

Martti Mikkola

Rakenteiden Mekaniikka, Vol. 24  
No 3 1991, ss. 28 - 37

**TIIVISTELMÄ:** Artikkelissa tarkastellaan kimmoisten rakenteiden epästabiiliutta ja jälki-kriittistä tilaa konservatiivisten kuormien alaisena. Lähtökohtana on diskretoidun rakenteen kokonaispotentiaalienergian lauseke. Tunnettuja teorioita valaistaan yksinkertaisten esimerkkien avulla. Tarkastelu rajoitetaan virheettömiin (täydellisiin) rakenteisiin.

## JOHDANTO

Rakenteiden staattisen epästabiiliuden arvioimiseen käytetään tavallisesti tasapainomenetelmää (häiriömenetelmää) tai energiamenetelmää. Perusteoriaa ja -menetelmiä kehittivät ennen muita Euler, Bryan ja Timoshenko. Modernin stabiiliusanalyysin kehittämisessä urauurtavaa työtä teki Koiter, joka väitöskirjassaan [1] esitti teorian kriittisen kuorman ja sen jälkeisen tilan määrittämiseen. Diskreettien systeemien yleistä stabiiliusteoriaa ovat tarkastelleet perusteellisesti myös Thompson ja Hunt [2] ja Croll ja Walker [3]. Tämän artikkelin tarkoituksena on käsitellä epälineaarisen konservatiivisen rakenteen epästabiiliutta ja epästabiiliustilan luonnetta ja pyrkiä havainnollistamaan niitä yksinkertaisten esimerkkien avulla. Esitys rajoittuu yksinkertaisiin kriittisiin pisteisiin ja täydellisiin (ideaalisiin) rakenteisiin.

## ENERGIAMENETELMÄ

Tarkastellaan kimmoisen rakenteen tasapainotilaa konservatiivisen kuormituksen alaisena (esim. painovoiman aiheuttama kuorma). Rakenteen siirtymätila ajatellaan kuvatuksi diskreetillä tavalla, esim. elementtimenetelmän avulla. Merkinnät ovat seuraavat. Rakenteen kokonaispotentiaalienergia on  $V(q, \Lambda)$ , jossa  $\Lambda$  on kuormaparametri ja  $q$  rakenteen siirtymävektori

$$q = \{q_1, \dots, q_n\}^T \quad (1)$$

Potentiaalienergian derivaattoja merkitään lyhyesti

$$V_i = \frac{\partial V}{\partial q_i}, \quad V_{ij} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}, \quad V_i' = \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial \Lambda}, \quad \dots \quad (2)$$

Tasapainon välttämätön ehto on, että potentiaalienergialla on stationaarinen arvo ts. sen ensimmäiset derivaatat siirtymien suhteen ovat nollia

$$V_i(q, \Lambda) = 0, \quad i = 1(1)n \quad (3)$$

Yhtälöt (3) ovat rakenteen tasapainoehdot. Kuormaparametrin muuttuessa nolasta lähtien ne määrittelevät rakenteen tasapainopolun  $(q, \Lambda)$   $(n+1)$ -ulotteisessa avaruudessa  $\mathcal{R}^{n+1} = \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}$ . Ratkaisu on yksikäsitteinen kuormittamattomassa tilassa ja pysyy sellaisena aina kriittiseen kuorman arvoon saakka. Tällöin tasapainopolulla on epäsäännöllisyyspiste: tapahtuu haaurautuminen eli bifurkaatio tai kysymyksessä on rajapiste (tasapainopolun tangentti on kohtisuorassa  $\Lambda$ -akselia vastaan). Yhtälöt (3) ovat epälineaariset, mikä tietenkin vaikeuttaa niiden ratkaisemista. Tunnetusti ratkaiseminen tapahtuu etenemällä askeleittain tasapainopolkua pitkin linearisoituja yhtälöitä käyttäen. Otaksutaan, että yhtälöiden (3) ratkaisu  $(q^\circ, \Lambda^\circ)$  tunnetaan. Etsitään uusi ratkaisu  $(q^\circ + u, \Lambda^\circ + \lambda)$  pisteen  $(q^\circ, \Lambda^\circ)$  ympäristöstä Newtonin-Raphsonin menetelmää käyttäen

$$V_{ij}(q^\circ + u^n, \Lambda) u_j^{n+1} + V_i(q^\circ + u^n, \Lambda) = 0, \quad n = 0, 1, \dots, \quad u^\circ = 0 \quad (4)$$

Edellytys ratkaisun onnistumiselle luonnollisesti on, että tangenttijäykkyyssmatriisi  $[V_{ij}]$  on säännöllinen. Yhtälöiden (4) ratkaisu antaa siis lisäysvektorin  $u = u(\lambda)$  kuorman lisäyksen  $\lambda$  funktiona.

