

Jouni Freund ja Eero-Matti Salonen

Rakenteiden Mekaniikka, Vol. 23
No 3 1990, s. 18 - 61

TIIVISTELMÄ: Elementtimenetelmän pohjana oleva konvektio-diffuusio-probleemaan liittyvä heikko muoto johdetaan helposti ymmärrettävällä tavalla, jossa lähtökohtana on reuna-arvotettava täydennettynä sopivilla hyppyehdoilla. Päämääränä on numeerisiin laskelmiin hyvin soveltuva muoto ja mahdollisimman tarkat solmuarvot antava ja käytännössä toteutettava painofunktioiden valinta. Painofunktiot valitaan lisäksi siten, että heikkoon muotoon perustuvat elementtimenetelmät palautuvat tavanomaisiksi Galerkinin menetelmiksi elementtiverkkoa riittävästi tihennettäessä, kun elementtiapproksimaatio on lineaarista tyyppiä. Parhaassa tapauksessa päästään näin tilanteeseen, jossa numeerinen ratkaisu yhtyy tarkan ratkaisun elementti-interpolanttiin. Käsitelyssä lähdetään liikkeelle yksidimensioisista konvektio-diffuusio tyyppisten tehtävien erikoistapauksista ja pyritään näin selventämään ajatuskulkua. Lopuksi tarkastellaan hankalampaa kaksidimensioista tapausta.

JOHDANTO

Yleistä

Elementtimenetelmän lähtökohtina olevat sopivat heikot muodot esitetään alan kirjallisuudessa mielestämme asian ymmärrettävyyden kannalta usein epätydyttävällä tavalla: Tietty muoto vain annetaan ilman perusteluja ja tämän jälkeen suoritetaan sitten raskas matemaattinen

analyysi formulaation stabiiliuden toteamiseksi. Ajatuskulkua, joka on alunperin synnyttänyt kulloisenkin formulaation, ei tuoda välttämättä lainkaan esille. Maallikon tarkastellessa matemaattispainotteisia elementtimenetelmään liittyviä kirjoituksia herääkin mm. seuraavanlaisia kysymyksiä, jotka jäävät usein vaille suoraa selitystä: Miksi tietyt termit tulee osittaisintegroida, tietyt ei? Miksi painofunktion tulee hävitä reunan tietyllä osalla, tietyllä ei?

Olisi suotavaa pyrkiä -mikäli mahdollista- systemaattiseen konstruktiiiviseen menettelyyn: Kun vallitsevat differentiaaliyhtälöt reuna- ja alkuehtoineen ovat annetut, ryhdytään etenemään tiettyjen yleisten suuntaviivojen mukaisesti päämääränä 'hyvä formulaatio'. Artikkelissa esitetään eräitä ohjeita tämän päämäärän osittaiseksi saavuttamiseksi. Ohjeita noudattamalla saatavat lopulliset heikkojen muotojen laskentaversiot ovat varsin samannäköisiä kuin yleensä kirjallisuudessa. Lisäinformaationa syntyy kuitenkin arvokasta tietoa painofunktioiden sopivista tyypeistä. Käsittelyn oleellisia piirteitä ovat:

1. Kaikki tarvittavat määrätyt integraalit on ajateltava heti alkuun korostetusti lasketuiksi erikseen elementteittäin. Tämä tulee tärkeänä esille osittaisintegrointeja suoritettaessa. Lisäksi tämä korostus on hyvin luonteva, koska elementtimenetelmän määrittelevänä perusominaisuutena pidetään usein juuri sitä seikkaa /1/, että lopulliset yhtälöt syntyvät laskemalla yhteen osuuksia erillisistä elementeistä.
2. Elementtien välisillä reunoilla vallitsevat hyppy- tai jatkuvuusehdot on kirjattava samoin heti mukaan formulaatioon. Tällä tavoin päästään mm. eroon tietyistä osittaisintegroitien yhteydessä syntyvistä väärinkäsitysten mahdollisuuksista /2/. Lisämotivointia seuraa myöhemmin.
3. Ratkaisun tarkkuuden ja stabiiliuden kannalta on yleensä edullista pyrkiä saamaan hyviä arvoja nimenomaan elementtiverkon solmujen

kohdilla. Aiheet 1 ja 2 tulevat osoittautumaan tärkeiksi apuneuvoiksi tämän tavoitteen toteuttamisessa.

Lähestymme suosittelemaamme toimintamallia eräiden esimerkkiprobleemien kautta, joiden avulla syntyy tiettyjä yleisluontoisia ohjeita. Jotta artikkeli pysyisi joten kuten koossa, kaikki esimerkit tulevat koskemaan yleistä skalaarista konvektio-diffuusioyhtälöä tai sen jostain erikoistapausta.

Esimerkkiprobleema 1

Tämä esitys on tietyllä tavalla jatkoa lehdessä aikaisemmin olleessa artikkelissa /2/ käsiteltyihin aiheisiin. Täten otamme aluksi johdattelevaksi malliprobleemaksi lähes saman tapauksen kuin ko. lähteessä:

$$\frac{d}{dx} \left(-k \frac{d\phi}{dx} \right) + c\phi - Q = 0 \quad x \in (0, 1), \quad (1)$$

$$\phi(0) = \phi_0, \quad \phi(1) = \phi_1. \quad (2)$$

Probleema kuvaa esimerkiksi lämmönjohtumistehtävää, jossa nyt on mukana lähteen /2/ esimerkkitapaukseen verrattuna myös ratkaistavan funktion nollannen kertaluvun derivaatta (esimerkiksi lämpötilasta riippuva lähdetermi). Näin saadaan demonstraatiomielessä tähän yhteyteen sopiva asetelma.

Vastaava tavanomainen kirjallisuudessa esiintyvä heikko muoto on

$$\int_0^1 \left(k \frac{dw}{dx} \frac{d\phi}{dx} + w c \phi - w Q \right) dx = 0. \quad (3)$$

Tämä tarkoittaa: On etsittävä se reunaehdot (2) toteuttava ϕ , joka toteuttaa yhtälön (3) jokaisen mielivaltaisella tavalla valitun, reunaehdot $w(0)=0$ ja $w(1)=0$ toteuttavan painofunktion w suhteen. Funktioiden w ja ϕ tulee lisäksi täyttää matemaattisissa esityksissä tarkemmin selostettuja sileysvaatimuksia. Mikäli tehtävään liittyvät

annetut funktiot ovat riittävän jatkuvia, voidaan osoittaa asetelmien (1), (2) ja (3) olevan täysin samanarvoisia. Vaikkei näin olisi, yhtälöstä (3) määräytyvä $\hat{\phi}$ on kuitenkin tietyssä mielessä myös alkuperäisen probleeman ratkaisu.

Formulaatiota (3) käytettäessä probleemalle saadaan likiratkaisu korvaamalla funktio $\hat{\phi}$ äärellisen määrän vapausasteita omaavalla approksimaatiolla $\hat{\hat{\phi}}$. Heikon muodon vastineeksi otetaan tällöin esitys

$$\int_0^1 \left(k \frac{d\hat{w}}{dx} \frac{d\hat{\phi}}{dx} + \hat{w} c \hat{\phi} - \hat{w} Q \right) dx = 0 \quad (4)$$

Tämä tarkoittaa: On etsittävä se reunaehdot (2) toteuttava $\hat{\phi}$, joka toteuttaa yhtälön (4) tietyn, äärellisen määrän vapausasteita omaavan, reunaehdot $\hat{w}(0) = 0$ ja $\hat{w}(1) = 0$ toteuttavan painofunktion \hat{w} jokaisen mielivaltaisen valinnan suhteen.

