

# ELEMENTTIMENETELMÄN SOVELTAMISMAHDOLLISUUDET AKUSTIIKASSA

Matti K. Hakala

Rakenteiden Mekaniikka, Vol. 24  
No 1 1991, ss. 93 - 102

**TIIVISTELMÄ:** Kirjoituksessa käydään läpi elementtimenetelmän soveltamismahdollisuuksia eräissä akustiikan ongelmissa. Elementtiformuloinnit aaltoyhtälön ratkaisulle ilmassa erityyppisine reunaehtoineen, äänen etenemiselle rakenteissa sekä ilmaäänien ja rakenteen värähtelyn kytkennälle esitetään lyhyesti. Käytännön sovellutuksia esitellään kirjallisuusesimerkkien avulla.

## JOHDANTO

Elementtimenetelmää on käytetty rakenteiden staattisen ja dynaamisen käyttäytymisen analysoinnissa jo 1950-luvun puolivälistä alkaen [1]. Se on pitkään ollut näissä sovellutuksissa rutiininomainen työkalu ja valmisohjelmia on runsaasti saatavilla. Elementtimenetelmä on osoittunut erinomaiseksi numeeriseksi välineeksi myös yleisten osittaisdifferentiaaliyhtälöiden ratkaisemisessa, mikä johtuu menetelmän yleisyydestä ja systemaattisuudesta, vankasta matemaattisesta pohjasta (klassisen Rayleigh-Ritzin johdannainen) sekä soveltuvuudesta epäsäännöllisiin tapauksiin. Myös akustiikan ongelmiin elementtimenetelmää on sovellettu jo 1960-luvulta lähtien [2]; aluksi aaltoyhtälön ratkaisemiseen, mutta myöhemmin myös akustoelastisiin ongelmiin, eli tapauksiin, joissa rakenteen värähtely ja äänen eteneminen ilmassa tai muussa väliaineessa kytkeytyvät toisiinsa.

Elementtimenetelmän akustiikan sovellutukset ovat kuitenkin toistaiseksi olleet melko rajattuja varsinkin Suomessa. Syitä tähän on useita. Menetelmä johtaa helposti varsin raskaaseen laskentaan, koska riittävän tarkkuuden saavuttamiseksi elementtikoon pitää olla puoliaallon pituuden suuruusluokkaa tai mielellään sitä pienempi. Korkeilla taajuuksilla ja isoissa tiloissa tai rakenteissa tämä vaatimus johtaa hyvin isoihin elementtimalleihin. Laskenta on raskasta myös, jos vaste pitää määrittää laajalla taajuuskaistalla. Näistä syistä elementtimenetelmä sopii parhaiten tapauksiin, joissa tutkittava tila on pienehkö, taajuudet ovat kohtuullisen matalia eli muutamien satojen Hertzien luokkaa tai rakenteiden ominaistaajuuudet ovat erillisiä. Korkeammilla taajuuksilla ominaisuusmuotoihyden kasvaessa tilastollinen energianalyysi (SEA) on usein käyttökelpoisempi runkoäänien etenemisen tutkimisessa. Merkittävänä etuna elementtimenetelmällä on kuitenkin se, että geometria voi olla lähes mielivaltaisen ja että ilmaäänien ja rakenteen värähtelyn kytkentä voidaan helposti toteuttaa.

Edellä mainituista syistä elementtimenetelmää on teollisuudessa eniten käytetty autojen korien ja sisätilojen meluongelmien tutkimiseen. Rakennusakustiikan sovellutukset ovat olleet vähäisempiä johtuen ilmeisesti perinteisten menetelmien riittävydestä normaalisovellutuksissa ja elementtianalyysin raskaudesta. Jälkimmäinen ongelma pienenee jatkuvasti tietokoneiden ja ohjelmien kehittyessä. Toisaalta pyritään keveisiin ja lujiin rakenteisiin esim. komposiittimateriaaleja käyttäen, jolloin ääneneristävyyso ongelmia ei voi rakenteiden massiivisuudella hoitaa. Tarkemmat analyysit tulevat tällöin tarpeellisiksi ja myöskin suhteellisessa kustannusmielessä mahdollisiksi.