## KRIITTINEN PISTE JA SEN OMINAISUUDET

Säännöllisyyspisteissä tangenttijäykkyyssmatriisi on positiivisesti definiitti ja sen kaikki ominaisarvot ovat positiivisia. Sen määrittelemä kuvaus  $\mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^n$  on kääntäen yksikäsitteinen. Epäsäännöllisyyspisteessä  $(q^c, \Lambda^c)$  tangenttijäykkyyssmatriisi on singulaarinen. Seuraavassa otaksutaan, että singulaarisuus on yksinkertainen, ts. vain pienin ominaisarvoista on nolla ja muut positiivisia. Ominaisarvoa nolla vastaava ominaisvektori olkoon  $x \in \mathcal{R}^n$

$$V_{ij}(q^c, \Lambda^c) x_j = 0, \quad i = 1(1)n \quad (5)$$

Fysikaalisesti yhtälö (5) merkitsee, että rakenteen jäykkyys suuntaan  $x$  häviää. Tehtävänä on etsiä  $(q^c, \Lambda^c)$ :n ympäristöstä yhtälöiden (3) ratkaisut  $(q^c + u, \Lambda^c + \lambda) \in \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}$ . Ljapunovin-Schmidtin menetelmän mukaan (ks. [4]s.116) siirtymäavaruus  $\mathcal{R}^n$  jaetaan kahteen aliavaruuteen:  $x$  ja sen ortogonaalinen komponentti  $Y = \mathcal{R}^{n-1}$ . Ratkaisuja etsitään muodossa

$$q = q^c + u, \quad \Lambda = \Lambda^c + \lambda, \quad \text{jossa}$$

$$u = \alpha x + y, \quad y \in Y, \quad \alpha \in \mathcal{R}, \quad x \perp y \quad (6)$$

Tangenttijäykkyydsmatriisin välittämä kuvaus  $\mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^n$  ei ole enää yksikäsitteinen, koska yhtälö (5) pätee. Kuitenkin sen välittämä kuvaus  $(n-1)$ -ulotteisesta aliavaruudesta  $\mathcal{Y}$  aliavaruuteen  $\mathcal{S} = \mathcal{R}^{n-1}$  on yksikäsitteinen.  $\mathcal{S}$  on aliavaruus, joka on ortogonaalinen  $[\mathbf{V}_{ij}]^T$ :n ominaisvektoria  $\mathbf{x}^*$  vastaan. Tangenttijäykkyydsmatriisi on symmetrinen, koska  $V_{ij} = V_{ji}$ , joten ominaisvektorit ovat samat  $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}$ . Yhtälöiden (3) ratkaisemisen kanssa ekvivalenttinen ongelma on ratkaista yhtälöt

$$P_{ij} V_j(q^c + \alpha x + y, \Lambda^c + \lambda) = 0 \quad (7)$$

$$x_i V_i(q^c + \alpha x + y, \Lambda^c + \lambda) = 0$$

$[P_{ij}]$  on matriisi, joka määrittelee projektion aliavaruuteen  $\mathcal{S}$ , ts.  $P: \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{S}$ . Yhtälöt (7) tarkoittavat siis, että vektorin  $V_i$  projektio aliavaruuteen  $\mathcal{S}$  häviää ja että sen komponentti ominaisvektorin  $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}$  suuntaan häviää.

Tarkastellaan ensiksi yhtälöä (7)<sub>1</sub>. Se välittää kuvauksen  $\mathcal{Y} \times \mathcal{R} \times \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{S}$ . Tangenttijäykkyydsmatriisin  $[V_{ij}(q^c, \Lambda^c)]$  välittämä kuvaus  $\mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{S}$  on kääntäen yksikäsitteinen, ts. yhtälöllä

$$V_{ij}(q^c, \Lambda^c) y_j = s_i, \quad s \in \mathcal{S} \quad (8)$$

on yksikäsitteinen ratkaisu  $y \in \mathcal{Y}$  jokaiselle  $s \in \mathcal{S}$ . Silloin yhtälö (7)<sub>1</sub> määrittelee vektorin  $y(\alpha, \lambda)$  niin, että yhtälö (7)<sub>1</sub> pätee, kun  $q^c + y(\alpha, \lambda)$  kuuluu  $q^c$ :n ympäristöön  $\mathcal{Y}$ :ssä ja  $(\alpha, \Lambda^c + \lambda) \in (0, \Lambda^c)$ :n ympäristöön  $\mathcal{R}^2$ :ssa. Yhtälön (7)<sub>1</sub> vasenta puolta voidaan pitää  $(\alpha, \lambda)$ :n funktiona, joka on nolla paitsi pisteessä  $(0,0)$  myös sen ympäristössä. Derivoimalla  $\alpha$ :n suhteen saadaan