Erityisesti elementtimenetelmää sovellettaessa approksimaatio on tyyppiä

$$\hat{\phi} = \sum_{j=1}^M N_j(x) \hat{\phi}_j \quad (5)$$

jossa suureet $N_j(x)$ ovat annettuja muotofunktioita. Suureet $\hat{\phi}_j$ ovat approksimaation arvoja tietyissä ratkaisualueen pisteissä. Näille suureille käytetään myös nimitystä solmuarvot. Vastaavasti ko. pistettä kutsutaan solmuksi. Esitys (5) saadaan toteuttamaan reunaehdot (2) asettamalla $\hat{\phi}_1 = \phi_0$ ja $\hat{\phi}_M = \phi_1$, jolloin tuntemattomiksi jäävät solmuarvot $\hat{\phi}_2, \hat{\phi}_3, \dots, \hat{\phi}_{M-1}$. Nämä määritetään yhtälöistä, jotka syntyvät ottamalla sopivat $M-2$ kappaletta painofunktion \hat{w} valintaa ja vaatimalla aina yhtälön (4) toteutumista. Galerkinin keinoa käytettäessä nämä ns. systeemyhtälöt tulisivat tunnetusti olemaan

$$\int_0^1 \left(k \frac{dN_i}{dx} \frac{d\hat{\phi}}{dx} + N_i c \hat{\phi} - N_i Q \right) dx = 0 \quad i = 2, 3, \dots, M-1 \quad (6)$$

Painofunktiot valitaan tällöin siis ratkaistavan funktion approksimaatiossa (5) käytettyjen muotofunktioiden joukosta.

Tarkasteltava probleema on tyyppiä, jolle löytyy vielä kolmaskin esitysmuoto. Probleemaa vastaa nimittäin aito variaatioperiaate: Kenttäyhtälön (1) toteuttava ϕ antaa funktionaalille

$$\Pi(\phi) = \int_0^1 \left[\frac{1}{2} k \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} c \phi^2 - \phi Q \right] dx \quad (7)$$

stationaarisen arvon (minimin). Luvallisten funktioiden tulee lisäksi toteuttaa reunaehdot (2), kuten oli asian laita myös formulaation (3) yhteydessä. Tätä tietä käytetään usein vaihtoehtoisesti likiratkaisun etsimiseen: Korvataan funktio ϕ esimerkiksi approksimaatiolla (5), jolloin funktionaali Π muuttuu solmuarvojen $\hat{\phi}_j$ funktioksi $\hat{\Pi}$ ja kirjoitetaan stationaarisuusehdot

$$\frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial \hat{\phi}_i} = \int_0^1 \left(k \frac{dN_i}{dx} \frac{d\hat{\phi}}{dx} + N_i c \hat{\phi} - N_i Q \right) dx = 0 \quad , \quad i=2, \dots, M-1. \quad (8)$$

Syntyvien yhtälöiden nähdään olevan täsmälleen samoja kuin Galerkinin keinolla saatujen.

Kun variaatioperiaate on olemassa, on usein tapana ottaa käyttöön ns. energianormi. Se on kerrointa vailla vastaavan funktionaalin neliöllisen osuuden neliöjuuri eli tässä tapauksessa

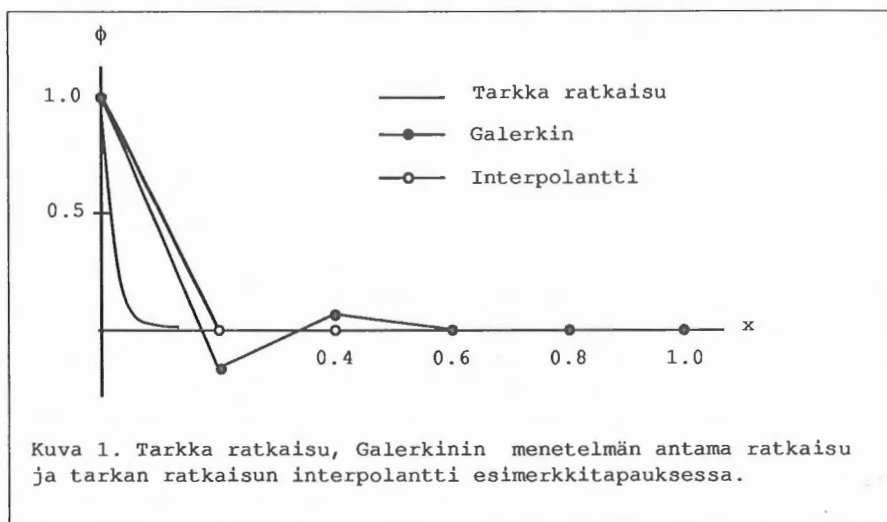
$$\|\phi\|_E = \left(\int_0^1 \left[k \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + c \phi^2 \right] dx \right)^{1/2}. \quad (9)$$

Ei ole vaikea osoittaa, että Galerkinin keinon mukaisella ratkaisulla on ns. parasapproksimaatio-ominaisuus (engl. best approximation property) /4,s.186/ energianormin suhteen eli

$$\|\phi - \hat{\phi}_G\|_E \leq \|\phi - \hat{\phi}\|_E \quad (10)$$

jossa ϕ on tarkka ratkaisu, $\hat{\phi}_G$ Galerkinin menetelmällä saatu ratkaisu

ja $\hat{\phi}$ mikä hyvänsä esityksen (5) mukainen, reunaehdot toteuttava funktio. Tätä ominaisuutta pidetään variaatioperiaatteen ollessa voimassa yleensä osoituksena Galerkinin keinon hyvyydestä. Tässä artikkelissa pyrimme kuitenkin mm. korostamaan, että energianormi ei ole välttämättä aina käytännössä paras mahdollinen tarkkuuden mittari.