## AALTOYHTÄLÖN ELEMENTTIRATKAISU

Äänen paineelle  $p$  ilmassa tai jossakin muussa kitkattomassa väliaineessa eli "nesteessä" pätee aaltoyhtälö [3]

$$\nabla^2 p = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}, \quad (1)$$

missä  $c$  on äänen nopeus. Tämän osittaisdifferentiaaliyhtälön perusehdot ovat "pehmeä" ehto

$$p = 0 \quad (2)$$

ja "kova" ehto

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0. \quad (3)$$

Näistä ensimmäinen ehto edellyttää, että reunan takana on periaatteessa tyhjiö ainakin väliaineeseen verrattuna. Ilmaäänisovellutuksissa sillä voidaan jossakin tapauksessa kuvata esim. kiinteässä seinässä olevan aukon vaikutusta, vaikka tällainen ehto ei aiheuta energiahäviöitä. Jälkimmäinen ehto vastaa jäykkää, täysin heijastavaa seinää. Yleisemmässä tapauksessa seinä voi liikkua nopeudella  $v$ , jolloin reunaehto (3) saa muodon

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\rho \frac{\partial v_n}{\partial t}, \quad (4)$$

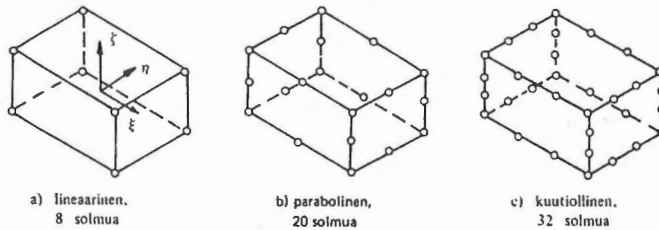
missä  $\rho$  on tiheys ja  $v_n$  on reunan normaalin suuntainen nopeuskomponentti.

Elementtimenetelmää sovellettaessa tarkasteltava tila jaetaan äärellisen kokoiseen elementteihin,

joiden sisällä painekenttää kuvataan ennalta valittujen funktioiden eli ns. muotofunktioiden  $N_i$  ja tiettyjen elementin pisteiden eli ns. solmupisteiden paineiden  $P_i$  avulla muodossa

$$p = \sum_i N_i(x,y,z) P_i = [N(x,y,z)] \{P\}, \quad (4)$$

missä  $[N]$  on muotofunktio­matriisi ja  $\{P\}$  on solmupainevektori. Käytettävät tilaelementit voivat olla esim. kuvassa 1 esitettyjä "tiiliskivielementtejä" tai näistä isoparametrisella muunnoksella saatavia käyrästettäviä elementtejä [1]. Näissä elementeissä muotofunktiot ovat polynomeja, joiden asteluku määräytyy elementin solmujen lukumäärästä. Tästä johtuvat kuvassa 1 käytetyt nimitykset lineaarinen, parabolinen ja kuutiollinen elementti. Esimerkiksi parabolisella elementillä painejakautuma jonkin koordinaattiakselin suunnassa on toisen asteen paraabeli, jolla pyritään kuvaamaan sinimäistä paineaaltoa. Tästä syystä elementin sivun pituus tulisi olla puoliaallon pituutta pienempi, jotta elementtiratkaisulla yleensä voitaisiin kuvata vastaavan taajuista paineaaltoa.



Kuva 1. Tavallisimmat tilaelementit

Paineen muotofunktio­ap­proksimaatiossa (4) solmupaineet  $P_i$  ovat tehtävän varsinaisia tuntemattomia, jotka pitäisi jollakin tavalla määrittää aaltoyhtälön (1) perusteella. Elementtimenetelmän yhteydessä käytetään normaalesti painotettujen jäännösten menetelmää, eli kerrotaan differentiaaliyhtälö sopivilla painofunktiolla ja integroidaan molemmat puolet tarkasteltavan tilavuuden yli [4]. Galerkinin menettelyssä valitaan painofunktiot samoiksi kuin ratkaistavan suureen muotofunktiot, jolloin yhtälöitä saadaan yhtä monta kuin elementtimallissa on solmuja. Osittaisintegroinnin avulla eli Gauss-Greenin kaavoja soveltamalla päästään lopulta aaltoyhtälöstä (1) lineaariseen yhtälöryhmään

$$[H] \{P\} + [G] \{\ddot{P}\} = \{Q\}, \quad (5)$$

missä akustinen "jäykkymatriisi"

$$[H] = \int_V (\{\nabla\} [N])^T (\{\nabla\} [N]) dV \quad (6)$$

ja akustinen "massamatriisi"

$$[G] = \int_V \frac{1}{c^2} [N]^T [N] dV \quad (7)$$

sekä "voimavektori"

$$\{Q\} = \int_A [N]^T \frac{\partial p}{\partial n} dA = - \int_A \rho [N]^T \frac{\partial v_n}{\partial t} dA. \quad (8)$$

