Se saadaan suoraan soveltamalla ensimmäistä yhtälöistä (17), jolloin

$$\epsilon_X = \frac{\partial u_X}{\partial X} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial X} \cdot \vec{e}_X \quad (18)$$



Kuva 4. Yksidimensiainen kaareva sauvarakenne.

Kun siirtymävektori tai sen interpolantti tunnetaan, venymän arvo on laskettavissa tästä yhtälöstä välittömästi numeerisesti. Nyt on kuitenkin tarkoituksena johtaa tästä määritelmästä lähtien käyräviivaisissa koordinaateissa esitetty venymän analyttinen lauseke. Siirtymävektorin esitysmuoto (14b) on kyseessä olevassa yksidimensioisessa tapauksessa

$$\vec{u}(\alpha) = u_\alpha(\alpha)\vec{e}_\alpha(\alpha) + u_n(\alpha)\vec{e}_n(\alpha) \quad (19)$$

Sijoittamalla tämä venymän lausekkeeseen (18) saadaan

$$\epsilon_X = \frac{\partial u_\alpha}{\partial X}(\vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_X) + u_\alpha \left( \frac{\partial \vec{e}_\alpha}{\partial X} \cdot \vec{e}_X \right) + \frac{\partial u_n}{\partial X}(\vec{e}_n \cdot \vec{e}_X) + u_n \left( \frac{\partial \vec{e}_n}{\partial X} \cdot \vec{e}_X \right) \quad (20)$$

Jotta derivaatat kiinteiden karteesisien koordinaattien suhteen voidaan laskea, sovelletaan ketjuderivoimissääntöä (5), joka tässä yksidimensioisessa tapauksessa saa otettaessa huomioon edellinen määritelmästä (10) muodon

$$\frac{\partial}{\partial X} = J_{11}^{-1} \frac{\partial}{\partial \alpha} = \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} \cdot \vec{e}_X \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial \alpha} = (H_\alpha \vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_X)^{-1} \frac{\partial}{\partial \alpha} \quad (21)$$

Venymän lauseke halutaan nyt määrittää nimenomaan siinä pisteessä, johon paikallinen koordinaattijärjestelmä on kiinnitetty eli pisteessä O. Tällöin yksikkökantavektorit yhtyvät, eli  $\vec{e}_\alpha = \vec{e}_X$  sekä vastaavasti  $\vec{e}_n = \vec{e}_Z$ . Koska kantavektoreiden ortogonaalisuudesta johtuen ovat voimassa ehdot

$$\begin{aligned} \vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_X &= 1 \\ \vec{e}_n \cdot \vec{e}_X &= 0 \end{aligned} \quad (22)$$

derivaattaoperaattori (21) voidaan kirjoittaa muotoon

$$\frac{\partial}{\partial X} = \frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \quad (23)$$

Ottamalla huomioon tämä ja yksikkövektoreiden derivaattojen lausekkeet (9) venymän lauseke (20) on tasosauvan tapauksessa

$$\epsilon_X = \frac{\partial u_\alpha}{H_\alpha \partial \alpha}(\vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_X) + \frac{u_\alpha}{R_\alpha}(\vec{e}_n \cdot \vec{e}_X) + \frac{\partial u_n}{H_\alpha \partial \alpha}(\vec{e}_n \cdot \vec{e}_X) + \frac{u_n}{R_\alpha}(\vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_X) \quad (24)$$



josta saadaan käyttämällä jälleen yhteyksiä (22) venymän lopullinen lauseke

$$\epsilon_\alpha = \epsilon_X = \frac{\partial u_\alpha}{H_\alpha \partial \alpha} + \frac{u_n}{R_\alpha} \quad (25)$$

Yksidimensioisen sauvan tapauksessa koordinaatti  $\alpha$  voidaan valita mittaamaan sauvan pituutta, jolloin mittakaavatekijä  $H_\alpha = 1$ . Saatu tulos on sopuoinnussa kirjallisuudessa esiintyvien venymän lausekkeiden kanssa.

## VEDETTY JA TAIVUTETTU SAUVA

Yhdistetään seuraavaksi edelliseen tarkasteluun taivutuksen osuus. Tällöin tehtävä on tulkittavissa kaksidimensioiseksi. Oletetaan rakenteen sijaitsevan edelleen  $x, z$ -tasossa ja  $\alpha$ -koordinaatin yhtyvän sauvan akseliin, jonka normaali on  $n$ . Mielivaltaiseen sauvan akselin pisteeseen  $O'$  viritetyt tangentin ja normaalin suuntaiset yksikkövektorit ovat kuten edellä  $\vec{e}_\alpha$  ja  $\vec{e}_n$ , kuva 5. Jos piste  $P'$  sijaitsee sauvan akselilla olevan pisteen  $O'$  kautta kulkevalla normaalilla etäisyydellä  $n$  sauvan akselista, tämän pisteen siirtymävektori voidaan esittää ns. TIMOSHENKO:n palkkiteorian mukaan muodossa

$$\vec{u}(\alpha, n) = [u_\alpha(\alpha) - n\theta(\alpha)] \vec{e}_\alpha(\alpha) + u_n(\alpha) \vec{e}_n(\alpha) \quad (26)$$

Funktio  $\theta(\alpha)$  on alkutilassa sauvan akselin normaalilla olevan materiaalisäikeen rotaatio rakenteen tasoa vastaan kohtisuoran akselin ympäri, mikä tarkoittaa sitä, että normaalin ei oleteta välttämättä pysyvän kohtisuorassa sauvan akselia vastaan deformaation tapahtuessa, vaan leikkausmuodonmuutoksia sallitaan syntyvän. TIMOSHENKO:n palkkiteoria ottaa siis likimääräisesti huomioon sauvan leikkausmuodonmuutokset. Kiinnitetään paikallinen suorakulmainen koordinaattijärjestelmä  $X, Z$  nyt siihen sauvan akselin pisteeseen, jonka kautta kulkevalla normaalilla sijaitsevassa pisteessä muodonmuutokset on tarkoitus määrittää, kuvassa 5 pisteeseen  $O$ . Sauvassa on kaksi nollasta eroavaa muodonmuutoskomponenttia  $\epsilon_X$  ja  $\gamma_{ZX}$  ja niiden lausekkeet ovat