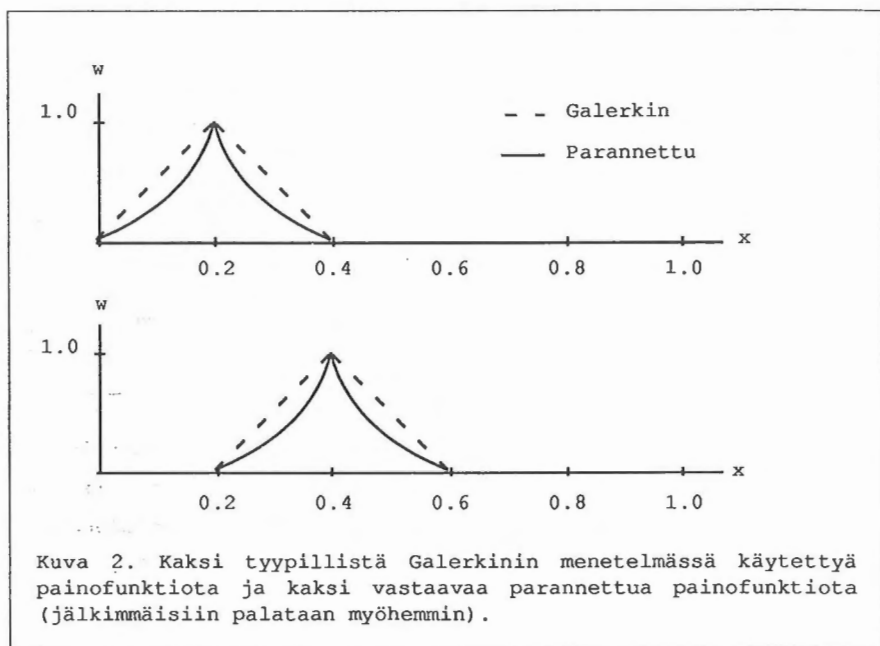


Tarkastellaan dimensiottomaan muotoon saatettua probleemaa erityisesti tapauksessa, jossa suure $k=1$ (lämmönjohtavuus, jos käsitellään lämmönjohtumisprobleemaa, jolloin ϕ on lämpötila) ja ns. nielutekijä $c=1000$ ovat vakioita ja lähdetermi $Q=0$. Jos reunaehdoiksi asetetaan $\phi(0)=1$ ja $\phi(1)=0$, analyyttiseksi ratkaisuksi tulee

$$\phi = \frac{\sinh[\sqrt{1000}(1-x)]}{\sinh(\sqrt{1000})}, \quad x \in [0, 1]. \quad (11)$$

Kuvassa 1 esitetään numeerinen Galerkinin menetelmällä saatu ratkaisu, kun funktion ϕ approksimaatiossa on käytetty säännöllistä, viidesettä kaksisolmuista janaelementistä muodostuvaa verkkoa. Ratkaistavan funktion approksimaatio on elementteittäin lineaarista tyyppiä. Kuvassa 2 esitetään kaksi tyypillistä Galerkinin keinossa käytettyä painofunktiota, jotka on valittu siis muotofunktioiden joukosta. Kuvan 1 rat-

kaisussa näkyy epämiellyttävää heilahtelua, joka tosin vaimenee melko nopeasti origosta etäännyttäessä. Vaikka energianormin mielessä ratkaisu onkin optimaalinen, niin maallikon intuitiivisen normin mielessä se on epätydyttävä. Etenkin menetelmä, joka antaisi solmuissa tarkat arvot, tuntuisi paremmalta. Matemaattisessa kirjallisuudessa tällaista funktiota nimitetään tarkan ratkaisun interpolantiksi. Interpolantti-ratkaisun etuna on mm., että se ei voi ilmeisestikään koskaan tulla



epästabiiliksi. Lisäksi saadaan hyötyä ratkaisua tarvittaessa tarkennettaessa. Esimerkiksi kuvan 1 esittämässä tapauksessa interpolantin virhe on oleellinen vain ensimmäisessä elementissä. Siinä voidaan etsiä tarkempi ratkaisu tihennetyllä verkolla, jolloin käytettävissä ovat (parhaassa tapauksessa) tarkat solmuarvot. Tämäntyyppinen käyttäytyminen on selvästi hyödyllistä mm. adaptiivisten menetelmien yhteydessä.

Esimerkkiprobleemamme on ns. itseadjungoitua tyyppiä /3/, joiden yhteydessä Galerkinin keinon tiedetään kritiikistämme huolimatta toi-

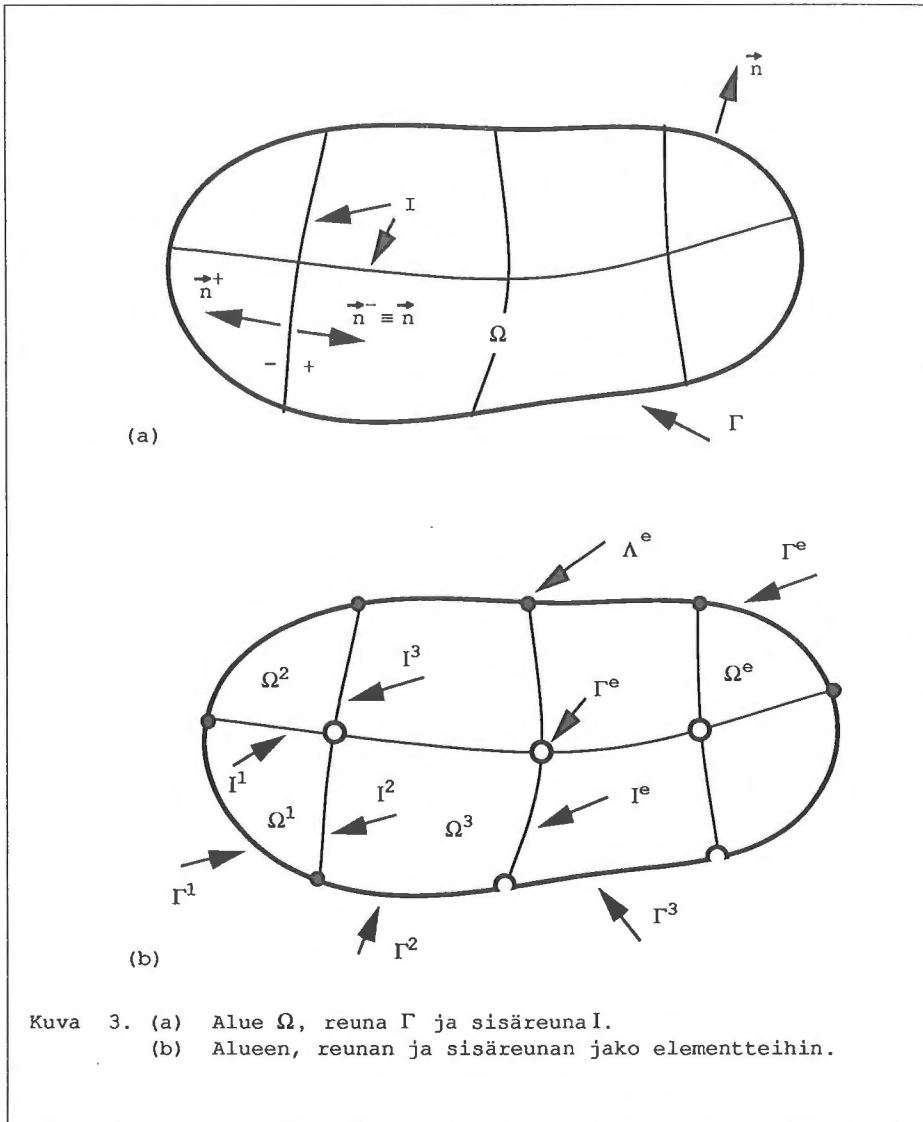
mivan yleensä kohtuullisen hyvin. Kun siirrytään ei-itseadjungoituihin problemeihin, joita esiintyy etenkin virtausmekaniikassa, Galerkinin keino johtaa usein jo täysin käyttökelvottomiin tuloksiin ja on pakko ryhtyä miettimään huolellisesti sopivien painofunktioiden systemaattista valintaa.