$$P_{ij} [V_{jk}(q^c, \Lambda^c) x_k + V_{jk}(q^c, \Lambda^c) \frac{\partial y_k}{\partial \alpha}] = 0 \quad (9)$$

$$P_{ij} [V_{jkl}(q^c, \Lambda^c) x_k x_l + 2V_{jkl}(q^c, \Lambda^c) x_k \frac{\partial y_l}{\partial \alpha} + V_{jkl}(q^c, \Lambda^c) \frac{\partial y_k}{\partial \alpha} \frac{\partial y_l}{\partial \alpha} + V_{jk}(q^c, \Lambda^c) \frac{\partial^2 y_k}{\partial \alpha^2}] = 0$$

Yhtälöissä esiintyvät derivaatat lasketaan arvoilla  $\alpha=0$  ja  $\lambda=0$ . Yhtälöstä (9)<sub>1</sub> seuraa, että

$\partial y / \partial \alpha$  pisteessä  $(0,0)$  on nolla. Jälkimmäinen yhtälö sievenee muotoon

$$P_{ij} [V_{jkl}(q^c, \Lambda^c) x_k x_l + V_{jk}(q^c, \Lambda^c) \frac{\partial^2 y_k}{\partial \alpha^2}] = 0 \quad (10)$$

Derivoimalla  $\lambda$ :n suhteen saadaan vastaavasti

$$P_{ij} [V_{jk}(q^c, \Lambda^c) \frac{\partial y_k}{\partial \lambda} + V'_j(q^c, \Lambda^c)] = 0 \quad (11)$$

$$P_{ij} [V_{jkl}(q^c, \Lambda^c) \frac{\partial y_k}{\partial \lambda} \frac{\partial y_l}{\partial \lambda} + 2V'_{jk}(q^c, \Lambda^c) \frac{\partial y_k}{\partial \lambda} + V_{jk}(q^c, \Lambda^c) \frac{\partial^2 y_k}{\partial \lambda^2} + V''_j(q^c, \Lambda^c)] = 0$$

Yhtälöstä (10) voidaan ratkaista  $\partial^2 y / \partial \alpha^2 \in Y$  edellyttäen, että  $\{V_{ijk}(q^c, \Lambda^c)_{x_j x_k}\} \in S$  ts.  $V_{ijk} x_i x_j x_k = 0$ . Samoin yhtälöstä (11)<sub>1</sub> voidaan ratkaista  $\partial y / \partial \lambda \in Y$  edellyttäen, että  $\{V_i'(q^c, \Lambda^c)\} \in S$  ts.  $V_i' x_i = 0$ .

Tarkastellaan sitten yhtälöä (7)<sub>2</sub>, jonka avulla on mahdollista määrittää  $\alpha$ :n ja  $\lambda$ :n välinen riippuvuus (perustuen siihen, että riippuvuus  $y(\alpha, \lambda)$  pätee pisteen (0,0) ympäristössä).

Derivoimalla yhtälön (7)<sub>2</sub> määrittelemä funktio  $f(\alpha, \lambda)$   $\alpha$ :n ja  $\lambda$ :n suhteen saadaan

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha}(0,0) = x_i [V_{ij}(q^c, \Lambda^c)_{x_j} + V_{ij}(q^c, \Lambda^c) \frac{\partial y_j}{\partial \alpha}] = 0 \quad (12)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}(0,0) = x_i [V_{ijk}(q^c, \Lambda^c)_{x_j x_k} + 2V_{ijk}(q^c, \Lambda^c)_{x_j} \frac{\partial y_k}{\partial \alpha} + V_{ij}(q^c, \Lambda^c) \frac{\partial^2 y_j}{\partial \alpha^2}] = V_{ijk} x_i x_j x_k = D$$

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda}(0,0) = x_i [V_{ij}(q^c, \Lambda^c) \frac{\partial y_j}{\partial \lambda} + V_i'(q^c, \Lambda^c)] = V_i' x_i = A$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda^2}(0,0) &= x_i [V_{ijk}(q^c, \Lambda^c) \frac{\partial y_j}{\partial \lambda} \frac{\partial y_k}{\partial \lambda} + 2V_{ij}'(q^c, \Lambda^c) \frac{\partial y_j}{\partial \lambda} + V_i''(q^c, \Lambda^c) + V_{ij}(q^c, \Lambda^c) \frac{\partial^2 y_j}{\partial \lambda^2}] = \\ &= V_{ijk} x_i \frac{\partial y_j}{\partial \lambda} \frac{\partial y_k}{\partial \lambda} + 2V_{ij}' x_i \frac{\partial y_j}{\partial \lambda} + V_i'' x_i = B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial \lambda}(0,0) &= x_i [V_{ijk}(q^c, \Lambda^c)_{x_j} \frac{\partial y_k}{\partial \lambda} + V_{ij}'(q^c, \Lambda^c)_{x_j} + V_{ijk}(q^c, \Lambda^c) \frac{\partial y_j}{\partial \alpha} \frac{\partial y_k}{\partial \lambda} + V_{ij}'(q^c, \Lambda^c) \frac{\partial y_j}{\partial \alpha}] = \\ &= V_{ijk} x_i x_j \frac{\partial y_k}{\partial \lambda} + V_{ij}' x_i x_j = C \end{aligned}$$