Integrointi viimeisessä kaavassa suoritetaan sen pinnan yli, jolla paineen normaaliderivaatta tai pinnan nopeus on määrätty.  $\{\hat{P}\}$  kaavassa (5) tarkoittaa solmupainevektorin toista aikaderivaattaa. Kaikki nämä matriisit ja vektorit integroidaan ensin elementtitasolla ja sen jälkeen elementtimatriisiesistä kootaan koko systeemin yhtälöryhmä menettelyllä, joka on aina samanlainen elementtimenetelmässä tehtävästä riippumatta. Useissa kaupallisissa elementtiohjelmistoissa (esim. ADINA, NASTRAN, PERMAS jne.) on suoraan valmiudet tässä esitetyn tehtävän ratkaisemiseen.

## OMINAISVÄRÄHTELY

Tietyillä taajuuksilla suljetussa tilassa syntyy seisova aaltokuvio. Nämä ns. ominaistajuudet ja vastaavat aaltokuviot eli ominaismuodot saadaan yhtälöstä (5), kun asetetaan heräte  $\{Q\}=0$ , jolloin ratkaisu on muotoa

$$\{P\} = \{\hat{P}\} e^{i\omega t}. \quad (9)$$

Yhtälön (5) avulla saadaan nyt ns. ominaisarvotehtävä

$$([H] - \omega^2 [G]) \{\hat{P}\} = \{0\}, \quad (10)$$

jonka ratkaisuna saadaan ominaistajuudet ja -muodot. Ominaisarvotehtävän ratkaisu onnistuu kaikilla kaupallisilla elementtiohjelmistoilla.

## ABSORBOIVA SEINÄ

Edellä esitetyssä formuloinnissa ei esiinny lainkaan häviöitä, koska väliaineen häviöitä ei otettu huomioon ja seinät olivat täysin heijastavia. Aaltoyhtälön ratkaisua voi tällöin soveltaa

äänepainetason määrittämiseen vain ideaalitapauksissa resonanssitaajuuksien välillä. Merkittävin häviö tapahtuu yleensä seinämien absorptioita kautta. Tämä ilmiö tulisi pystyä ottamaan huomioon myös elementtiratkaisussa, jotta äänenpainetaso pystyttäisiin myös käytännön tapauksissa ennustamaan kohtuullisella tarkkuudella. Yksinkertaisin absorptiomalli on käyttää tavallista akustista impedanssia paikallisesti eli olettaa, että absorboivan pinnan joka pisteessä pätee

$$p = Z v_n, \quad (11)$$

missä  $Z$  on seinän impedanssi ko. pisteessä. Ratkaisemalla tästä  $v_n$  ja sijoittamalla se voimavektoriin (8) sekä ottamalla huomioon paineapproksimaatio (4) saadaan aaltoyhtälön elementtiformulointi (5) nyt muotoon

$$[H] \{P\} + [R] \{\dot{P}\} + [G] \{\ddot{P}\} = \{Q\}, \quad (12)$$

missä vaimennusmatriisi

$$[R] = \int_{\Lambda} \frac{\rho}{Z} [N]^T [N] dA. \quad (13)$$

Impedanssi  $Z$  on yleisessä tapauksessa kompleksinen ja vastaavasti paine on myös kompleksinen suure. Tarkempi tapa seinän absorptioita huomioon ottamiseksi on mallittaa myöskin absorboiva materiaali elementtimenetelmällä [5], jolloin vastaavasti tuntemattomien lukumäärä kasvaa, mutta malli on realistisempi.