MERKINNÖISTÄ

Käytetään kuvan 3 esittämää kaksidimensioista tapausta havainnollistamaan eräitä jatkossa tarvittavia merkintöjä. Johdannossa mainittujen aiheiden 1 ja 2 huomioonotto vaatii nimittäin hyvin systemaattisen merkintäkaluston.

Tarkasteltava avoin alue Ω (kuva 3(a)) jaetaan osa-alueisiin eli elementteihin Ω^e , $e=1,2,\dots$ (kuva 3(b)). Tarvittaessa voidaan käyttää täsmällisempää nimitystä alue-elementti. Kukin elementti Ω^e ajatellaan myös avoimeksi alueeksi. Elementtien yhteiset reunat muodostavat alueen ns. sisäisen reunan tai lyhyesti sisäreunan I (engl. interior boundary, interfaces). Ns. ulkoiselle reunaanalle käytetään tunnusta Γ . Kuvissa 3 tämä reunaanosa esitetään paksunnetulla viivalla. Mahdollisten epäjatkuvuuksien otaksutaan esiintyvän korkeintaan reunalla I .

Paitsi itse alue Ω myös alueen reuna tai korostetusti ulkoreuna Γ ja sisäreuna I ajatellaan seuraavassa jaetuiksi kuvan 3(b) tapaan elementteihin. Myös nämä elementit Γ^e ja I^e otetaan avoimiksi. Alkuperäisestä ratkaisialueesta $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ on toistaiseksi unohdettu pisteet, jotka sijaitsevat alue-elementtien nurkissa. Näille pisteille tai piste-elementeille tullaan tarpeen vaatiessa käyttämään merkintää Λ^e . Kuvassa 3 piste-elementit esitetään kokonaan mustina. Osaan pisteistä, jotka kuvassa ovat mustaamattomia, ei tulla kuitenkaan liittämään piste-elementtiä. Käytännössä toimitaan siten, että näiden pisteiden kohdalta poistetaan alkuperäisestä alueesta aluksi ε -säteinen alue. Lopulta kun tarvittavat yhtälöt on synnytetty, asetetaan $\varepsilon \rightarrow 0$.



Tempun tarkoituksena on välttää tiettyjä kaksi- ja useampidimensioisissa tapauksissa syntyviä ongelmia. Yksidimensioisessa tapauksessa tätä menettelyä ei tarvita.

Jatkossa tulee esiintymään integraaleja alueen Ω , reunan Γ ja sisäreunan I ylitse. Täten voidaan kirjoittaa

$$\int_{\Omega} () d\Omega = \sum_e \int_{\Omega^e} () d\Omega, \quad (12)$$

$$\int_{\Gamma} () d\Gamma = \sum_e \int_{\Gamma^e} () d\Gamma, \quad (13)$$

$$\int_I () dI = \sum_e \int_{I^e} () dI. \quad (14)$$

Nämä kaavat vaativat eräitä huomautuksia. Ensinnäkin eri summien elementtinumeroindeksien e ylärajat poikkeavat yleensä toisistaan. Toisin sanoen alue-elementit, reunaelementit ja sisäreunaelementit on numeroitu toisistaan riippumatta yhdestä eteenpäin (kuva 3(b)). Huomatakoon, että tässä siis poiketaan mm. lähteen /4/ käytännöstä, jossa merkintä Γ^e viittaa alue-elementin Ω^e reunaan. Toiseksi sisäreuna on luonteeltaan samanlainen olio kuin varsinainen reuna, joten voidaan tarvittaessa suorittaa merkinnällinen askel $dI \rightarrow d\Gamma$. Koska sisäreuna tulee kuitenkin hyvin oleellisena mukaan, on sille haluttu varata oma kirjaintunnus ja näin vähentää tarvittavien indeksien määrää; lähteessä /2/ olivat käytössä tunnusten Γ^e ja I^e sijasta raskaammat merkinnät Γ_{ext}^e ja Γ_{int}^e . Edelleen termillä reunaelementti ei tarkoiteta tässä siis välttämättä ns. reunaelementtimenetelmän (engl. boundary element method) elementtiä. Lopuksi reunan tunnus Γ varustetaan tarvittaessa sopivilla alaviitteillä. Täten esimerkiksi tunnukset Γ_G ja Γ_h tarkoittavat reunan osia, joilla vallitsevat tietyn tyyppiset reunaehdot. Reunanosalla Γ_e tarkoitetaan reunaa, joka syntyy solmujen kohdille.

Hyppyehtojen ja osittaisintegroitien käsittelyä varten kunkin sisäreunan sileän osan eli siis käytännössä sisäreunaelementin eri puolet varustetaan mielivaltaisella tavalla - ja + merkinnöillä (kuva 3(a)). Käytetään lisäksi lyhennysmerkintää (ns. hyppysulkeet)

$$[[f]] = f^+ - f^-, \quad (15)$$

jossa f^+ ja f^- viittaavat suureen f raja-arvoihin sisäreunalla sen plus- ja miinuspuolelta reunaa lähestyttäessä. Kuvasta 3(a) käyvät myös selville reunan I yksikkönormaalivektoreita koskevat yhteydet

$$\vec{n}^+ = -\vec{n}^- , \quad (16)$$

$$\vec{n} \equiv \vec{n}^- . \quad (17)$$

Ne voidaan varustaa tarvittaessa viitteellä I , jos on vaaraa sekaannuksesta reunan Γ ulkoisen yksikkönormaalivektorin \vec{n} kanssa. Huomautettakoon edelleen, että mm. lähteessä /4, s.68/ suureiden \vec{n}^+ ja \vec{n}^- suunnat on määritelty päinvastoin kuin tässä.

Osittaisintegrointi on elementtimenetelmässä elämän ja kuoleman kysymys. Alan kirjallisuudessa esiintyvä tavanomainen käyttökaava voidaan pukea muotoon

$$\int_{\Omega} g \frac{\partial h}{\partial x_{\alpha}} d\Omega = \int_{\Gamma} n_{\alpha} g h d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{\partial g}{\partial x_{\alpha}} h d\Omega . \quad (18)$$

Suureet g ja h ovat alueessa Ω ja sen reunalla Γ määriteltyjä jatkuvasti derivoituvia funktioita, x_{α} , $\alpha=1, \dots, d$ on karteellinen suorakulmainen koordinaatti, n_{α} , $\alpha=1, \dots, d$ on ulkoisen yksikkönormaalin vastaava suorakulmainen komponentti ja $d=1, 2$ tai 3 on tehtävän riippumattomien paikkakoordinaattien lukumäärä. Tässä esityksessä osittaisintegroinnit suoritetaan kuitenkin alue-elementteittäin. Kaavan (18) vastineeksi saadaan (sovelletaan kaavaa (18) elementti kerrallaan ja otetaan huomioon merkinnät (15), (16) ja (17))

$$\sum_e \int_{\Omega^e} g \frac{\partial h}{\partial x_{\alpha}} d\Omega = \sum_e \int_{\Gamma^e} n_{\alpha} g h d\Gamma + \sum_e \int_{\Gamma^e} n_{\alpha} [[-g h]] d\Gamma - \sum_e \int_{\Omega^e} \frac{\partial g}{\partial x_{\alpha}} h d\Omega . \quad (19)$$

Jälleen on muistettava, että summeerausten ylärajat vaihtelevat elementtityypistä riippuen.