Yhtälön (7)<sub>2</sub> vasemmalla puoliskolla on siis Taylorin kehitelmä

$$x_i V_i(q^c + \alpha x + y, \Lambda^c + \lambda) = A\lambda + \frac{1}{2}(D\alpha^2 + 2C\alpha\lambda + B\lambda^2) + O_3(\alpha, \lambda) \quad (13)$$

Merkintä  $O_3(\alpha, \lambda)$  tarkoittaa lauseketta, joka lähestyy nollaa, kun  $\alpha$  ja  $\lambda$  molemmat lähestyvät nollaa. Lasketaan vielä 3. derivaatta  $\alpha$ :n suhteen

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 f}{\partial \alpha^3}(0,0) &= x_i [V_{ijkl} x_j x_k x_l + 3V_{ijk} x_j x_k \frac{\partial y_l}{\partial \alpha} + 2V_{ijkl} x_j \frac{\partial y_k}{\partial \alpha} \frac{\partial y_l}{\partial \alpha} + 3V_{ijk} x_j \frac{\partial^2 y_k}{\partial \alpha^2} + \\ &+ V_{ijk} \frac{\partial y_j}{\partial \alpha} \frac{\partial^2 y_k}{\partial \alpha^2} + V_{ij} \frac{\partial^3 y_j}{\partial \alpha^3}] = V_{ijkl} x_i x_j x_k x_l + 3V_{ijk} x_i x_j \frac{\partial^2 y_k}{\partial \alpha^2} = E \end{aligned} \quad (14)$$

Lausekkeen (13) perusteella voidaan tehdä johtopäätöksiä kriittisen pisteen luonteesta:

- 1)  $A \neq 0$ , rajapiste (15)
- 2)  $A = 0$ ,  $C^2 - BD > 0$ , haarautuminen

Lähteessä [4] on tarkasteltu lisäksi tapauksia 3)  $A = 0$ ,  $C^2 - BD < 0$ , eristetty piste, ja 4)  $A = 0$ ,  $C^2 - BD = 0$ , tangentiaalinen rajapiste tai tangentiaalinen haarautuminen.

Tarkastellaan aluksi lähemmin tapausta 1)

$$1) \quad A = V_i^i x_i \neq 0 \quad (16)$$

Jotta yhtälö (7)<sub>2</sub> toteutuisi, täytyy olla  $\lambda=0$ , joten siirtymä on

$$u(\alpha, \lambda) = \alpha x + \frac{\partial y}{\partial \lambda}(0,0) + \dots = \alpha x + O_2(\alpha, \lambda),$$

ts. siirtymä tapahtuu ominaisvektorin  $x$  suuntaan. Fysikaalisesti yhtälö (16) tarkoittaa, että ulkoinen voima  $F^{ext} = -V_i^i$  tekee työtä siirtymän  $x$  tapahtuessa, kun taas sisäisten voimien tekemä työ  $V_{ij} x_i x_j$  on nolla. On siis odotettavissa dynaamisia ilmiöitä (läpilyönti), ellei voimaa kontrolloida. Yhteys  $\lambda(\alpha)$  saadaan yhtälön  $f(\alpha, \lambda) = 0$  avulla. Derivoimalla  $\alpha$ :n suhteen saadaan

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha}(0,0) + \frac{\partial f}{\partial \lambda}(0,0) \frac{d\lambda}{d\alpha}(0) = 0 \quad (17)$$

josta seuraa yhtälöiden (12)<sub>1</sub> ja (16) perusteella

$$\frac{d\lambda}{d\alpha}(0) = 0 \quad (18)$$

Toistamiseen derivoimalla saadaan vastaavalla tavalla

$$\frac{d^2\lambda}{d\alpha^2}(0) = -\frac{D}{A} \quad (19)$$

Jos  $D/A$  on positiivinen, on kysymyksessä kuorman maksimiarvo ja tapahtuu siis läpilyönti (kuva 1a).  $D$ :n ollessa nolla, saattaa kysymyksessä olla käännepointe. Tarkempi selvitys vaatii  $\lambda$ :n korkeampien derivaattojen määrittämistä.

