KERROSKEHÄN RATKAISEMINEN P - Δ-MENETELMÄLLÄ

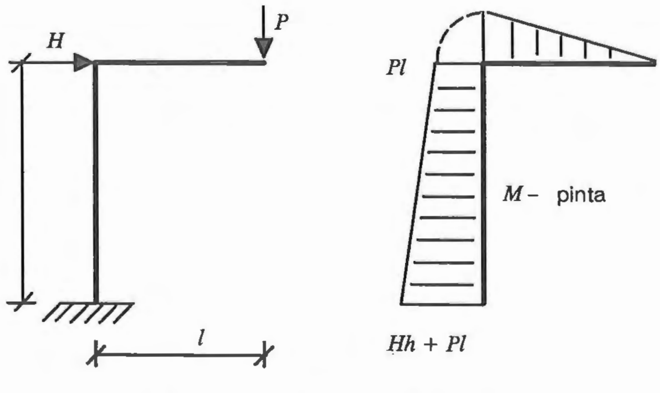
ESA MAKKONEN

Rakenteiden Mekaniikka, Vol. 24
No 2 1991, ss. 30 - 41

TIIVISTELMÄ: Tässä kirjoituksessa on kehitetty P - Δ-menetelmän nimellä tunnettua geometrisesti epälineaaristen rakenteiden ratkaisutapaa matriisilaskentaa apuna käyttäen sellaiseksi, että iteratiivisen ratkaisun sijasta saadaan lopputulos suoraan. Lisäksi tällä menetelmällä on mahdollista saada vähäisellä lisävaivalla arvio rakenteen kriittisen kuorman suuruudelle. Ratkaisun tarkkuutta voidaan lisätä käyttämällä tihennettyä elementtijakoa.

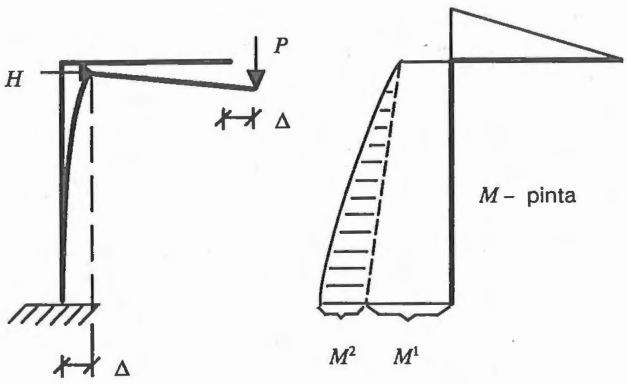
JOHDANTO

Sauvarakenteiden voima- ja siirtymäsuureiden laskennassa tehdään yleisesti oletus, että rakenteiden muodonmuutokset ovat mittoihin verrattuna hyvin pieniä. Rakenteen geometrisen muodon otaksutaan tällöin säilyvän muuttumattomana. Tätä laskutapaa kutsutaan 1-kertaluvun ratkaisumenetelmäksi (kuva 1).



Kuva 1. 1-kertaluvun ratkaisu.

Aina ei näin voi kuitenkaan menetellä. Jos rakenteessa on hoikat pilarit ja sitä kuormittavat suuret pystykuormat, niin muodonmuutosten vaikutus rakenteen geometriaan on niin suuri, että ne on otettava huomioon (kuva 2).



Kuva 2. 2-kertaluvun ratkaisu.

Monikerroskehien tapauksessa tämän periaatteen mukainen ns. 2-kertaluvun teorian mukainen ratkaisu on työläs laskettava.

M^1 = Momentti 1-kertaluvun teorian mukaan

M^2 = Lisämomentti 2-kertaluvun teorian mukaan.

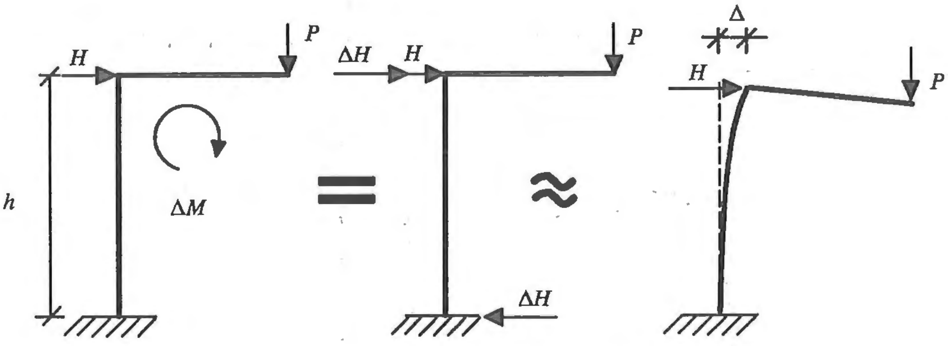
P – Δ -MENETELMÄN PERIAATE

Rakenteen muuttaessa muotoaan pystykuormat siirtyvät sivusuunnassa. Voiman sivusiirtymän vaikutus voidaan ottaa huomioon korjaamalla alkuperäistä kuormitusta voimaparilla:

$$\Delta M = P \cdot \Delta \qquad (1)$$

Tämä voimapari asetetaan vaikuttamaan rakenteeseen kuvitellun lisävaakavoiman avulla, jolloin saadaan likimääräisesti jäljiteltyä kuormien sivusiirtymän vaikutusta (kuva 3).

$$\Delta H = \frac{\Delta M}{h} \qquad (2)$$

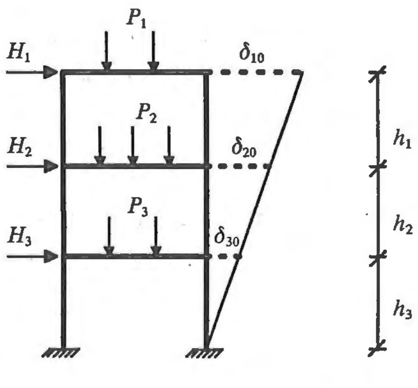


Kuva 3. Lisävaakavoiman periaate.

Rakenteen sivusiirtymän uusi parannettu arvo saadaan, kun alkuperäistä rakennetta kuormitetaan voimasysteemillä, johon on lisätty kuvitellut lisävaakavoimat. Näin saaduista uusista siirtymän arvoista voidaan laskea taas entistä tarkemmat arvot lisävaakavoimille ja edelleen uudet siirtymän arvot. Ratkaisu on iteratiivinen ja suppenee tavallisesti nopeasti lopullisiin siirtymän arvoihin.

SOVELLUS KERROSKEHÄLLE

Tarkastellaan oheisen kuvan (kuva 4) mukaista vaaka- ja pystykuormien kuormittamaa kerroskehää, jonka voimasuureet ja siirtymät ovat helposti laskettavissa 1-kertaluvun teorian mukaisilla tasokehäohjelmilla.



Kuva 4. Kerroskehä

Merkitään kerroskehien pilarikuormien summaa seuraavasti:

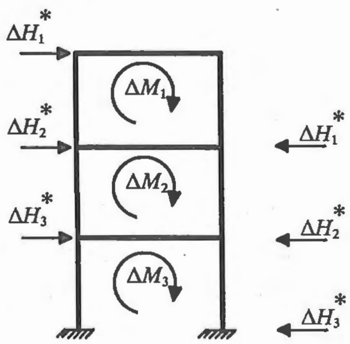
$$N_1 = \Sigma P_1$$

$$N_2 = \Sigma P_1 + \Sigma P_2 \qquad (3)$$

$$N_3 = \Sigma P_1 + \Sigma P_2 + \Sigma P_3$$

1-kertaluvun siirtymistä voidaan laskea voimaparien voimat, jotka ovat (kuva 5) seuraavat:

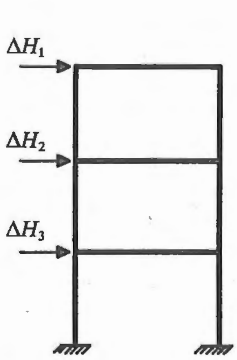
$$\begin{aligned}
\Delta H_1^* &= \frac{\Delta M_1}{h_1} = \frac{N_1(\delta_{10}-\delta_{20})}{h_1} \\
\Delta H_2^* &= \frac{\Delta M_2}{h_2} = \frac{N_2(\delta_{20}-\delta_{30})}{h_2} \\
\Delta H_3^* &= \frac{\Delta M_3}{h_3} = \frac{N_3\delta_{30}}{h_3}
\end{aligned} \tag{4}$$



Kuva 5. Voimaparikuormat.