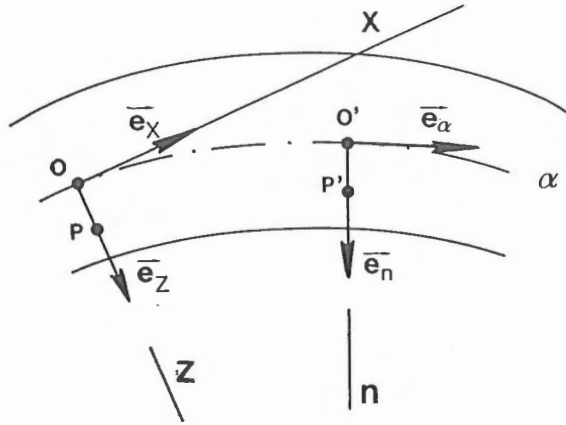
$$\begin{aligned} \epsilon_X &= \frac{\partial u_X}{\partial X} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial X} \cdot \vec{e}_X \\ \gamma_{ZX} &= \frac{\partial u_Z}{\partial X} + \frac{\partial u_X}{\partial Z} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial X} \cdot \vec{e}_Z + \frac{\partial \vec{u}}{\partial Z} \cdot \vec{e}_X \end{aligned} \quad (27)$$

Muodonmuutokset voidaan jälleen laskea välittömästi numeerisesti näistä yhtälöistä, kun siirtymävektori tai sen interpolantti tunnetaan. Analyttisten lausekkeiden löytämiseksi sijoitetaan siirtymän esitys (26) muodonmuutosten kaavoihin (27), jolloin saadaan, esimerkkinä venymän  $\epsilon_X$  lauseke

$$\epsilon_X = \left[ \left( \frac{\partial u_\alpha}{\partial X} - \frac{\partial n}{\partial X} \theta - n \frac{\partial \theta}{\partial X} \right) \vec{e}_\alpha + (u_\alpha - n\theta) \frac{\partial \vec{e}_\alpha}{\partial X} + \frac{\partial u_n}{\partial X} \vec{e}_n + u_n \frac{\partial \vec{e}_n}{\partial X} \right] \cdot \vec{e}_X \quad (28)$$

Derivointisääntöä (5), joka on tässä tapauksessa

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial X} \\ \frac{\partial}{\partial Z} \end{array} \right\} = \mathbf{J}^{-1} \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial}{\partial n} \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{cc} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} \cdot \vec{e}_X & \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} \cdot \vec{e}_Z \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial n} \cdot \vec{e}_X & \frac{\partial \vec{r}}{\partial n} \cdot \vec{e}_Z \end{array} \right]^{-1} \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial}{\partial n} \end{array} \right\} \quad (29)$$



Kuva 5. Vedetty ja taivutettu kaareva sauvarakenne.

sovellettaessa eli Jacobin matriisiin alkioita laskettaessa käytetään hyväksi sitä seikkaa, että pisteen P' paikkavektori voidaan jakaa kahteen komponenttiin, joista edellinen on vastaavan sauvan akselilla sijaitsevan pisteen O' paikkavektori ja jälkimmäinen tässä pisteessä määritellyn normaalin suuntainen vektori. Paikkavektori  $\vec{r}_{P'}$  voidaan esittää muodossa

$$\vec{r}_{P'}(\alpha, n) = \vec{r}(\alpha, n) = \vec{r}_{O'}(\alpha) + n\vec{e}_n(\alpha) \quad (30)$$

josta lasketaan tarvittavien derivaattojen lausekkeet. Nämä ovat

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} &= \frac{\partial \vec{r}_{O'}}{\partial \alpha} + n \frac{\partial \vec{e}_n}{\partial \alpha} = H_\alpha \vec{e}_\alpha + n \frac{\partial \vec{e}_n}{\partial \alpha} = H_\alpha \left(1 + \frac{n}{R_\alpha}\right) \vec{e}_\alpha \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial n} &= \vec{e}_n \end{aligned} \quad (31)$$

Palautetaan tarkastelu normaalilla O'P' sijaitsevasta pisteestä P' normaalilla OP sijaitsevaan pisteeseen P, jossa muodonmuutoskomponentteja määritetään. Tällöin ovat voimassa yksikkövektorien väliset yhteydet  $\vec{e}_\alpha = \vec{e}_X$  ja  $\vec{e}_n = \vec{e}_Z$  sekä laskusäännöt (22) ovat sovellettavissa. Jacobin matriisi yhtälössä (29) saa diagonaalisen muodon, joten derivoimissääntö on

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial X} \\ \frac{\partial}{\partial Z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_\alpha^{-1} \left(1 + \frac{n}{R_\alpha}\right)^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial}{\partial n} \end{Bmatrix} \quad (32)$$

Aksiaalinen venymä pisteessä P on täten

$$\begin{aligned} \epsilon_\alpha = \epsilon_X &= H_\alpha^{-1} \left(1 + \frac{n}{R_\alpha}\right)^{-1} \left[ \left( \frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} - \frac{\partial n}{\partial \alpha} \theta - n \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} \right) \vec{e}_\alpha + \right. \\ &\quad \left. + (u_\alpha - n\theta) \frac{\partial \vec{e}_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial u_n}{\partial \alpha} \vec{e}_n + u_n \frac{\partial \vec{e}_n}{\partial \alpha} \right] \cdot \vec{e}_\alpha \end{aligned} \quad (33)$$