Katsotaan sitten tapausta 2)

$$2) \quad A=0, \quad C^2 - BD > 0 \quad (B \neq 0) \quad (20)$$

Merkitään  $\lambda/\alpha = r$ , jolloin saadaan

$$f(\alpha, \lambda) = \frac{1}{2} \alpha^2 (Br^2 + 2Cr + D) + O_3(\alpha) \quad (21)$$

Merkitsemällä (21):n sulkulauseke nolaksi saadaan kaksi juurta

$$r_1 = -\frac{C - \sqrt{C^2 - BD}}{B}, \quad r_2 = -\frac{C + \sqrt{C^2 - BD}}{B} \quad (22)$$

Edelleen saadaan

$$\lambda_1 = r_1 \alpha + O_2(\alpha), \quad \lambda_2 = r_2 \alpha + O_2(\alpha) \quad (23)$$

$$u_1 = \alpha x + \frac{\partial y}{\partial \lambda}(0,0) r_1 \alpha + \dots, \quad u_2 = \alpha x + \frac{\partial y}{\partial \lambda}(0,0) r_2 \alpha + \dots \quad (24)$$

Derivaatta  $\partial y / \partial \lambda$  ratkaistaan yhtälöstä (11)<sub>1</sub>. Toinen ratkaisusta esittää alkuperäistä polkua ja toinen haarautuvaa polkua. Jos kummatkin juuret ovat nolasta poikkeavia, haarautuminen on epäsymmetrinen ja laskeva haara on epästabiili ja nouseva vastaavasti stabiili (kuva 1b). Jos kerroin D on nolla, on juuri  $r_1=0$  ja haarautuminen on symmetrinen (kuva 1c). Tilan luonteen selvittäminen vaatii kertoimen E (15) huomioinnista.  $\lambda_1$ :n kehitelmä (23)

alkaa 2. asteen termillä  $\lambda_1 = s\alpha^2 + O_3(\alpha)$  ja lauseke (21) on muotoa

$$f(\alpha, \lambda) = \frac{1}{2}(Bs^2\alpha^4 + 2Cs\alpha^3) + \frac{1}{6}\left[\frac{\partial^3 f}{\partial \alpha^3}\alpha^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial \alpha^2 \partial \lambda}s\alpha^4 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial \alpha \partial \lambda^2}s^2\alpha^5 + \frac{\partial^3 f}{\partial \lambda^3}s^3\alpha^6\right] + O_4(\alpha) = \alpha^3\left(Cs + \frac{E}{6}\right) + O_4(\alpha) \quad (25)$$

Panemalla lausekkeen (25) sulkulauseke nolaksi, saadaan

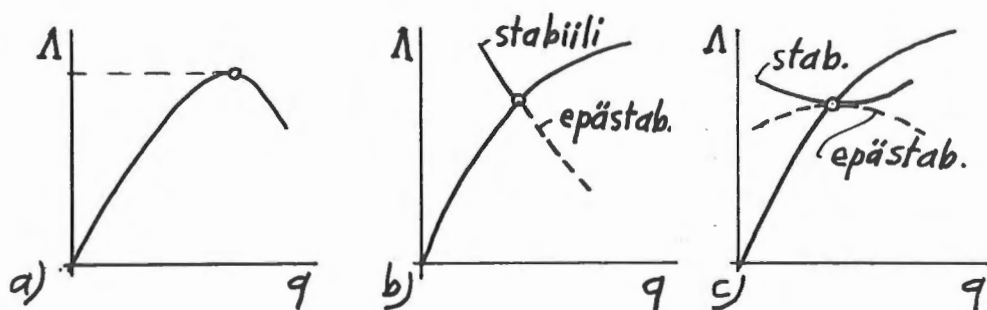
$$s = -\frac{E}{6C} \quad (26)$$

Jos  $s$  on positiivinen, kysymyksessä on symmetrinen stabiili haarautuminen, jos taas negatiivinen, niin haarautuminen on symmetrinen epästabiili. Siirtymä on muotoa

$$x_1 = \alpha x + O_2(\alpha) \quad (27)$$

E:n lausekkeessa esiintyvä derivaatta  $\partial^2 y / \partial \alpha^2$  voidaan ratkaista yhtälöstä (10). Saman yhtälön avulla  $s$ :n lauseke voidaan kirjoittaa myös muotoon

$$s = -\frac{V_{ijkl}x_i x_j x_k x_l - 3V_{ij} \frac{\partial^2 y_i}{\partial \alpha^2} \frac{\partial^2 y_j}{\partial \alpha^2}}{6\left(V'_{ij}x_i x_j - V_{ij} \frac{\partial y_i}{\partial \lambda} \frac{\partial^2 y_j}{\partial \alpha^2}\right)} \quad (28)$$



Kuva 1. Rakenteen epästabiilius: a)rajapiste, b)epäsymmetrinen haarautuminen, c)symmetrinen stabiili tai epästabiili haarautuminen.