Yhdistämällä nämä saadaan eri kerroksien kohdalla vaikuttavat lisävaakavoimat (kuva 6) matriisimuotoon kirjoittamalla

$$\begin{bmatrix} \Delta H_1 \\ \Delta H_2 \\ \Delta H_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{N_1}{h_1} & -\frac{N_1}{h_1} & 0 \\ -\frac{N_1}{h_1} & \frac{N_1}{h_1}+\frac{N_2}{h_2} & -\frac{N_2}{h_2} \\ 0 & -\frac{H_2}{h_2} & \frac{N_2}{h_2}+\frac{N_3}{h_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{10} \\ \delta_{20} \\ \delta_{30} \end{bmatrix} \tag{5}$$



Kuva 6. Lisävaakavoimat.

Käyttäen lyhyttä kirjoitustapaa voidaan merkitä seuraavasti:

$$[\Delta H] = [K_G][\delta]_0 \tag{6}$$

Tässä $[K_G]$ on ns. geometrinen jäykkyysmatriisi ja $[\delta]_0$ on kerrossiirtymien muodostama 1-kertaluvun teorian mukainen siirtymävektori.

$$[\delta]_0 = \begin{bmatrix} \delta_{10} \\ \delta_{20} \\ \delta_{30} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix}_0 \tag{7}$$

Kun kuormitetaan kehää vaakavoimalla 1 vuoronperään kunkin kerroksen kohdalta, saadaan vastaavista kerrossiirtymistä rakenteen joustomatriisin $[A]$ alkiot. Näiden lukuarvot voidaan laskea näppärästi kehäohjelmalla 1-kertaluvun teorian mukaan. Joustomatriisin avulla saadaan lisävaakavoimien aiheuttamat muutokset $[d\delta]$ kerrossiirtymiin.

$$[d\delta] = [A][\Delta H] \tag{8}$$

Kun tähän sijoitetaan lisävaakavoimien lauseke, saadaan

$$[d\delta] = [A][K_G][\delta]_0 \tag{9}$$

Parannettu arvo rakenteen kerrossiirtymille saadaan, kun nämä lisätään 1-kertaluvun siirtymiin.

$$[\delta]_1 = [\delta]_0 + [A][K_G][\delta]_0 \tag{10}$$

Toistamalla tämä iteraatio käyttäen parannettuja kerrossiirtymien arvoja uudelleen saadaan iteraatiokaava

$$\begin{aligned} [\delta]_n &= [\delta]_0 + [A][K_G][\delta]_{n-1} \\ &= ([I] + [B] + [B]^2 + \ldots + [B]^n)\,[\delta]_0 \end{aligned} \tag{11}$$

$$\text{jossa} \quad [B] = [A][K_G]$$

Huomataan, että auki kehitettynä iteraatiokaavasta muodostuu kerroinmatriisien suhteen geometrinen sarja. Kuitenkin peräkkäisistä iteraatiokierroksista saadut jonkin kerrossiirtymän arvot eivät sitä tee. Vain yhden vapausasteen tapauksessa siirtymälle lasketut arvot muodostavat geometrisen sarjan. Jos rakenteen kuormitus on pienempi kuin kriittinen kuorma, niin iteraatio suppenee loppuratkaisuun, joka myös toteuttaa iteraatiokaavan. Saadaan täten lopulta ratkaisu lineaarisesta yhtälöryhmästä

$$[\delta] = [\delta]_0 + [A][K_G][\delta] \tag{12}$$

joka voidaan kirjoittaa muotoon

$$\big([I] - [A][K_G]\big)[\delta] = [\delta]_0 \tag{13}$$

Tämän yhtälöryhmän ratkaisu onnistuu normaalimenetelmin, ja sen antama tulos on sama kuin iteroimalla saatu, kun kuormitus on kriittisen kuorman alapuolella.

KRIITTISEN KUORMAN ARVIOINTI

Mikäli rakenteen kuorma on kriittisen kuorman yläpuolella, niin iteraatio hajaantuu tai yhtälöryhmästä lasketut siirtymän arvot eivät vastaa todellista tilannetta. Tämän toteamiseksi on syytä selvittää rakenteen kriittisen kuorman suuruus. Kun yhtälöryhmän (13) kerroinmatriisin determinantti lähenee nollaa, lasketut siirtymän arvot kasvavat äärettömän suuriksi eli kehä nurjahtaa. Tästä saadaan ehto kriittisen kuorman määrittämiseksi.