Sovelletaan jälleen yksikkövektoreiden derivaattojen lausekkeita (9) sekä ortogonaalisuusehtoja (22) ja otetaan lisäksi huomioon, että  $n$  ja  $\alpha$  ovat riippumattomia muuttujia, jolloin termi  $\partial n / \partial \alpha$  häviää. Näin aksiaalisen muodonmuutoskomponentin lauseke, ja vastaavilla laskutoimituksilla määritetty leikkausmuodonmuutoksen  $\gamma_{n\alpha}$  lauseke saadaan lopulliseen muotoonsa

$$\begin{aligned}\epsilon_\alpha &= \left(1 + \frac{n}{R_\alpha}\right)^{-1} \left(\frac{\partial u_\alpha}{H_\alpha \partial \alpha} - n \frac{\partial \theta}{H_\alpha \partial \alpha} + \frac{u_n}{R_\alpha}\right) \\ \gamma_{n\alpha} &= \left(1 + \frac{n}{R_\alpha}\right)^{-1} \left(-\frac{u_\alpha - n\theta}{R_\alpha} + \frac{\partial u_n}{H_\alpha \partial \alpha}\right) - \theta\end{aligned}\quad (34)$$

Usein on kiinnostavaa esittää muodonmuutosten lausekkeissa normaalin suuntaisesta koordinaatista  $n$  korkeintaan lineaarisesti riippuvat termit. Tätä varten voidaan lausekkeet kehittää  $n:n$  kasvavien potenssien mukaan sarjaksi seuraavasti

$$\begin{aligned}\epsilon_\alpha &= \frac{\partial u_\alpha}{H_\alpha \partial \alpha} + \frac{u_n}{R_\alpha} - \frac{n}{R_\alpha} \left(\frac{\partial u_\alpha}{H_\alpha \partial \alpha} + \frac{u_n}{R_\alpha} + \frac{R_\alpha \partial \theta}{H_\alpha \partial \alpha}\right) + O(n^2) \\ \gamma_{n\alpha} &= \left(1 - \frac{n}{R_\alpha} + O(n^2)\right) \left(\frac{\partial u_n}{H_\alpha \partial \alpha} - \frac{u_\alpha}{R_\alpha} - \theta\right)\end{aligned}\quad (35)$$

Muodonmuutosten lausekkeet voidaan myös muodostaa soveltamalla teknillisen taivutusteorian pohjana olevaa BERNOULLI:n otaksumaa, jonka mukaan leikkausmuodonmuutos palkissa häviää. Rotaatiotermin arvo voidaan määrittää vaatimalla, että leikkausmuodonmuutos yhtälössä (34) tai jälkimmäisessä yhtälöistä (35) saa arvon nolla eli  $\gamma_{n\alpha} \equiv 0$ . Tällöin rotaatiofunktion lausekkeeksi saadaan

$$\theta = \frac{\partial u_n}{H_\alpha \partial \alpha} - \frac{u_\alpha}{R_\alpha}\quad (36)$$

Sijoittamalla tämä aksiaalisen venymän lausekkeeseen (34) tuloksena on

$$\epsilon_\alpha = \frac{\partial u_\alpha}{H_\alpha \partial \alpha} + \left(1 + \frac{n}{R_\alpha}\right)^{-1} \left[\frac{u_n}{R_\alpha} - n \left(\frac{u_\alpha}{R_\alpha^2} \frac{\partial R_\alpha}{H_\alpha \partial \alpha} + \frac{\partial}{H_\alpha \partial \alpha} \left(\frac{\partial u_n}{H_\alpha \partial \alpha}\right)\right)\right]\quad (37)$$

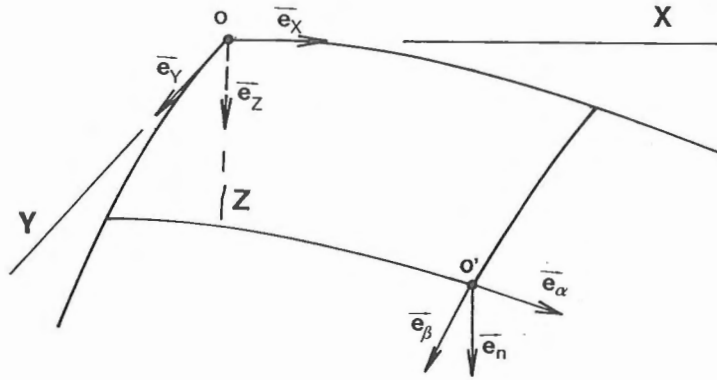
Sarjakehitelmän käyttö antaa vielä tuloksen

$$\epsilon_\alpha = \frac{\partial u_\alpha}{H_\alpha \partial \alpha} + \frac{u_n}{R_\alpha} - n \left[\frac{u_n}{R_\alpha^2} + \frac{u_\alpha}{R_\alpha^2} \frac{\partial R_\alpha}{H_\alpha \partial \alpha} + \frac{\partial}{H_\alpha \partial \alpha} \left(\frac{\partial u_n}{H_\alpha \partial \alpha}\right)\right] + O(n^2)\quad (38)$$

Lausekkeesta (37) on helposti johdettavissa tuttu suoran sauvan taivutukseen liittyvä aksiaalisen venymän lauseke ottamalla huomioon, että  $R_\alpha = \infty$ ,  $H_\alpha = 1$  sekä vaihtamalla koordinaattien symbolit  $\alpha \rightarrow x$  ja  $n \rightarrow y$ . Tulokseksi saadaan

$$\epsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} - y \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}\quad (39)$$

Kirjallisuudesta on myös helposti todettavissa saatujen tulosten oikeellisuus.



Kuva 6. Kuorirakenteen referenssipinta.