Taulukko 1. Yleisten merkintöjen ja nimitysten mahdollisia erikoistapauksia.

<p>Yksidimensioinen tapaus : d=1</p> <p>$\Omega^e \rightarrow l^e$: janaelementti, $d\Omega \rightarrow dl$ tai dx</p> <p>$\Gamma^e \rightarrow$ piste-elementti, $e=1,2$</p> <p>$I^e \rightarrow$ piste-elementti, $e=0, \dots$</p> <p>$x_1 \rightarrow x$</p> <p>Kaksidimensioinen tapaus : d=2</p> <p>$\Omega^e \rightarrow A^e$: tasoelementti, $d\Omega \rightarrow dA = dx dy$</p> <p>$\Gamma^e \rightarrow s^e$: viivaelementti, $d\Gamma \rightarrow ds$</p> <p>$I^e \rightarrow s^e$: viivaelementti, $dI \rightarrow ds$</p> <p>$x_1 \rightarrow x, x_2 \rightarrow y$</p> <p>Kolmidimensioinen tapaus : d=3</p> <p>$\Omega^e \rightarrow v^e$: tilavuuselementti, $d\Omega \rightarrow dv = dx dy dz$</p> <p>$\Gamma^e \rightarrow S^e$: pintaelementti, $d\Gamma \rightarrow dS$</p> <p>$I^e \rightarrow S^e$: pintaelementti, $dI \rightarrow dS$</p> <p>$x_1 \rightarrow x, x_2 \rightarrow y, x_3 \rightarrow z$</p>

Kaavaa (19) tullaan soveltamaan jatkossa aina kyllästymiseen asti. Se on voimassa funktioille g ja h , joiden tarvitsee olla jatkuvasti derivoituvia vain erikseen kussakin alue-elementissä Ω^e ja sen reunalla $\partial\Omega^e$ eli sulkeumassa $\overline{\Omega^e} = \Omega^e \cup \partial\Omega^e$. Jos g (tai h) on jatkuva alue-elementistä toiseen siirryttäessä g (tai h) voidaan ottaa hyppysulkeiden ulkopuolelle. Jos molemmat funktiot ovat jatkuvia, hyppy-

termi katoaa ja saadaan siis erikoistapauksena tavanomainen kaava (18).

Edellä merkinnät on haluttu esittää melko yleispätevässä muodossa. Taulukko 1 pyrkii havainnollistamaan niiden sisältöä, kun $d=1,2$ tai 3. Jatkossa käytämme kuitenkin tavallisesti yleisiä tunnuksia. Demonstraatiomielessä havainnolliset yksidimensioiset tapaukset tulevat valitettavasti merkintöjen soveltamisen kannalta hieman eroamaan useampidimensioisista tapauksista. Yksidimensioisessa tapauksessa alueet I ja Γ koostuvat äärellisestä määrästä pisteitä, joka käytännössä merkitsee sitä, että integraalit reunojen ylitse korvautuvat summearauksella ko. pistejoukkojen ylitse. Esimerkiksi kaava (19) tullaan kirjaamaan yhdessä dimensiossa yleensä muotoon

$$\sum_e \int_{\Omega^e} g \frac{dh}{dx} d\Omega = \sum_e (n g h)_{\Gamma^e} + \sum_e (n [[-g h]])_{\Gamma^e} - \sum_e \int_{\Omega^e} \frac{dg}{dx} h d\Omega, \quad (20)$$

jossa merkintöjen sisältö vastaa useampidimensioisia tapauksia. (Huomattakoon, että n saa tässä tilanteesta riippuen arvon $+1$ tai -1 ja että ulkoinen reuna koostuu täsmälleen kahdesta pisteestä.)

ESIMERKKEJÄ

Probleema 1

Tarkastellaan uudelleen johdannon esimerkkiprobleemaa. Asetelma (1), (2) on klassillinen tehtävän kuvaus. Muunnamme nyt sen tämän artikkelin hengen mukaiseksi:

$$\frac{d}{dx} \left(-k \frac{d\phi}{dx} \right) + c \phi - Q = 0 \quad \Omega^e,$$

$$[[\phi]] = 0 \quad \Gamma^e,$$

$$[[-k \frac{d\phi}{dx}]] = 0 \quad \Gamma^e,$$

(21)

$$\phi - g = 0$$

$$\Gamma_g^e .$$

Yhtälöiden jäljessä olevat merkinnät viittaavat voimassaoloalueisiin. Ymmärrettävyyttä menettämättä voitaneen kirjoittaa lyhyesti esimerkiksi Ω^e eikä Ω^e :ssa tai $x \in \Omega^e$. Samoin pelkän yläviihteen esiintyminen viittaa siihen, että kyseessä oleva yhtälö on voimassa jokaisen elementin Ω^e , Γ^e tai Γ^e , $e = 1, 2, \dots$ alueella. Yhtälöitä kirjoitettaessa on funktion ϕ oletettu olevan vähintään kaksi kertaa jatkuvasti derivoituva kussakin alue-elementissä. Hyppyehdot vaativat ratkaistavan funktion ja ns. vuon tiheyden $-k d\phi/dx$ jatkuvuutta. Näihin ehtoihin palataan myöhemmin. Huomattakoon, että reunaehdossa indeksiksi e saa tässä vain arvot 1 ja 2, koska alueen reuna muodostuu kahdesta pisteestä. Merkintä g viittaa tässä nyt annettuun funktion ϕ arvoon.

Systemiä (21) vastaavan heikon muodon lähtökohdaksi otetaan

$$\sum_e \int_{\Omega^e} w_1 \left[\frac{d}{dx} \left(-k \frac{d\phi}{dx} \right) + c\phi - Q \right] d\Omega +$$

$$+ \sum_e (w_2 [\phi])_{\Gamma^e} + \sum_e \left(w_3 \left[\left[-k \frac{d\phi}{dx} \right] \right]_{\Gamma^e} \right) + \sum_e [w_4 (\phi - g)]_{\Gamma_g^e} = 0 \quad (22)$$

Kukin vallitseva yhtälö on siis kerrottu omassa alueessaan määritellyllä painofunktiolla (tai pisteittäisellä arvolla) w ja kaikki näin saadut yhtälöt on laskettu yhteen, jolloin syntyy yksi yhtälö, eräs ns. heikko muoto. Painofunktiot on numeroitu alaindekseihin. Korostetakaan, että painofunktiot ajatellaan aluksi täysin toisistaan riippumattomiksi olioiksi. Samoin niiden dimensiot on valittava siten, että yhtälön (22) vasen puoli -vallitsevan systeemin ns. painotettu kokonaisjäännös- tulee dimensionaalisesti homogeeniseksi. On oletettavissa, että järkevässä formulaatiossa kenttäyhtälön painofunktion w_1 ja hyppy- ja reunaehtojen painofunktioiden tai tässä tapauksessa paremmin painovakioiden w_2 , w_3 ja w_4 välillä tulee vallita tiettyjä riippuvuuksia. Näiden systemaattinen etsiminen on seuraava tavoite.