$$\det\big([I] - [A][K_G]\big) = 0 \tag{14}$$

Jos kuormat ovat kaikki verrannollisia samaan kuormitusparametrin P arvoon, voidaan kirjoittaa determinaattiyhtälö muotoon

$$\det\big([I] - P[A][K_G]\big) = 0 \tag{15}$$

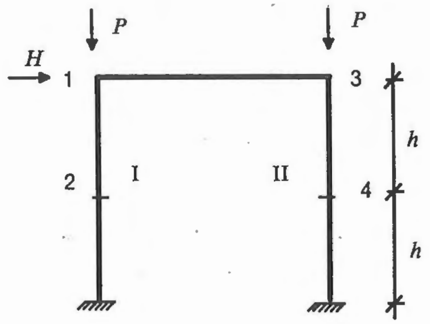
Käyttämällä merkintää $\lambda = \dfrac{1}{P}$ voidaan muuntaa yhtälö seuraavasti:

$$\det\big([A][K_G] - \lambda[I]\big) = 0 \tag{16}$$

jolloin tehtävä on tyypillinen ominaisarvoprobleema. Suurimman ominaisarvon avulla saadaan kuormitusparametrin alin kriittinen arvo. Näin lasketut kriittisen kuorman arvot ovat aina todellista arvoa suuremmat. Esimerkiksi mastopilarille laskutapa antaa $P_{kr} = 3EI/L^2$, kun se Eulerin kaavalla laskettuna olisi likimain $2,47EI/L^2$. Tulosta voidaan parantaa ottamalla apupisteitä pilarijänteeltä. Esimerkiksi pilarin jakaminen kolmeen osaan antaa kertoimelle arvon $2,52$.

LASKUMENETELMÄN TARKENTAMINEN

Menetelmän tarkkuutta voidaan parantaa ottamalla välipisteitä ja tutkimalla kutakin pilaria erikseen seuraavalla tavalla (kuva 7).



Kuva 7. Tihennetty elementtijako.

Tässäkin joustomatriisin alkiot $[A]$ ja siirtymät $[\delta]_0$ lasketaan tavalliseen tapaan kehäohjelmalla. Lisävaakavoimien laskemisessa tarvittavat geometrisen jäykkyysmatriisin alkiot ovat nyt

$$[K_G] = \begin{bmatrix} \frac{N_I}{h} & -\frac{N_I}{h} & 0 & 0 \\ -\frac{N_I}{h_1} & \frac{2N_I}{h} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{N_{II}}{h} & -\frac{N_{II}}{h} \\ 0 & 0 & -\frac{N_{II}}{h} & \frac{2N_{II}}{h} \end{bmatrix} \tag{17}$$

Merkinnät ylläolevassa tarkoittavat: N_I = pilarivoima pilarissa I, N_{II} = pilarivoima pilarissa II.

Jos kerrospalkin pituus ei muutu, ovat siirtymät δ_1 ja δ_2 yhtä suuret ja voimme supistaa yhden vapausasteen pois, jolloin geometrinen jäykkyysmatriisi saa muodon

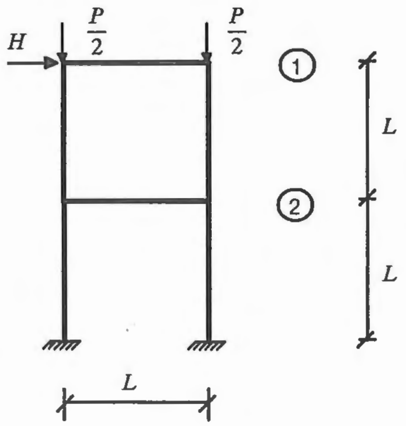
$$[K_G] = \begin{bmatrix} \frac{N_I}{h} + \frac{N_{II}}{h} & -\frac{N_I}{h} & -\frac{N_{II}}{h} \\ -\frac{N_I}{h_1} & \frac{2N_I}{h} & 0 \\ -\frac{N_I}{h_1} & 0 & \frac{2N_{II}}{h} \end{bmatrix} \tag{18}$$

Pilarivoimat N_I ja N_{II} voidaan ottaa 1-kertaluvun ratkaisusta.

SOVELLUKSIA

Laskuesimerkki 1

Ratkaistaan oheisen kuvan mukainen kaksikerroksinen kehä käyttäen apuna tasokehäohjelmaa. Numeroarvoina käytetään $E = MN/m^2$, $I = 1m^4$, $L = 1m$, $A = 10000m^2$.