## ÄÄNILÄHDE KENTÄSSÄ

Jos tarkasteltavan tilan sisällä on jakautunut äänilähde, jonka lähdevoimakkuustiheys on  $q$  [ $m^3/(sm^3)=1/s$ ], tulee aaltoyhtälön (1) vasemmalle puolelle lisätä termi

$$\rho \frac{\partial q}{\partial t}. \quad (14)$$

Elementtiratkaisussa tämä näkyy voimavektorissa lausekkeena

$$\{Q\} = \int_V \rho [N]^T \frac{\partial q}{\partial t} dV. \quad (15)$$

Jos pisteessä  $(x_0, y_0, z_0)$  on pistemäinen äänilähde, jonka voimakkuus on  $q_0$ , supistuu kaava (15)

muotoon

$$\{Q\} = \rho [N(x_0, y_0, z_0)]^T \dot{q}_0 . \quad (16)$$

Edelleen, jos äänilähde on solmussa  $i$ , on vastaava muotofunktio  $N_i = 1$  tässä pisteessä ja muut muotofunktiot häviävät, jolloin voimavektorissa on vain yksi nollasta poikkeava alkio

$$Q_i = \rho \dot{q}_0 . \quad (17)$$

Äänenpainetaso voidaan edellä mainituilla edellytyksillä laskea kaavasta (12), kun äänilähteenä on joko liikkuva seinämä tai äänilähde kentässä. Jos tarkasteltava taajuuskaista on laaja, joudutaan kompleksinen yhtälöryhmä ratkaisemaan lukemattomia kertoja, mikä voi viedä paljon tietokoneaikaa.

## ÄÄNEN ETENEMINEN RAKENTEISSA

Ääni etenee rakenteissa kiinteän aineen värähtelynä eli runkoäänenä. Erona nesteisiin verrattuna on se, että pitkittäisen aallon lisäksi voi esiintyä myös muita aaltotyyppejä [6]. Käytännössä äänen etenemisen kannalta tärkein aaltotyyppi on taivutusaalto, joka esiintyy levymäisissä ja palkkimaisissa rakenteissa, eli rakenteissa, joiden mitat yhdessä tai kahdessa suunnassa ovat huomattavasti pienempiä kuin muissa suunnissa. Elementtimenetelmä sopii tässäkin tapauksessa periaatteessa hyvin ääniaallon kuvaamiseen, mutta elementtien pitää olla pieniä suhteessa aallon pituuteen. Tämä rajoittaa usein menetelmän soveltamisen vain suhteellisen matalataajuisen äänen tutkimiseen.

Värähtelevän rakenteen liikeyhtälö elementtimenetelmän avulla muodostettuna on esitetty lukemattomissa alan oppikirjoissa, ks. esim [4], ja se on aina muotoa

$$[M] \{\ddot{U}\} + [C] \{\dot{U}\} + [K] \{U\} = \{F\} , \quad (18)$$

missä  $[M]$  on rakenteen massamatriisi,  $[C]$  vaimennusmatriisi,  $[K]$  jäykkyyssmatriisi sekä  $\{\ddot{U}\}$ ,  $\{\dot{U}\}$  ja  $\{U\}$  ovat vastaavasti kiihtyvyy-, nopeus- ja siirtymävektorit. Tämän yhtälön pohjana on siirtymätilan muotofunktioapproksimaatio

$$\{u\} = [N_S] \{U\} , \quad (19)$$

missä  $\{u\}$  sisältää rakenteen siirtymätilan kuvaamiseen tarvittavat siirtymäkomponentit ja  $[N_S]$  on

rakenteen muotofunktio matriisi. Taivutustapauksissa tarvitaan rakenteen käyttäytymisen kuvaamiseen vähintään kolme siirtymäkomponenttia, joten rakenteen elementtimallissa on aina huomattavasti enemmän vapausasteita kuin aaltoyhtälön elementtimallissa.

Runkoäänen herätteenä voi toimia esimerkiksi rakenteeseen kohdistuva pistevoima, joka sijoitetaan voimavektoriin  $\{F\}$  suoraan kyseisen solmupisteen määrittämään kohtaan, tai ilmaäänien aiheuttama paine  $p$ , jota vastaava ekvivalentti voimavektori on [7]

$$\{F\} = - \int_A [N_S]^T \{n\} p \, dA, \quad (20)$$

missä  $\{n\}$  on rakenteen pinnan ulospäin osoittava normaalivektori. Jos heräte on harmoninen, eli

$$\{F\} = \{\hat{F}\} e^{i\omega t}, \quad (21)$$

niin vaste on samaa tyyppiä, eli

$$\{U\} = \{\hat{U}\} e^{i\omega t}, \quad (22)$$

ja se saadaan ratkaistua kompleksisesta yhtälöstä

$$(\{K\} + i\omega\{C\} - \omega^2\{M\})\{\hat{U}\} = \{\hat{F}\}, \quad (23)$$

joka on siis ratkaistava kaikilla halutuilla taajuuksilla erikseen.