### KUOREN KALVOTILA

Siirrytään nyt tarkastelemaan kuvassa 6 esitetyn kuoren referenssipinnan muodonmuutoksien määrittämistä. Kuoren käyräviivaisten pintakoordinaattien  $\alpha$  ja  $\beta$  ja normaalin  $n$  suuntaiset yksikkövektorit ovat  $\vec{e}_\alpha$ ,  $\vec{e}_\beta$  ja  $\vec{e}_n$ . Otaksutaan edelleen, että koordinaatit  $\alpha$  ja  $\beta$  ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, eli että kyseessä on ortogonaalijärjestelmä. Kuoren mielivaltaisen pisteen  $O'$  siirtymävektori voidaan esittää muodossa

$$\vec{u}(\alpha, \beta) = u_\alpha(\alpha, \beta)\vec{e}_\alpha(\alpha, \beta) + u_\beta(\alpha, \beta)\vec{e}_\beta(\alpha, \beta) + u_n(\alpha, \beta)\vec{e}_n(\alpha, \beta) \quad (40)$$

Asetetaan pinnan pisteeseen  $O$  paikallinen kiinteä koordinaattijärjestelmä  $X, Y$ . Muodonmuutoskomponentit, jotka tulevat nyt tarkastelussa kyseeseen, ovat venymät kummankin pintakoordinaatin suunnassa ja leikkausmuodonmuutos pinnan tasossa eli

$$\begin{aligned} \epsilon_X &= \frac{\partial u_X}{\partial X} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial X} \cdot \vec{e}_X \\ \epsilon_Y &= \frac{\partial u_Y}{\partial Y} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial Y} \cdot \vec{e}_Y \\ \gamma_{XY} &= \frac{\partial u_X}{\partial Y} + \frac{\partial u_Y}{\partial X} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial Y} \cdot \vec{e}_X + \frac{\partial \vec{u}}{\partial X} \cdot \vec{e}_Y \end{aligned} \quad (41)$$

Pisteessä  $O$  kummatkin ortogonaaliset koordinaattijärjestelmät yhtyvät, jolloin koordinaatistonmuunnos- eli Jacobin matriisi saa yksinkertaisen diagonaalisen muodon:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} \cdot \vec{e}_X & \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} \cdot \vec{e}_Y \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial \beta} \cdot \vec{e}_X & \frac{\partial \vec{r}}{\partial \beta} \cdot \vec{e}_Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_\alpha & 0 \\ 0 & H_\beta \end{bmatrix} \quad (42)$$

Sijoittamalla siirtymävektori (40) muodonmuutosten lausekkeisiin (41), ottamalla huomioon derivointikaavassa (5) Jacobin matriisi (42) ja koordinaattien yhtenevyys, venymän  $\epsilon_X$  lauseke voidaan esimerkkinä välittömästi kirjoittaa muotoon

$$\epsilon_\alpha = \epsilon_X = H_\alpha^{-1} \left( \frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} \vec{e}_\alpha + u_\alpha \frac{\partial \vec{e}_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial u_\beta}{\partial \alpha} \vec{e}_\beta + u_\beta \frac{\partial \vec{e}_\beta}{\partial \alpha} + \frac{\partial u_n}{\partial \alpha} \vec{e}_n + u_n \frac{\partial \vec{e}_n}{\partial \alpha} \right) \cdot \vec{e}_\alpha \quad (43)$$

Sijoittamalla tähän yksikkövektoreiden derivaatat lausekkeista (9), nolasta eroavien muodonmuutosten lausekkeiksi saadaan

$$\begin{aligned}\epsilon_\alpha &= \frac{\partial u_\alpha}{H_\alpha \partial \alpha} + \frac{u_\beta}{H_\alpha} \frac{\partial H_\alpha}{H_\beta \partial \beta} + \frac{u_n}{R_\alpha} \\ \epsilon_\beta &= \frac{\partial u_\beta}{H_\beta \partial \beta} + \frac{u_\alpha}{H_\beta} \frac{\partial H_\beta}{H_\alpha \partial \alpha} + \frac{u_n}{R_\beta} \\ \gamma_{\alpha\beta} &= \frac{\partial u_\alpha}{H_\beta \partial \beta} + \frac{\partial u_\beta}{H_\alpha \partial \alpha} - \frac{u_\alpha}{H_\alpha} \frac{\partial H_\alpha}{H_\beta \partial \beta} - \frac{u_\beta}{H_\beta} \frac{\partial H_\beta}{H_\alpha \partial \alpha} - \frac{2u_n}{R_{\alpha\beta}}\end{aligned}\quad (44)$$

jotka vastaavat täsmälleen kirjallisuudessa esitettyjä kuoren referenssipinnan muodonmuutosten lausekkeita; esimerkiksi NOVOZHILOV (1964) tai MIKKOLA (1986).

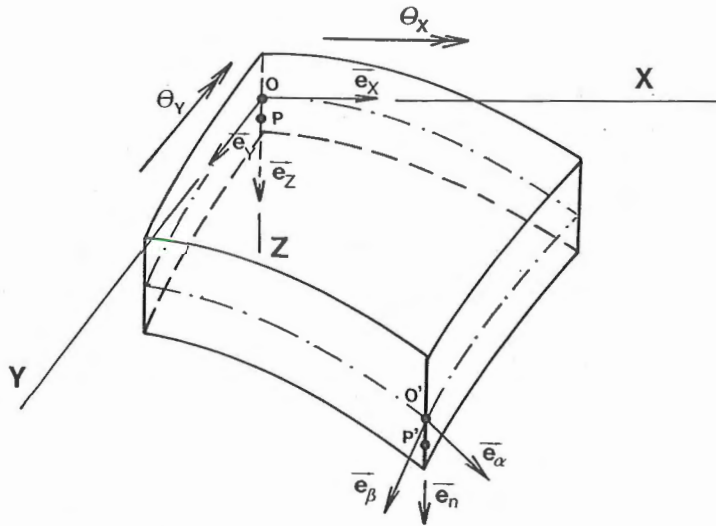
### KUOREN TAIVUTUSTILA

Siirrytään seuraavaksi tarkastelemaan kuorirakenteen taivutusproblemaa. Käytetty koordinaattijärjestelmä on samanlainen kuin edellä referenssipinnan muodonmuutoksia määritettäessä. Sijaitkoon piste P' analogisesti taivutetun sauvan tapauksen kanssa sillä pinnan normaalilla, joka leikkaa kuoren referenssipinnan pisteessä O'. Tällöin pisteen P' siirtymävektori voidaan esittää REISSNER-MINDLIN:n laattateorian mukaisesti muodossa

$$\begin{aligned}\vec{u}(\alpha, \beta, n) &= [u_\alpha(\alpha, \beta) - n\theta_\beta(\alpha, \beta)] \vec{e}_\alpha(\alpha, \beta) + [u_\beta(\alpha, \beta) - n\theta_\alpha(\alpha, \beta)] \vec{e}_\beta(\alpha, \beta) + \\ &+ u_n(\alpha, \beta) \vec{e}_n(\alpha, \beta)\end{aligned}\quad (45)$$