## SOVELLUSESIMERKKEJÄ

Tarkastellaan eräitä yksinkertaisia esimerkkejä edellä esitetyn teorian valossa.

Esim. 1. Yhden vapausasteen rakenne (kuva 2).

Rakenne on täysin jäykkä sauva, joka on tuettu alapäästään nivelellisesti momenttia vastaanottavalla jousella  $M = k\theta$ . Yläpäähän vaikuttaa pystysuora kuorma  $P$ . Kokonaispotentiaalienergian lauseke on

$$V(\theta, \Lambda) = \frac{1}{2}k[\theta^2 - 2\Lambda(1 - \cos\theta)]$$

jossa  $\Lambda = PL/k$ . Tasapainoyhtälöstä

$$V_1 = k[\theta - \Lambda \sin\theta] = 0$$

näkyi, että ratkaisu on  $\theta=0$  eli pystysuora tasapainoasema ennen kriittisen kuorman saavuttamista. Muut derivaatat ovat

$$V_{11} = k[1 - \Lambda \cos\theta]$$

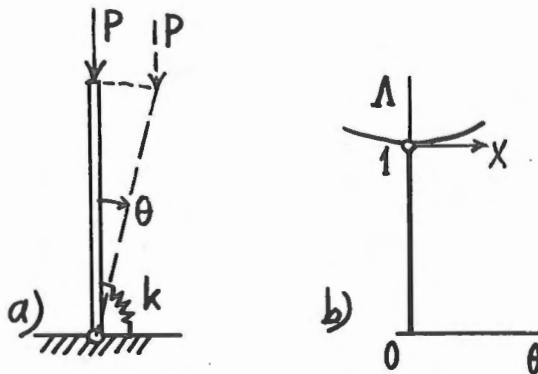
$$V_{111} = k\Lambda \sin\theta$$

$$V_{1111} = k\Lambda \cos\theta$$

$$V_1' = -k \sin\theta$$

$$V_{11}' = -k \cos\theta$$

Ominaisarvotehtävä (5) saa muodon  $k(1-\Lambda)x=0$ , joten  $\Lambda^c=1$  ja  $x=\{1\}$ . Vektori  $y$  kutistuu nollavektoriksi, koska ominaisvektori  $x$  täyttää jo koko siirtymävaruuden. Kertoimet  $A$ ,  $B$  ja  $D$  ovat nollia, kun taas  $C=-k$  ja  $E=k$ . Koska  $A$  ja  $D$  ovat nollia, on kysymyksessä symmetrinen haarautuminen. Yhtälön (26) mukaan  $s=1/6 > 0$ , joten haarautuminen on stabiili.



Kuva 2. Yhden vapausasteen rakenne ja symmetrinen stabiili haarautuminen.

Esim. 2. Kaksisauvainen ristikko (kuva 3).

Otaksutaan, että pystysauva on täysin jäykkä ja että vinosauva on lineaarisesti kimmoinen. Nurkan 3 suhteelliset siirtymät ovat  $u=U/L$  ja  $v=V/L$ . Pystysauvan venymättömyyden takia niitä sitoo yhteys  $1-v=\sqrt{1-u^2}$ . Kuormana on pystysuora voima  $P$  nurkassa 3. Vinosauvan venymäenergia lausutaan käyttäen ns. insinöörivenymää  $\Delta L_2/L_2$ . Kokonaispotentiaalienergialla on silloin lauseke

$$V(u, \Lambda) = \frac{1}{2} k \left[ \left( \sqrt{1+2csu} - 1 \right)^2 - 2\Lambda \left( 1 - \sqrt{1-u^2} \right) \right]$$

jossa  $k$  on sauvan 2 jäykkyys  $k=EA_2L_2$  ja  $c$  ja  $s$  tarkoittavat lyhenteitä  $c=L_3/L_2$  ja  $s=L/L_2$ . Kuormaparametri on  $\Lambda=PL/k$ . Lasketaan tarvittavat potentiaalienergian derivaatat tyytyen linearisoiuihin lausekkeisiin