## ILMAÄÄNEN JA RAKENTEEN VÄRÄHTELYN KYTKENTÄ

Värähtelevä rakenne aiheuttaa ilman paineen vaihtelua ja siten ilmaääntä. Vastaavasti ilmaäänien jaksollinen paine voi herättää rakenteen värähtelyä. Tästä syystä ilmaääni ja runkoääni ovat aina periaatteessa kytkeytyneitä ja tietyissä tapauksissa kytkentä on niin voimakas, että ominaistaajuuksudet sekä ilmassa että rakenteessa muuttuvat ja järjestelmää tulee tarkastella yhtenäisenä "akustoelastisena" systeeminä [8]. Elementtiformuloinnissa kytkeytyminen tapahtuu aaltoyhtälön kuormitustermin (8) ja vastaavasti rakenteen voimavektorin (20) avulla. Rakenteen pinnan normaalinopeus  $v_n$  voidaan esittää muodossa

$$v_n = \{n\}^T [N_S] \{\dot{U}\}, \quad (24)$$

mikä sijoitettuna kuormitustermiin (8) antaa

$$\{Q\} = \int_{\Lambda} \rho [N]^T \{n\}^T [N_S] dA \{\dot{U}\} = [S] \{\dot{U}\}. \quad (25)$$

Tässä [S] on niin sanottu kytkentämatriisi. Vastaavasti sijoittamalla paineapproksimaatio (4) rakenteen voimavektoriin (20) saadaan

$$\{F\} = - \int_{\Lambda} [N_S]^T \{n\} [N] dA \{P\} = - [S]^T \{P\}. \quad (26)$$

Kytkeyhtälöt (25) ja (26) yhdessä aaltoyhtälön (12) ja rakenteen liikeyhtälön (18) kanssa määrittävät täydellisesti akustoelastisen systeemin käyttäytymisen. Jos haetaan vain ominaistajuuksia ja -muotoja, voidaan vaimennustermit unohtaa, ja kytketyn systeemin ominaisarvotehtävä saadaan muotoon

$$\begin{bmatrix} [K] & [S]^T \\ [O] & [H] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\hat{U}\} \\ \{\hat{P}\} \end{Bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} [M] & [O] \\ [S] & [G] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\hat{U}\} \\ \{\hat{P}\} \end{Bmatrix} = \{0\}. \quad (27)$$

Tämä epäsymmetrinen ominaisarvotehtävä voidaan ratkaista suoraan tai muuntaa myös symmetriseen muotoon, jolloin standardiratkaisurutiineita voidaan käyttää.

## ESIMERKKEJÄ KIRJALLISUUDESTA

### **Kuorma-auton ohjaamon akustinen ominaisvärähtely**

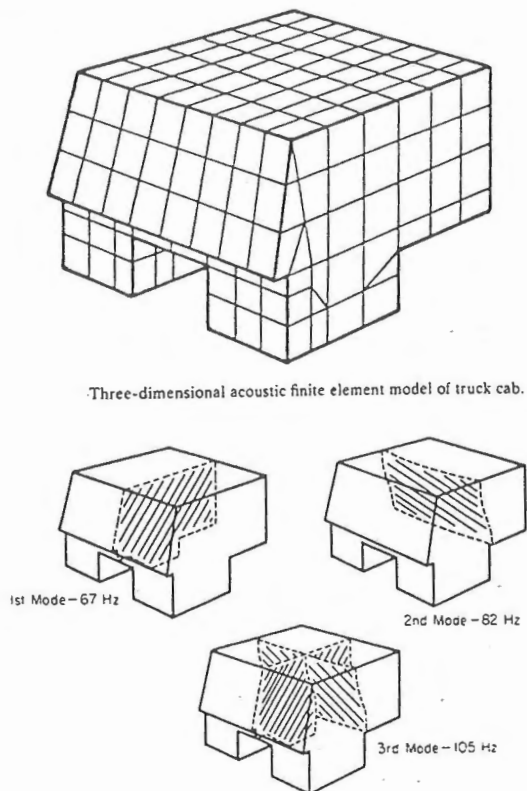
Artikkelissa [8] on esitetty katsaus elementtimenetelmän sovellutuksista autojen meluongelmiin. Kuvassa 2 on esitetty kuorma-auton ohjaamon akustiikan tutkimiseen käytetty elementtimalli ja sillä lasketut 3 alinta akustista ominaistajuutta ja -muotoa.