Kyseessä on TIMOSHENKO:n palkkiteorian mukainen vastine laatta- tai kuorirakenteelle. Funktiot  $\theta_\alpha(\alpha, \beta)$  ja  $\theta_\beta(\alpha, \beta)$  ovat kuoren normaalilla olevan materiaalisäikeen rotaatiokomponentit  $\alpha$ - ja  $\beta$ -suuntaisten koordinaattiviivojen ympäri. Rotaatioiden kiertosuunnat on valittu positiivisiksi kuvan 7 osoittamalla tavalla. Toinen kirjallisuudessa käytetty tapa on valita kiertosuunta positiiviseksi silloin, kun kummatkin rotaatiokomponentit ovat positiivisten koordinaattiakselien suuntaisia. Jälkimmäisen käytännön mukaan rotaatiokomponentin  $\theta_\beta$  eteen tulisi yhtälössä (45) positiivinen etumerkki. Kiinnitetään jälleen paikallinen suorakulmainen karteeminen koordinaattijärjestelmä kuoren referenssipinnan pisteeseen O, jonka kautta kulkevalla normaalilla piste P sijaitsee. Muodonmuutoskomponentit, joista ainoastaan kuoren normaalin suuntainen häviää, ts.  $\epsilon_z = 0$ , ovat

$$\begin{aligned}\epsilon_X &= \frac{\partial u_X}{\partial X} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial X} \cdot \vec{e}_X \\ \epsilon_Y &= \frac{\partial u_Y}{\partial Y} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial Y} \cdot \vec{e}_Y \\ \gamma_{XY} &= \frac{\partial u_X}{\partial Y} + \frac{\partial u_Y}{\partial X} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial Y} \cdot \vec{e}_X + \frac{\partial \vec{u}}{\partial X} \cdot \vec{e}_Y \\ \gamma_{YZ} &= \frac{\partial u_Y}{\partial Z} + \frac{\partial u_Z}{\partial Y} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial Z} \cdot \vec{e}_Y + \frac{\partial \vec{u}}{\partial Y} \cdot \vec{e}_Z \\ \gamma_{ZX} &= \frac{\partial u_Z}{\partial X} + \frac{\partial u_X}{\partial Z} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial X} \cdot \vec{e}_Z + \frac{\partial \vec{u}}{\partial Z} \cdot \vec{e}_X\end{aligned}\quad (46)$$



Kuva 7. Yleinen kuorirakenne.

Kaavan (30) ilmeinen vastine tässä on

$$\vec{r}(\alpha, \beta, n) = \vec{r}_{O'}(\alpha, \beta) + n\vec{e}_n(\alpha, \beta) \quad (47)$$

Sijoittamalla tästä lasketut derivaatat

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} &= \frac{\partial \vec{r}_{O'}}{\partial \alpha} + n \frac{\partial \vec{e}_n}{\partial \alpha} = H_\alpha \left(1 + \frac{n}{R_\alpha}\right) \vec{e}_\alpha - H_\alpha \frac{n}{R_{\alpha\beta}} \vec{e}_\beta \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial \beta} &= \frac{\partial \vec{r}_{O'}}{\partial \beta} + n \frac{\partial \vec{e}_n}{\partial \beta} = -H_\beta \frac{n}{R_{\alpha\beta}} \vec{e}_\alpha + H_\beta \left(1 + \frac{n}{R_\beta}\right) \vec{e}_\beta \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial n} &= \vec{e}_n \end{aligned} \quad (48)$$

Jacobin matriisiin (8) ja suorittamalla tarkastelu sen pisteen O kautta kulkevalla normaalilla, jossa paikallinen ortogonaalinen koordinaattijärjestelmä on viritetty, saadaan kuten aikaisemmin

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} \cdot \vec{e}_X & \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} \cdot \vec{e}_Y & \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} \cdot \vec{e}_Z \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial \beta} \cdot \vec{e}_X & \frac{\partial \vec{r}}{\partial \beta} \cdot \vec{e}_Y & \frac{\partial \vec{r}}{\partial \beta} \cdot \vec{e}_Z \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial n} \cdot \vec{e}_X & \frac{\partial \vec{r}}{\partial n} \cdot \vec{e}_Y & \frac{\partial \vec{r}}{\partial n} \cdot \vec{e}_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_\alpha \left(1 + \frac{n}{R_\alpha}\right) & -H_\alpha \frac{n}{R_{\alpha\beta}} & 0 \\ -H_\beta \frac{n}{R_{\alpha\beta}} & H_\beta \left(1 + \frac{n}{R_\beta}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (49)$$

Saatu matriisi ei ole enää diagonaali muotoinen, koska koordinaattiviivat  $\alpha$  ja  $\beta$  eivät välttämättä ole pisteen P kautta kulkevalla pinnalla enää ortogonaalisia. Tästä johtuen tarvittavan kääntematriisin alkiot tulevat varsin mutkikkaiksi. Samoin muodonmuutoskomponentit eri koordinaattijärjestelmissä eivät ole referenssipinnan ulkopuolisissa pisteissä enää keskenään yhtäsuuria, ts.  $\epsilon_\alpha \neq \epsilon_X$  jne. Siirtämällä tarkastelu tässä vaiheessa pääkaarevuuskoordinaatistoon, jossa kierevyys häviää, ts.

$1/R_{\alpha\beta} = 0$  ja ortogonaalisuusehto säilyy, päästään jälleen diagonaalimuotoiseen matriisiin, jonka kääntäminen onnistuu helposti.