$$V_u = k(c^2s^2 - \Lambda)u$$

$$V_{uu} = k[c^2s^2(1-3csu) - \Lambda]$$

$$V_{uuu} = k[-3c^3s^3(1-5csu) - 3\Lambda u]$$

$$V'_u = -ku$$

$$V'_{uu} = -k$$

Tasapainoyhtälöstä  $V_u=0$  nähdään heti, että kuormaparametrin ollessa riittävän pieni, ratkaisu on  $u=0$  eli pystysuora tasapainotila vallitsee. Kriittinen kuormaparametrin arvo on  $\Lambda^c=c^2s^2$  ja ominaisvektori on tietenkin  $x=\{1\}$ . Kertoimista (12) A ja B ovat nollia, kun taas  $C=-k$  ja  $D=-3kc^3s^3$ . Yhtälön (21) sulkulausekkeesta saadaan yksi juuri  $r=-D/2C=-3c^3s^3/2$ . Yhtälöiden (25) ja (26) mukaan  $\Lambda=-(3c^3s^3/2)u+\dots$ . Kriittisellä kuorman arvolla tapahtuu siis epäsymmetrinen haarautuminen (kuva 3).

Esim. 3. Kaksisauvainen ristikko (kuva 3).

Rakenne on samanlainen kuin edellisessä esimerkissä, mutta nyt otaksutaan että ristikon sauvat ovat täysin kimmoisia. Nurkan 3 siirtymät määrittelevät rakenteen siirtymätilan. Valitaan sauvojen venymämitaksi Greenin-Lagrangen venymä, jota yksinkertaistetaan ottamalla toisen asteen termeistä vain rotaatiosta aiheutuva mukaan

$$\varepsilon_1 = -v + \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}u^2 \cong -v + \frac{1}{2}u^2, \quad \varepsilon_2 = csu - s^2v + \frac{1}{2}s^2u^2 + \frac{1}{2}s^2v^2 \cong csu - s^2v + \frac{1}{2}s^2(su + cv)^2$$

Kokonaispotentiaalienergia saa muodon

$$V(u, v, \Lambda) = \frac{EA_1L}{2}(\varepsilon_1)^2 + \frac{EA_2L_2}{2}(\varepsilon_2)^2 - PV = \frac{1}{2}K(\varepsilon_1^2 + k\varepsilon_2^2 - 2\Lambda v)$$

jossa  $K$  on sauvan 1 jäykkyys  $K=EA_1L$  ja  $kK$  on sauvan 2 jäykkyys  $kK=EA_2L_2$  ja kuormaparametri on  $\Lambda=PL/K$ . Tasapainoyhtälöt ovat (ottaen vakioksi  $K=1$ )



$$V_u = \varepsilon_1 u + k\varepsilon_2 [cs + s^3(su + cv)] = L[N_1 u + N_2(c + s^3 u + cs^2 v)] = 0$$

$$V_v = -\varepsilon_1 + k\varepsilon_2 [-s^2 + s^2 c(su + cv)] - \Lambda = L[-N_1 + N_2(-s + cs^2 u + c^2 sv) - P] = 0$$

Näistä saatujen linearisoitujen yhtälöiden

$$V_u = ks^2 c(cu - sv) = 0$$

$$V_v = -ks^3 cu + (1 + ks^4)v - \Lambda = 0$$

ratkaisu on  $u^\circ = sv^\circ / c$ ,  $v^\circ = \Lambda$ . Sauvavoimat ovat tietenkin  $N^\circ_1 = -K\Lambda/L$ ,  $N^\circ_2 = 0$ .

Muodostetaan sitten toisen kertaluvun derivaatat

$$V_{uu} = kc^2 s^2 - v + \frac{3}{2}u^2 + ks^4 \left[ 3csu + (2c^2 - s^2)v + \frac{3}{2}s^2(su + cv)^2 \right]$$

$$V_{uv} = -kcs^3 - u + ks^2 \left[ s^2(2c^2 - s^2)u + cs(c^2 - 2s^2)v + \frac{3}{2}cs^3(su + cv)^2 \right]$$

$$V_{vv} = 1 + ks^4 + kcs^3 \left[ (c^2 - 2s^2)u - 3csv + \frac{3}{2}cs(su + cv)^2 \right]$$

Sijoittamalla näihin ratkaisu  $u^\circ$ ,  $v^\circ$  saadaan lineaaristen termien tarkkuudella

$$V_{uu} = kc^2 s^2 - (1 - 2ks^4)\Lambda$$

$$V_{uv} = -kcs^3 - \frac{s}{c}[1 - ks^2(c^2 - s^2)]\Lambda$$

$$V_{vv} = 1 + ks^4 - 2ks^4\Lambda$$

Nurjhdusdeterminantin lausekkeesta

$$\text{Det} = [kc^2 s^2 - (1 - 2ks^4)\Lambda][1 + ks^4 - 2ks^4\Lambda] - \left\{ -kcs^3 - \frac{s}{c}[1 - ks^2(c^2 - s^2)]\Lambda \right\}^2$$

saadaan toisen asteen yhtälö kriittisen kuorman määrittämiseksi. Se on likiarvo, koska on käytetty lineaarista ratkaisua. Laskelman jatkamiseksi valitaan  $\alpha$ :lle ja  $k$ :lle tietyt arvot.