Pilarikuormat

ylempi kerros $N_1 = \Sigma P_1 = P$

alempi kerros $N_2 = \Sigma P_1 + \Sigma P_2 = P$

1. voimien avulla laskettu joustomatriisi on

$$[A] = \begin{bmatrix} 0.1747 & 0.0759 \\ 0.0759 & 0.0576 \end{bmatrix} \frac{L^3}{EI}$$

Geometrinen jäykkyysmatriisi on puolestaan

$$[K_G] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \frac{P}{L}$$

Kertomalla matriisit keskenään saadaan $[B] = [A][K_G]$

$$[B] = \begin{bmatrix} 0.0988 & -0.0229 \\ 0.0183 & 0.0393 \end{bmatrix} \frac{PL^2}{EI}$$

Olkoon esimerkiksi kuormittavilla voimilla seuraavat lukuarvot:

$$P = \frac{2EI}{L^2} \quad \text{ja} \quad H = 0,5P$$

jolloin kehäohjelmalla laskien saadaan 1-kertaluvun siirtymiksi

$$[\delta]_0 = \begin{bmatrix} 0.1747 \\ 0.0759 \end{bmatrix} L$$

Tulomatriisin $[B]$ termit ovat tässä kuormitustilassa vastaavat:

$$[B] = \begin{bmatrix} 0.1976 & -0.0458 \\ 0.0366 & 0.0786 \end{bmatrix}$$

Yhtälöryhmä (13), josta voidaan laskea 2-kertaluvun siirtymät, on siten

$$\begin{bmatrix} 0.8024 & 0.0458 \\ -0.0366 & 0.9214 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1747 \\ 0.0759 \end{bmatrix} L$$

Ratkaisuksi saadaan siirtymät

$$[\delta] = \begin{bmatrix} 0.2125 \\ 0.0908 \end{bmatrix} L$$

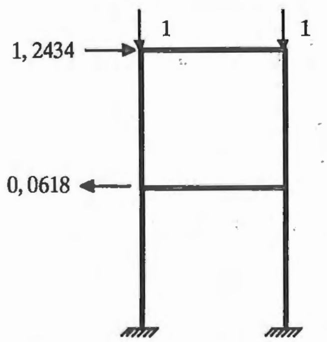
Samat siirtymän arvot sadaan myös iteroimalla kaavaa (11) käyttäen, jolloin kohden loppuratkaisua suppeneva siirtymävektorin jono on

$$[\delta]_1 = \begin{bmatrix} 0.2057 \\ 0.0883 \end{bmatrix} L, \quad [\delta]_2 = \begin{bmatrix} 0.2113 \\ 0.0904 \end{bmatrix} L, \quad [\delta]_3 = \begin{bmatrix} 0.2123 \\ 0.0907 \end{bmatrix} L \quad \text{jne.}$$

Lisävaakavoimien lopulliset arvot saadaan kaavan (6) avulla:

$$[\Delta H] = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.2125 \\ 0.0908 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2434 \\ -0.0618 \end{bmatrix} \frac{EI}{L^2}$$

Kuormittamalla kehää oheisen kuvan osoittamalla tavalla saadaan selville 2-kertaluvun rasitukset.

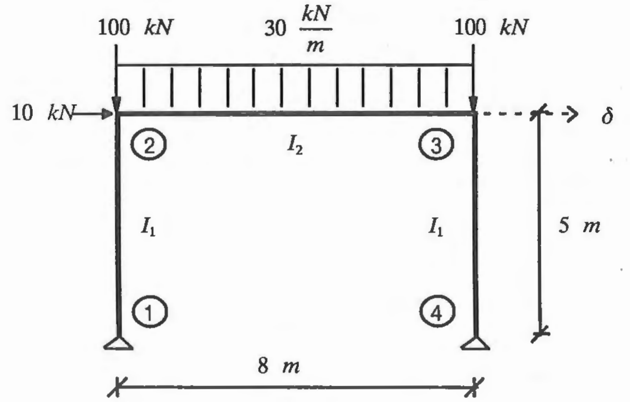


Kriittisen kuorman selvittämiseksi muodostetaan yhtälö (16).

$$\begin{vmatrix} 0.0988-\lambda & -0.0229 \\ 0.0183 & 0.0393-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Ratkaisuksi saadaan $\lambda_1 = 0,09064$ ja $\lambda_2 = 0,04746$ ja suurimman ominaisarvon perusteella $P_{kr} = 1/\lambda_1 = 11,0EI/L^2$.