Sijoittamalla siirtymävektori (45) muodonmuutosten lausekkeisiin (46), ottamalla huomioon ketjuderivointisääntö (49) ja suorittamalla lopullinen tarkastelu normaalilla OP saadaan muodonmuutoksille lausekkeet

$$\begin{aligned}
 \epsilon_\alpha &= \left(1 + \frac{n}{R_\alpha}\right)^{-1} \left( \frac{\partial u_\alpha}{H_\alpha \partial \alpha} - n \frac{\partial \theta_\beta}{H_\alpha \partial \alpha} + (u_\beta - n\theta_\alpha) \frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial H_\alpha}{H_\beta \partial \beta} + \frac{u_n}{R_\alpha} \right) \\
 \epsilon_\beta &= \left(1 + \frac{n}{R_\beta}\right)^{-1} \left( \frac{\partial u_\beta}{H_\beta \partial \beta} - n \frac{\partial \theta_\alpha}{H_\beta \partial \beta} + (u_\alpha - n\theta_\beta) \frac{1}{H_\beta} \frac{\partial H_\beta}{H_\alpha \partial \alpha} + \frac{u_n}{R_\beta} \right) \\
 \gamma_{\alpha\beta} &= \left(1 + \frac{n}{R_\alpha}\right)^{-1} \left( \frac{\partial u_\beta}{H_\alpha \partial \alpha} - n \frac{\partial \theta_\alpha}{H_\alpha \partial \alpha} - (u_\alpha - n\theta_\beta) \frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial H_\alpha}{H_\beta \partial \beta} \right) + \\
 &\quad + \left(1 + \frac{n}{R_\beta}\right)^{-1} \left( \frac{\partial u_\alpha}{H_\beta \partial \beta} - n \frac{\partial \theta_\beta}{H_\beta \partial \beta} - (u_\beta - n\theta_\alpha) \frac{1}{H_\beta} \frac{\partial H_\beta}{H_\alpha \partial \alpha} \right) \\
 \gamma_{\beta n} &= \left(1 + \frac{n}{R_\beta}\right)^{-1} \left( \frac{\partial u_n}{H_\beta \partial \beta} - \frac{u_\beta - n\theta_\alpha}{R_\beta} \right) - \theta_\alpha \\
 \gamma_{n\alpha} &= \left(1 + \frac{n}{R_\alpha}\right)^{-1} \left( \frac{\partial u_n}{H_\alpha \partial \alpha} - \frac{u_\alpha - n\theta_\beta}{R_\alpha} \right) - \theta_\beta
 \end{aligned} \tag{50}$$

Nämä voidaan esittää tavanomaisesti myös  $n$ :n kasvavan potenssin mukaan kehitettyinä sarjoina. Ottamalla käyttöön eri kertoimille lyhennysmerkinnät, joihin liittyy perinteinen deformaatiotilan geometrinen tulkinta, saadaan lausekkeet

$$\begin{aligned}
 \epsilon_\alpha &= \epsilon_\alpha^o + n\kappa_\alpha + O(n^2) \\
 \epsilon_\beta &= \epsilon_\beta^o + n\kappa_\beta + O(n^2) \\
 \gamma_{\alpha\beta} &= \gamma_{\alpha\beta}^o + n\kappa_{\alpha\beta} + O(n^2) \\
 \gamma_{\beta n} &= \gamma_{\beta n}^o + n\kappa_{\beta n} + O(n^2) \\
 \gamma_{n\alpha} &= \gamma_{n\alpha}^o + n\kappa_{n\alpha} + O(n^2)
 \end{aligned} \tag{51}$$

Vakiotermit, joissa yläindeksi nolla viittaa kuoren referenssipintaan, edustavat kalvotilan muodonmuutoksia eli venymiä ja kokoonpuristumia. Lineaarisesti kuoren normaalikoordinaatista riippuvien termien kertoimet eivät sensijaan kuitenkaan REISSNER-MINDLIN:n teorian mukaan enää vastaa rakenteen referenssipinnan kaarevuuksien muutoksia. Niille voidaan luonnollisesti käyttää nimityksenä termiä käyritymä, mutta tällöin on pidettävä mielessä kertoimien geometrinen merkitys ja eroavaisuus perinteisen laatta- ja kuoriteorian vastaavista käsitteistä. Referenssipinnan venymien lausekkeet ovat

$$\begin{aligned}
 \epsilon_\alpha^o &= \frac{\partial u_\alpha}{H_\alpha \partial \alpha} + \frac{u_\beta}{H_\alpha} \frac{\partial H_\alpha}{H_\beta \partial \beta} + \frac{u_n}{R_\alpha} \\
 \epsilon_\beta^o &= \frac{\partial u_\beta}{H_\beta \partial \beta} + \frac{u_\alpha}{H_\beta} \frac{\partial H_\beta}{H_\alpha \partial \alpha} + \frac{u_n}{R_\beta} \\
 \gamma_{\alpha\beta}^o &= \frac{\partial u_\alpha}{H_\beta \partial \beta} + \frac{\partial u_\beta}{H_\alpha \partial \alpha} - \frac{u_\alpha}{H_\alpha} \frac{\partial H_\alpha}{H_\beta \partial \beta} - \frac{u_\beta}{H_\beta} \frac{\partial H_\beta}{H_\alpha \partial \alpha} \\
 \gamma_{\beta n}^o &= \frac{\partial u_n}{H_\beta \partial \beta} - \frac{u_\beta}{R_\beta} - \theta_\alpha = -R_\beta \kappa_{\beta n} \\
 \gamma_{n\alpha}^o &= \frac{\partial u_n}{H_\alpha \partial \alpha} - \frac{u_\alpha}{R_\alpha} - \theta_\beta = -R_\alpha \kappa_{n\alpha}
 \end{aligned} \tag{52}$$