Tavoitetta kohti päästään myöhemmin selviävistä syistä suoritta-

malla osittaisintegrointeja, jotka vapauttavat lopuksi kenttäyhtälöstä tulevista termeistä tuntemattomaan funktioon kohdistuvat derivaatat. Kaavan (20) soveltaminen kerran muodossa $g \hat{=} w_1$, $h \hat{=} -k \frac{d\phi}{dx}$ muuntaa yhtälön (22) seuraavaksi:

$$\begin{aligned} & \sum_e \int_{\Omega_e} \left(\frac{dw_1}{dx} k \frac{d\phi}{dx} + c w_1 \phi - w_1 Q \right) d\Omega + \\ & + \sum_e \left(w_2 [[\phi]] + w_3 \left[\left[-k \frac{d\phi}{dx} \right] \right] + n \left[\left[w_1 k \frac{d\phi}{dx} \right] \right] \right)_{\Gamma_e} + \\ & + \sum_e \left[w_4 (\phi - g) - n w_1 k \frac{d\phi}{dx} \right]_{\Gamma_g^e} = 0 . \end{aligned} \quad (23)$$

Huomattakoon, että tässä tehtävässä $\Gamma_g = \Gamma$. Sovelletaan vielä kerran kaavaa (20) muodossa $g \hat{=} k \frac{dw_1}{dx}$, $h \hat{=} \phi$, jolloin saadaan yhtälö

$$\begin{aligned} & \sum_e \int_{\Omega_e} \left(\left[\frac{d}{dx} \left(-k \frac{dw_1}{dx} \right) + c w_1 \right] \phi - w_1 Q \right) d\Omega + \\ & + \sum_e \left(w_2 [[\phi]] + w_3 \left[\left[-k \frac{d\phi}{dx} \right] \right] + n \left[\left[w_1 k \frac{d\phi}{dx} \right] \right] + n \left[\left[-k \frac{dw_1}{dx} \phi \right] \right] \right)_{\Gamma_e} + \\ & + \sum_e \left[\left(w_4 + n k \frac{dw_1}{dx} \right) \phi - n w_1 k \frac{d\phi}{dx} - w_4 g \right]_{\Gamma_g^e} = 0 . \end{aligned} \quad (24)$$

Kehitetyt lausekkeet ovat melko raskaan näköisiä. Niiden synnyttäminen vaatii kuitenkin pelkästään koneellisia manipulaatioita. Tärkeä huomio: Kaikki kolme muotoa (22), (23) ja (24) ovat teoreettisesti samanarvoisia, jos kyseessä olevat funktiot ovat pelkästään alue-elementteittäin kerran jatkuvasti derivoituvia. Sen sijaan kirjallisuudessa yleisesti esitettyjen heikkojen muotojen osittaisintegroitujen eri versioiden samanarvoisuus ei ole yleensä voimassa.

Toistaiseksi ei ole tehty oletuksia ratkaistavan funktion jatkuvuudesta elementtien välillä. Koska pyrkimyksenä on aikaansaada menetelmä, jolla ratkaisun virhe elementtien reunoilla sijaitsevilla solmuissa on pieni, niin rajoitutaan tapaukseen, jossa ϕ on jatkuva ja siis $[[\phi]] = 0$. Oletusta ei liene vaikeaa ymmärtää: Muutoinhan virheellä

ei olisi välttämättä tiettyä yksikäsitteistä arvoa ko. pisteessä jolloin minimointi tuottaisi ilmeisiä ongelmia. Osoittautuu myös, että valinta $[[w_1]] = 0$ sisäisellä reunalla Γ^e yksinkertaistaa tilannetta huomattavasti. Suureet ϕ ja w_1 voidaan nyt siirtää hyppysulkeiden ulkopuolelle, jolloin muodosta (24) saadaan hieman termejä järjestelmällä esitys

$$\begin{aligned} & \sum_e \int_{\Omega^e} \left(\left[\frac{d}{dx} \left(-k \frac{dw_1}{dx} \right) + c w_1 \right] \phi - w_1 Q \right) d\Omega + \\ & + \sum_e \left[(w_3 - n w_1) \left[-k \frac{d\phi}{dx} \right] + n \left[-k \frac{dw_1}{dx} \right] \phi \right]_{\Gamma^e} + \\ & + \sum_e \left[\left(w_4 + n k \frac{dw_1}{dx} \right) \phi - n w_1 k \frac{d\phi}{dx} - w_4 g \right]_{\Gamma_g^e} = 0 . \end{aligned} \quad (25)$$

Saadun yhtälön vasen puoli edustaa edelleen painotettua kokonaisjäännöstä, mutta nyt on aikaisempiin heikkoihin muotoihin verrattuna helpompaa tehdä hyödyllisiä johtopäätöksiä. Oleellinen kysymys on: Jos tarkastellaan tiettyä jollakin sisä- tai ulkoreunan osalla sijaitsevaa solmua, niin millä painofunktioiden valinnalla heikkoa muotoa käyttäen saatava solmuarvo on mahdollisimman lähellä tarkkaa arvoa? Pyritään ratkaisuun hävittämällä kokonaisjäännöksestä kaikki termit paitsi ne, joissa ϕ esiintyy kertoimena pelkästään sisä- tai ulkoreunalla. Saadaan vaatimukset

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(-k \frac{dw_1}{dx} \right) + c w_1 &= 0 & \Omega^e , \\ w_3 - n w_1 &= 0 & \Gamma^e , \\ w_1 &= 0 & \Gamma_g^e , \end{aligned} \quad (26)$$

joiden tarkka toteuttaminen pelkistäisi heikon muodon seuraavaksi

$$\sum_e \int_{\Omega^e} (-w_1 Q) d\Omega + \sum_e \left(n \left[-k \frac{dw_1}{dx} \right] \phi \right)_{\Gamma^e} +$$

$$+ \sum_e \left[\left(w_4 + n k \frac{dw_1}{dx} \right) \phi - w_4 g \right]_{\Gamma_g^e} = 0 . \quad (27)$$

Tarkastellaan ensin hieman vaatimuksia (26). Niistä ensimmäinen esittää alkuperäistä kenttäyhtälöä nyt painofunktiota w_1 koskevana ja homogeenisena (siis ilman lähdetermiä). Yleisemmässä tapauksessa osoittautuu, että saadaan alkuperäisiä kenttäyhtälöitä vastaava ns. adjungoitu systeemi /3/, jonka painofunktioiden tulisi toteuttaa. Tarkastelun alainen esimerkki on itseadjungoitu, jolloin alkuperäinen ja adjungoitu differentiaalioperaattori ovat siis identtisiä. Kritiikkinä voitaisiin todeta, että differentiaaliyhtälön (26) toteuttaminen näyttää miltei yhtä vaikealta -vain lähdetermi puuttuu- kuin alkuperäisen yhtälön. Yksidimensioisessa esimerkkiprobleemassamme toteuttaminen kyllä vielä onnistuu etenkin, jos k ja c ovat vakioita tai ne otaksutaan elementteittäin vakioiksi. Yleensä tähän ei ole käytännössä mahdollista päästä, vaan on vain tyydyttävä matkimaan adjungoidun tehtävän ratkaisun oleellisia piirteitä. Aiheeseen palataan tarkemmin myöhemmin. Jos kuitenkin painofunktiot pystytään valitsemaan siten, että adjungoitu systeemi toteutuu täsmällisesti, saadaan ehkä hieman yllättävä tulos: Tällöin funktioiden approksimaatioiden kululla itse alue-elementtien sisällä ei ole mitään merkitystä. Täten siis pelkkä approksimaatio alueissa I^e ja Γ_g^e riittäisi. Tämä viittaa sukulaisuuteen reunaelementtimenetelmän kanssa. Loput vaatimuksista (26) on helppo toteuttaa eivätkä kaipaa kommentointia.