### **Komposiittipaneelin ääneneristävyys**

Artikkelissa [9] on tutkittu elementtimentelmän avulla äänen siirtymistä erityyppisten komposiittipaneelien läpi. Paneeli oli mallitettu laattaelementeillä ja sen takana oleva tila akustisilla tilaelementeillä kuvan 3 mukaisesti. Tuleva äänikenttä kuvattiin paineherätteenä paneelin pinnalla. Taulukossa 1 on esitetty myös vertailuja laskettujen ja mitattujen ääneneristävyysarvojen välillä

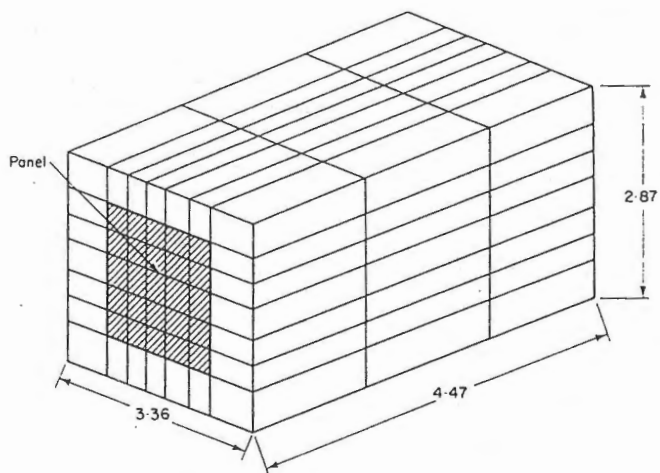


lasikuitulujitteiselle paneelille.



Three-dimensional acoustic finite element model of truck cab.

Kuva 2. Kuorma-auton ohjaamon akustinen elementtimalli ja alimmat ominaismuodot [8].



Coupled system. Dimensions in meters.

Kuva 3. Komposiittipaneelin akustoelastinen elementtimalli [9].

TAULUKKO 1. Laskettuja ja mitattuja (NASA) ääneneristävyyksiä lasikuitulujitteiselle komposiittipaneelille [9].

*Noise reduction of fiberglass/epoxy panel*  
 $E_1 = 53.74 \text{ G Pa}$ ,  $E_2 = 17.9 \text{ G Pa}$ ,  $G_{12} = 8.96 \text{ G Pa}$ ,  $\nu_{12} = 0.25$ ,  $\rho = 2173 \text{ kg/m}^3$

One-third-octave center frequency (Hz)	NASA test data (dB)	FEM (dB)
100	13.1	14.1
125	11.6	12.7
160	15.2	14.8
200	16.3	15.8

### KIRJALLISUUTTA

1. Hakala, M. K., Lujuusopin elementtimenetelmä. Otakustantamo 457, Espoo 1981, 490 s.
2. Graggs, A., The use of simple three-dimensional acoustic finite elements for determining the natural modes and frequencies of complex shaped enclosures. *Journal of Sound and Vibration* 23(1972)3, ss. 331-339.
3. Norton, M. P., *Fundamentals of noise and vibration analysis for engineers*. Cambridge University Press, 1989, 619 s.
4. Bathe, K.-J., *Finite element procedures in engineering analysis*. Prentice-Hall, 1982, 735 s.
5. Graggs, A., A finite element model for acoustically lined small rooms. *Journal of Sound and Vibration* 108(1986)2, ss. 327-337.
6. Cremer, L. et al, *Structure-borne sound*. Springer-Verlag, 1973, 528 s.
7. Hakala, M. K., Application of the finite element method to fluid-structure interaction in ship vibration. *VTT Tutkimuksia* 433, Espoo 1986, 114 s.
8. Nefske, D. J. et al, Structural-acoustic finite element analysis of the automobile passenger compartment: a review of current practice. *Journal of Sound and Vibration* 80(1982)2, ss. 247-266.
9. Ramakrishnan, J. V. and Koval, L. R., A finite element model for sound transmission through laminated composite panels. *Journal of Sound and Vibration* 112(1987)3, ss. 433-446.

*Matti K. Hakala, johtava tutkija, VTT laivatekniikan laboratorio*