Vastaavasti käyristymiin rinnastettavat termit ovat

$$\begin{aligned}
 \kappa_\alpha &= -\frac{1}{R_\alpha} \left( \frac{\partial u_\alpha}{H_\alpha \partial \alpha} + \frac{u_\beta + R_\alpha \theta_\alpha}{H_\alpha} \frac{\partial H_\alpha}{H_\beta \partial \beta} + \frac{u_n}{R_\alpha} + \frac{R_\alpha \partial \theta_\beta}{H_\alpha \partial \alpha} \right) \\
 \kappa_\beta &= -\frac{1}{R_\beta} \left( \frac{\partial u_\beta}{H_\beta \partial \beta} + \frac{u_\alpha + R_\beta \theta_\beta}{H_\beta} \frac{\partial H_\beta}{H_\alpha \partial \alpha} + \frac{u_n}{R_\beta} + \frac{R_\beta \partial \theta_\alpha}{H_\beta \partial \beta} \right) \\
 \kappa_{\alpha\beta} &= -\frac{1}{R_\alpha} \left( \frac{\partial u_\beta}{H_\alpha \partial \alpha} - \frac{u_\alpha + R_\alpha \theta_\beta}{H_\alpha} \frac{\partial H_\alpha}{H_\beta \partial \beta} + \frac{R_\alpha \partial \theta_\alpha}{H_\alpha \partial \alpha} \right) - \\
 &\quad - \frac{1}{R_\beta} \left( \frac{\partial u_\alpha}{H_\beta \partial \beta} - \frac{u_\beta + R_\beta \theta_\alpha}{H_\beta} \frac{\partial H_\beta}{H_\alpha \partial \alpha} + \frac{R_\beta \partial \theta_\beta}{H_\beta \partial \beta} \right)
 \end{aligned} \tag{53}$$

KIRCHHOFF-LOVE:n laattateorian perusteella otaksoma ohuen kuoren normaalien pysymisestä normaaleina myös rakenteen deformatiivisessa tilassa vastaa sitä, että leikkausmuodonmuutokset laatan paksuuden yli häviävät. Riippumattomien rotaatiotermien lausekkeet voidaan ratkaista tästä ehdosta asettamalla esimerkiksi kahdessa viimeisessä yhtälöistä (52) leikkausmuodonmuutoksien lausekkeet nolliksi  $\gamma_{\beta n} = \gamma_{n\alpha} = 0$ . Tällöin saadaan

$$\begin{aligned}
 \theta_\alpha &= \frac{\partial u_n}{H_\beta \partial \beta} - \frac{u_\beta}{R_\beta} \\
 \theta_\beta &= \frac{\partial u_n}{H_\alpha \partial \alpha} - \frac{u_\alpha}{R_\alpha}
 \end{aligned} \tag{54}$$

Sijoittamalla nämä yhteydet muodonmuutosten lausekkeisiin (50) päädytään vastaaviin tavanomaisen kuoriteorian mukaisiin lausekkeisiin

$$\begin{aligned}
 \epsilon_\alpha &= \frac{\partial u_\alpha}{H_\alpha \partial \alpha} + \left(1 + \frac{n}{R_\alpha}\right)^{-1} \left[ \left(1 + \frac{n}{R_\beta}\right) \frac{u_\beta}{H_\alpha} \frac{\partial H_\alpha}{H_\beta \partial \beta} + \frac{u_n}{R_\alpha} - \right. \\
 &\quad \left. - n \left( \frac{u_\alpha}{R_\alpha^2} \frac{\partial R_\alpha}{H_\alpha \partial \alpha} + \frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial u_n}{H_\beta \partial \beta} \frac{\partial H_\alpha}{H_\beta \partial \beta} + \frac{\partial}{H_\alpha \partial \alpha} \left( \frac{\partial u_n}{H_\alpha \partial \alpha} \right) \right) \right] \\
 \epsilon_\beta &= \frac{\partial u_\beta}{H_\beta \partial \beta} + \left(1 + \frac{n}{R_\beta}\right)^{-1} \left[ \left(1 + \frac{n}{R_\alpha}\right) \frac{u_\alpha}{H_\beta} \frac{\partial H_\beta}{H_\alpha \partial \alpha} + \frac{u_n}{R_\beta} - \right. \\
 &\quad \left. - n \left( \frac{u_\beta}{R_\beta^2} \frac{\partial R_\beta}{H_\beta \partial \beta} + \frac{1}{H_\beta} \frac{\partial u_n}{H_\alpha \partial \alpha} \frac{\partial H_\beta}{H_\alpha \partial \alpha} + \frac{\partial}{H_\beta \partial \beta} \left( \frac{\partial u_n}{H_\beta \partial \beta} \right) \right) \right] \\
 \gamma_{\alpha\beta} &= -\frac{u_\alpha}{H_\alpha} \frac{\partial H_\alpha}{H_\beta \partial \beta} - \frac{u_\beta}{H_\beta} \frac{\partial H_\beta}{H_\alpha \partial \alpha} + \left(1 + \frac{n}{R_\alpha}\right)^{-1} \left[ \left(1 + \frac{n}{R_\beta}\right) \frac{\partial u_\beta}{H_\alpha \partial \alpha} - \right. \\
 &\quad \left. - n \left( \frac{u_\beta}{R_\beta^2} \frac{\partial R_\beta}{H_\alpha \partial \alpha} - \frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial u_n}{H_\alpha \partial \alpha} \frac{\partial H_\alpha}{H_\beta \partial \beta} + \frac{\partial}{H_\alpha \partial \alpha} \left( \frac{\partial u_n}{H_\beta \partial \beta} \right) \right) \right] + \\
 &\quad + \left(1 + \frac{n}{R_\beta}\right)^{-1} \left[ \left(1 + \frac{n}{R_\alpha}\right) \frac{\partial u_\alpha}{H_\beta \partial \beta} - n \left( \frac{u_\alpha}{R_\alpha^2} \frac{\partial R_\alpha}{H_\beta \partial \beta} - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{1}{H_\beta} \frac{\partial u_n}{H_\beta \partial \beta} \frac{\partial H_\beta}{H_\alpha \partial \alpha} + \frac{\partial}{H_\beta \partial \beta} \left( \frac{\partial u_n}{H_\alpha \partial \alpha} \right) \right) \right]
 \end{aligned} \tag{55}$$