Palataan heikkoon muotoon (27). Keskitytään tiettyyn pisteessä x_i olevaan solmuun i . Jos piste sijaitsee sisäreunapiste-elementissä I^k , tehdään lisävalinnat

$$n \left[\left[-k \frac{dw_1}{dx} \right] \right] = \gamma \delta_k^e \quad I^e , \quad (28)$$

$$w_4 + n k \frac{dw_1}{dx} = 0 \quad \Gamma_g^e .$$

Edellä merkintä δ_k^e tarkoittaa Kroneckerin deltaa ja kerroin γ on nollasta eroava, arvoltaan muuten mielivaltainen, mutta dimensio-

naalisesti oikeellinen suure. Yhtälö (27) on nyt kutistunut muotoon

$$\gamma \phi_k + \sum_e \int_{\Omega^e} (-w_1 Q) d\Omega + \sum_e \left(n k \frac{dw_1}{dx} g \right)_{\Gamma_g^e} = 0 . \quad (29)$$

Huomattakoon, että jälkimmäisiä yhtälöitä (28) on käytetty hyväksi yhtälön (29) muodostamisessa. Todettakoon edelleen, että ainoa tuntematon on arvo ϕ_k ja että vain painofunktio w_1 on jäljellä formulaatiossa. Koska yhtälö (29) pätee sellaisenaan tarkalle ratkaisulle ϕ ja koska sen pätemistä vaaditaan myös diskreettejä yhtälöitä synnytetäessä approksimaation $\hat{\phi}$ suhteen, saatu solmuarvo on tarkka. Tämä voidaan todeta yksityiskohtaisemmin vähentämällä näin syntyvät kaksi yhtälöä puolittain toisistaan.

Käsitellään seuraavaksi alueen reunalla -vaikka vasemmassa päässä- olevaan solmuarvoon liittyvän yhtälön synnyttämistä. Yhtälöä (27) tarkastelemalla todetaan, että sopiva valinta on nyt

$$n \left[\left[-k \frac{dw_1}{dx} \right] \right] = 0 \quad \Gamma^e , \quad (30)$$

$$\left(w_4 + n k \frac{dw_1}{dx} \right) = \gamma \delta_k^e \quad \Gamma_g^e ,$$

jossa k on kyseisen reunapiste-elementin numero. Yhtälöt on helppo toteuttaa ottamalla $w_1 \equiv 0$ (adjungoidun kenttäyhtälön eräs ratkaisu) ja $w_4 = \gamma \delta_k^e$. Yhtälöstä (27) jää jäljelle tulos

$$\sum_e [\gamma \delta_k^e (\phi - g)]_{\Gamma_g^e} = 0 \quad (31)$$

eli käytetty valinta antaa tarkan ratkaisun reunapisteissä. Näin on päädytty automaattisesti yhtälöön, joka kirjataan tavallisesti suoraan ilman sen enempää miettimistä.

Palataan vielä edellä korostettuun seikkaan, että kaikki esitetyt heikon muodon eri versiot ovat matemaattisesti samanarvoisia. Pisimmälle osittaisintegroitu versio antaa parhaat mahdollisuudet miettiä hyviä painotuksia. Mutta kun sopivat painotukset on löydetty, on

useimmiten käytännön laskelmien kannalta edullista valita jokin toinen versio lähtökohdaksi etenkin, kun useampidimensioisissa tapauksissa adjungoituja differentiaaliyhtälöitä ei kuitenkaan pystytä toteuttamaan täysin tarkasti. Esimerkkiprobleemassamme sopiva laskentaversio perustuu esitysmuotoon (23), jossa tehdään vain käytännössä helposti toteutettavat valinnat. Ehdoista (26) toteutetaan kaksi viimeistä, jolloin päädytään heikkoon muotoon ($w_1 \rightarrow w$)

$$\sum_e \int_{\Omega^e} \left(\frac{dw}{dx} k \frac{d\phi}{dx} + c w \phi - w Q \right) d\Omega + \sum_e [w_1(\phi - g)]_{\Gamma_g^e} = 0 \quad (32)$$

Laskentaversioon yhteydessä funktioiden w ja ϕ tulee olla jatkuvia ja funktion w pitää hävitä ratkaisualueen reunoilla. Jos tarkastellaan reunan Γ_g^e solmua, painofunktiot valitaan yhtälöiden (30) ja yhtälöistä (26) ensimmäisen mukaan. Kuten todettiin, tällöin päädytään tavanomaiseen vaatimukseen $\phi - g = 0$ ko. pisteessä. Jos taas tarkastellaan sisäsolmua, painofunktiot valitaan yhtälöistä (26) ensimmäisen ja yhtälöiden (28) mukaan. Huomattakoon, että jälkimmäinen termi häviää jo saatujen yhtälöiden $\phi - g = 0$ (reunalla Γ_g^e) seurauksena. Koska väärinkäsityksen vaaraa ei juuri ole, yhtälössä (32) on luovuttu approksiimaatiomerkitöjen käytöstä. Esitetty heikko muoto (32) on täsmälleen sama kuin alan kirjallisuudessa suositeltu tehtävän numeerisen ratkaisun lähtökohhta. Tavanomaisessa menetelmässä painofunktiot valitaan kuitenkin ratkaistavan funktion approksimoinnissa käytettyjen funktioiden joukosta.

Ennen kuin jatketaan esimerkkiprobleeman käsittelyä todetaan yleisesti kaksi erittäin mielenkiintoista seikkaa. Esitetty ajatuskulku näyttäisi ainakin tässä tuottavan toteutuessaan parhaimmillaan seuraavaa:

1. Systeemimatriisi on puhdas lävistäjämatriisi, joten tuntemattomien solmuarvojen ratkaiseminen on triviaalia.
2. Saadut solmuarvot ovat tarkkoja.

Tämähän on parasta, mitä yleensä voisi tapahtua ja tietenkin liian hyvää ollakseen yleisemmin käytännössä totta. Ongelmat kertyvät painofunktioilta vaadittujen ehtojen toteuttamisvaikeuksista etenkin sisäreunan pisteissä. Kohdat 1 ja 2 antavat kuitenkin voimakkaan kiihokkeen pyrkiä kohti ko. ehtojen jonkinasteista tyydyttämistä.