Valitaan  $\alpha = 45^\circ$  eli  $c = s = 1/\sqrt{2}$  ja  $k = 1/8$ . Ominaisarvoksi saadaan tällöin 0,0295 ja normee-

ratuksi ominaisvektoriksi  $x = \{0,9983 \quad 0,0589\}^T$ . Kertoimen  $A(12)_3$  arvoksi tulee nyt

$A = -0,0589 \neq 0$ . Kriittinen piste on siis rajapiste. Kertoimen  $D$  määrittämiseksi on muodostettava kolmannet derivaatat

$$V_{uuu} = 3kcs^5 + 3u + 3ks^7(su + cv)$$

$$V_{uuv} = -1 + ks^4(2c^2 - s^2) + 3kcs^6(su + cv)$$

$$V_{uvv} = kcs^3(c^2 - 2s^2) + 3kc^2 s^5(su + cv)$$

$$V_{vvv} = -3kc^2 s^4 + 3kc^3 s^4(su + cv)$$

Käyttämällä edellä laskettuja  $u^\circ$  - ja  $v^\circ$  -arvoja, ominaisarvoa ja ominaisvektoria saadaan

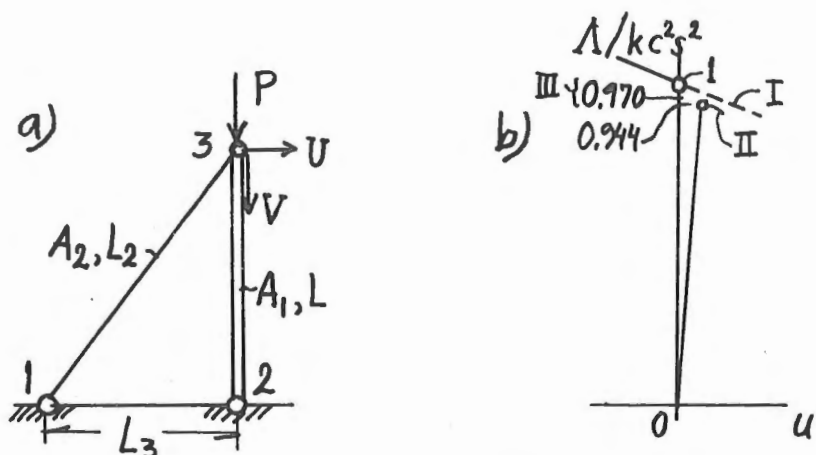
$$D = V_{ijk} x_i x_j x_k = (8,7541 \cdot 0,9983^3 - 3 \cdot 62,91 \cdot 0,9983^2 \cdot 0,0589 - 3 \cdot 0,9115 \cdot 0,9983 \cdot 0,0589^2 - 0,9705 \cdot 0,0589^3) / 64 = -0,0372.$$

Osamääräksi (19), joka ilmaisee kuormaparametrin muutoksen rajapisteen ympäristössä, tulee

$$D/A = (-0.0372)/(-0.0589) = 0,632 < 0.$$

Kuormalla on siis maksimiarvo rajapisteessä (kuva 3, piste II).

Huomautus. Tavanomainen linearisoitu stabiiliustarkastelu antaa kuormaparametrin kriittiseksi arvoksi  $\Lambda^c = kc^2 s^2 / (1 + ks^4)$ , joka on  $1/33 \approx 0,0303$  kyseisessä numeerisessa esimerkissä (kuva 3, piste III).



Kuva 3. Kaksisauvainen ristikko. I) haarautumispiste sauvan 1 ollessa täysin jäykkä, II) likimääräinen rajapiste sauvojen ollessa kimmoisia, III) likimääräinen rajapiste tavanomaisen stabiiliustarkastelun mukaan.

## LÄHDELUETTELO

1. Koiter W.T., Over de stabiliteit van het elastisch evenwicht. Ph.D. Thesis, University of Delft, 1945. Engl. transl. NASA TT F 10, 833(1967) and AFFL, TR 70-25 (1970).
2. Thompson J.M.T., Hunt G.W., A General Theory of Elastic Stability. J. Wiley & Sons, 1973.
3. Croll J.G.A., Walker A.C., Elements of Structural Stability. Macmillan, U.K., 1972.
4. Destuynder P., Modélisation mécanique des milieux continus. Ellipses, Paris, 1991.

Martti Mikkola, professori, TKK, rakenteiden mekaniikan laboratorio.