Nämä voidaan lopuksi haluttaessa esittää  $n$ :n kasvavien potenssien mukaan kehitettyinä sarjoina, vastaten lausekkeita (51), joissa keskipinnan muodonmuutokset ovat samat



kuin yhtälöissä (52) esitetyt, mutta käyristymiin rinnastettavat termit ovat lausekkeiden (53) sijasta muotoa

$$\begin{aligned}
 \kappa_{\alpha} &= \left( \frac{1}{R_{\beta}} - \frac{1}{R_{\alpha}} \right) \frac{u_{\beta}}{H_{\alpha}} \frac{\partial H_{\alpha}}{H_{\beta} \partial \beta} - \frac{u_{\alpha}}{R_{\alpha}^2} \frac{\partial R_{\alpha}}{H_{\alpha} \partial \alpha} - \frac{u_n}{R_{\alpha}^2} - \frac{1}{H_{\alpha}} \frac{\partial u_n}{H_{\beta} \partial \beta} \frac{\partial H_{\alpha}}{H_{\beta} \partial \beta} - \frac{\partial}{H_{\alpha} \partial \alpha} \left( \frac{\partial u_n}{H_{\alpha} \partial \alpha} \right) \\
 \kappa_{\beta} &= \left( \frac{1}{R_{\alpha}} - \frac{1}{R_{\beta}} \right) \frac{u_{\alpha}}{H_{\beta}} \frac{\partial H_{\beta}}{H_{\alpha} \partial \alpha} - \frac{u_{\beta}}{R_{\beta}^2} \frac{\partial R_{\beta}}{H_{\beta} \partial \beta} - \frac{u_n}{R_{\beta}^2} - \frac{1}{H_{\beta}} \frac{\partial u_n}{H_{\alpha} \partial \alpha} \frac{\partial H_{\beta}}{H_{\alpha} \partial \alpha} - \frac{\partial}{H_{\beta} \partial \beta} \left( \frac{\partial u_n}{H_{\beta} \partial \beta} \right) \\
 \kappa_{\alpha\beta} &= \left( \frac{1}{R_{\alpha}} - \frac{1}{R_{\beta}} \right) \left( \frac{\partial u_{\alpha}}{H_{\beta} \partial \beta} - \frac{\partial u_{\beta}}{H_{\alpha} \partial \alpha} \right) - \frac{u_{\alpha}}{R_{\alpha}^2} \frac{\partial R_{\alpha}}{H_{\beta} \partial \beta} - \frac{u_{\beta}}{R_{\beta}^2} \frac{\partial R_{\beta}}{H_{\alpha} \partial \alpha} - \frac{2}{H_{\alpha}} \frac{\partial u_n}{H_{\alpha} \partial \alpha} \frac{\partial H_{\alpha}}{H_{\beta} \partial \beta} \\
 &\quad - \frac{2}{H_{\beta}} \frac{\partial u_n}{H_{\beta} \partial \beta} \frac{\partial H_{\beta}}{H_{\alpha} \partial \alpha} - 2 \frac{\partial^2 u_n}{H_{\alpha} H_{\beta} \partial \alpha \partial \beta} \quad (56)
 \end{aligned}$$

Johdetut lausekkeet ovat yhteneväiset WASHIZU:n (1975) esittämien tulosten kanssa, mutta poikkeavat jonkin verran muun muassa NOVOZHILOV:n (1964) ja MIKKOLA:n (1986) esittämistä lausekkeista johtuen viimeainittujen tekemistä likimääräistyksistä kaavojen johdossa.

## YHTEENVETO

Artikkelissa on esitetty lähinnä opetustarkoituksia silmällä pitäen uusi lähestymistapa kaarevien sauva- ja kuorirakenteiden analyyttistä käsittelyä varten. Tässä menetelmässä käytetään hyväksi koordinaatioita, joiden ei tarvitse olla millään lailla mukautuneita tarkasteltavan rakenteen mahdollisesti mutkikkaaseen geometriaan. Muun muassa kuoriteoriaan usein liittyviä suhteellisen hankalia muodonmuutosten lausekkeita ei toki tässä yhteydessä pystytä välttämään, mutta esitetyn menettelyn suurena etuna on systemaattisuus, jonka avulla monimutkaisetkin lausekkeet voidaan johtaa periaatteessa hyvin yksinkertaisesti, ainoastaan matematiikan perusteisiin tukeutuvia laskentamenetelmiä käyttämällä. Samalla voidaan syrjäyttää erilaiset differentiaaligeometrian graafisiin kuvauksiin perustuvat, jossain määrin epämääräiset tarkastelutavat, joilla usein johdetaan eksakteja matemaattisia lausekkeita. Menetelmä on samalla tarkoitettu alentamaan sitä korkeaksi todettua kynnystä, joka monasti pyrkii vieroittamaan lukijan ja aivan erikoisesti opiskelijan rakenteiden mekaniikan tehtävien parista.

## KIITOKSET

Professori JUKKA AALTO Oulun yliopistosta on esittänyt artikkelin alkuperäisen käsikirjoituksen esitystapaa pedagogisesti parantavia täydennyksiä, joista esitämme parhaat kiitoksemme.

## KIRJALLISUUSREFERAATIT

*Flügge W.* (1966), *Stresses in Shells*. Springer-Verlag, New York.

*Flügge W.* (1972), *Tensor Analysis and Continuum Mechanics*. Springer-Verlag, New York.

*Irons B.M. ja Ahmad S. (1980), Techniques of Finite Elements. Ellis Horwood, Chichester.*

*Mikkola M. (1986), Levyjen, laattojen ja kuorien teoriaa. Otakustantamo moniste No. 275, 4.painos, Espoo.*

*Novozhilov V.V. (1964), Thin Shell Theory. P. Noordhoff Ltd. Translation, London.*

*Oden J.T. (1967), Mechanics of Elastic Structures. McGraw-Hill.*

*Washizu K. (1975), Variational Methods in Elasticity and Plasticity. 2.painos, Pergamon Press Ltd., London.*

*Vlasov V.Z. (1963), Thin-Walled Elastic Beams. Israel Program for Scientific Translations, Israel.*

*Väisälä K. (1975), Vektorianalyysi. 6.painos WSOY, Helsinki.*

*Juha Paavola, vieraileva tutkija, City University of London,  
rakenteiden mekaniikan apulaisprofessori, Teknillinen korkeakoulu,  
Eero-Matti Salonen, mekaniikan apulaisprofessori, Teknillinen korkeakoulu.*