Laskuesimerkki 2



$$E = 30000\ MN/m^2$$
$$I_1 = 6,75 \cdot 10^{-4}\ m^4$$
$$I_2 = 54 \cdot 10^{-4}\ m^4$$

1-kertaluvun ratkaisuksi saadaan

$$[\delta]_0 = 11,32 \cdot 10^{-3}\ m$$

$$M_{21} = 11,92\ kNm \quad \text{ja} \quad M_{34} = -61,92\ kNm$$

Joustomatriisi $[A] = 1,132\ \dfrac{m}{MN}$

Geom. jäykkyysmatriisi $[K_G] = \dfrac{\Sigma P}{h} = 0,088 \dfrac{MN}{m}$

$$[B] = [A][K_G] = 0,09962$$

Kerrosiirtymän ratkaisuyhtälö antaa:

$$(1 - 0,09962)\delta = 11,32 \cdot 10^{-3}$$
$$\delta = 12,57 \cdot 10^{-3}$$

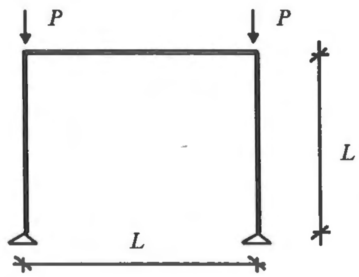
Lisävaakavoima $[\Delta H] = [K_G][\delta] = 0,088 \cdot 12,57 \cdot 10^{-3}\ MN = 1,106 \cdot 10^{-3}\ MN$

ja sauvanpäämomentit ovat

$$M_{21} = 9,16\ kNm \quad \text{ja} \quad M_{34} = -64,69\ kNm$$

Laskuesimerkki 3

Arvioidaan kehän kriittisen kuorman suuruutta yksikerrosmallin avulla



$$[A] = 0,25L^3/EI$$

$$[K_G] = 2P/L$$

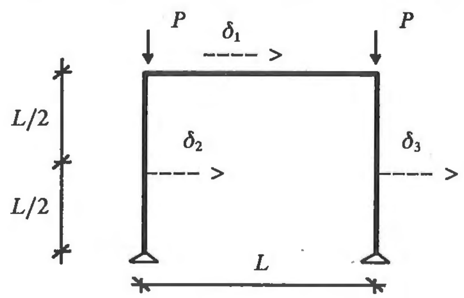
$$[B] = 0,5PL^2/EI$$

Yhtälöstä (16) saadaan

$$0,5PL^2/EI - 1 = 0$$

$$P_{kr} = 2EI/L^2$$

Tarkemman tuloksen saamiseksi otetaan välipisteet keskeltä kehäjalkoja.



$$N_I = P$$

$$N_{II} = P$$

Kehäohjelmalla laskien saadaan

$$[A] = \begin{bmatrix} 0.2500 & 0.1563 & 0.1563 \\ 0.1563 & 0.1122 & 0.0961 \\ 0.1563 & 0.0961 & 0.1122 \end{bmatrix} \frac{L^3}{EI}$$

Geometrinen jäykkyysmatriisi kaavan (18) mukaan on

$$[K_G] = \begin{bmatrix} -4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \frac{P}{L}$$

jolloin $[B] = [A][K_G]$ saa kertolaskun tuloksena

$$[B] = \begin{bmatrix} 0.3748 & 0.1252 & 0.1252 \\ 0.2086 & 0.1362 & 0.0718 \\ 0.2086 & 0.0718 & 0.1362 \end{bmatrix} \frac{PL^2}{EI}$$

Tämän ominaisarvot ovat $\lambda_1 = 0.5347$, $\lambda_2 = 0.0481$ ja $\lambda_3 = 0.0644$ ja

suurimman ominaisarvon avulla saadaan $P_{kr} = 1/\lambda_1 = 1,87EI/L^2$

Verrataan tulosta lähteessä /3/ laskettuun tarkkaan arvoon, joka on $1,82EI/L^2$. Saatu tulos on siis noin 3% suurempi.

LÄHTEET

1. Buckling and Instability. CEB / FIP manual. Comité euro-international du beton, Fédération internationale de la précontrainte. Lancaster 1978

2. Varga, R.S., Matrix Iterative Analysis, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N J 1962

3. Simitses, G. J., Elastic Stability of structures, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N J 1976

4. Makkonen, E., P - Δ-menetelmän käyttö kerroskehän 2-kertaluvun siirtymien laskemisessa, Kuopion teknillinen oppilaitos, julkaisu no. 8, Kuopio 1990

Esa Makkonen, dipl.ins., yliopettaja,
Kuopion teknillinen oppilaitos