Käytännössä voidaan käyttää elementtikohtaisia painofunktioita

$$w_i^e = a_i \frac{\sinh(2\beta N_i^e)}{\sinh(2\beta)} , \quad (33)$$

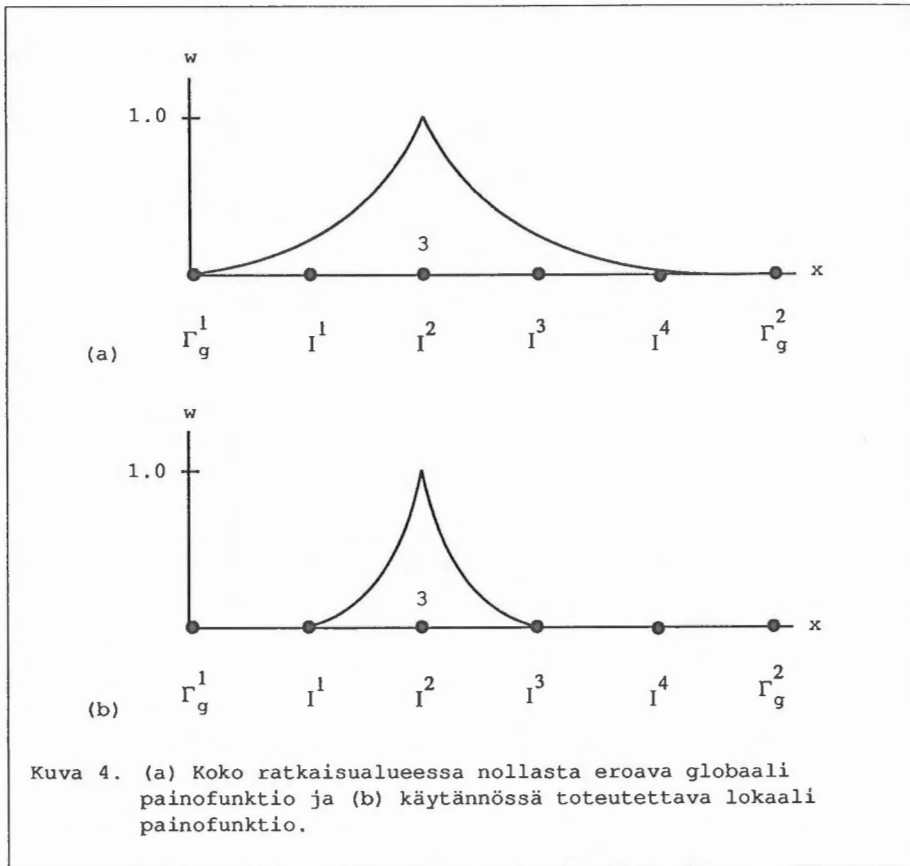
joissa indeksit viittaavat kaksisolmuisen elementin lokaaliin solmunumerointiin. Painofunktiot on lausuttu tavanomaisten lineaaristen muotofunktioiden $N_i^e = (1 + m_i \xi)/2$ avulla. (Lausekkeessa $m_1 = -1$, $m_2 = 1$. Paikallisen $\xi \in [-1, 1]$ koordinaatiston origo on kiinnitetty tarkasteltavan elementin keskipisteeseen.) Parametri $\beta = \sqrt{(dx/d\xi)^2 c/k}$, jossa annetut funktiot c ja k ajatellaan korvatuiksi elementin keskipisteessä lasketuilla arvoillaan.

Painofunktiot on muodostettu lausumalla adjungoitu yhtälö paikallisessa koordinaatistossa pitäen kertoimia elementtikohtaisesti vakioina ja käyttäen reunaehtoja $w_i^e(\xi_j) = a_i \delta_{ij}$, jossa ξ_j on solmun j paikallinen koordinaatti ja δ_{ij} Kroneckerin delta. Painofunktioiden lausekkeissa esiintyvä skaalauskerroin a_i on tarkoitus määrittää periaatteessa siten, että ensimmäinen yhtälöistä (28) toteutuu tarkasteltavan solmun kohdalla. Skaalaustekijän valinnalla saadaan syntyvän lineaarisen yhtälöryhmän lävistäjäalkiot yhtäsuuriksi. Likimääräinen, mutta sopivan yksinkertainen valinta on

$$a_i = \frac{\gamma}{k} \frac{dx}{d\xi} \frac{\tanh(2\bar{\beta})}{2\bar{\beta}} , \quad (34)$$

joissa yläviiva tarkoittaa tarkasteltavaan solmuun liittyvistä elementeistä otettua keskiarvoa. Yhtälöön (34) on päädytty tarkastelemalla tapausta, jossa k ja c ovat vakioita ja elementit yhtä pitkiä. Jos halutaan välttää hieman hankalahko skaalauskerroimien muodostaminen, voidaan pahemmin tilanteeseen vaikuttamatta asettaa $a_1 = a_2 = 1$. Tällöin

rajalla, kun $\beta \rightarrow 0$, painofunktiot (33) palautuvat tavanomaisiksi lineaarisiksi painofunktioiksi ($\sinh(x) \approx x$, kun $|x| \ll 1$). Näin ollen elementtiverkkoa riittävästi tihennettäessä (k ja c kiinteät) päädytään tavanomaiseen Galerkinin menetelmään edellyttäen, että ratkaistavan funktion approksimaatio on paloittain lineaarista tyyppiä. Galerkinin menetelmälle helposti johdettavien suppenevuustulosten voidaan olettaa



pätevän siis myös painofunktioita (33) käytettäessä: Numeerinen ratkaisu saadaan mielivaltaisen lähelle tarkkaa ratkaisua ainakin energianormin mielessä valitsemalla verkko riittävän tiheäksi. Galerkinin menetelmään päädytään tietysti myös harvallaakin elementtiverkolla mi-

käli suhde c/k on jossain mielessä pieni. Tämä selittää osaltaan Galerkinin menetelmällä saatavien ratkaisujen tarkkuutta solmupisteissä tässä erikoistapauksessa.

Kuvassa 4 on hahmoteltu kaksi tapaa synnyttää solmun 3 kannalta hyvä painofunktio. Sekä kuvan 4(a) että 4(b) esittämissä tapauksissa painofunktio w on valittu siten, että se toteuttaa alue-elementeittäin adjungoidun kenttäyhtälön (26). Ensimmäisen ehdoista (28) toteuttaminen johtaa kuvan 4(a) esittämään, koko alueessa nollasta eroavaan ns. globaalin painofunktion w valintaan. Tämä antaa juuri kaavan (29) eli solmuarvo ϕ_3 saadaan suoraan 'omasta yhtälöstään'. Tietysti samaan tulokseen tullaan myös yhtälön (32) avulla. Globaalit painofunktiot eivät ole elementtimenetelmän yhteydessä erityisen mukavia; on normaalia, että tietyn yhtälön termit kertyvät maantieteellisesti lähekkäisistä elementeistä. Huomautettakoon, että tämä globaali painofunktio saadaan lokaalien painofunktioiden (33) lineaarikombinaationa. Itse asiassa syntyvä globaali painofunktio on tuttu tehtävää (21) vastaava ns. Greenin funktio $/3/$, johon on tässä päädytty hieman tavanomaisesta poikkeavasta lähtökohdasta. Kuvan 4(b) valinta on enemmän elementtimenetelmän hengen mukainen. Kyseessä on lokaalinen yhtälöiden (33) mukainen painofunktio, jossa on asetettu $a_1 = a_2 = 1$. Nyt eivät ehdot (28) enää toteudu kaikissa sisäreunan pisteissä. (Tässä siis $k=2$ ja pisteissä I^1 ja I^3 $n[[-k dw_1/dx]] \neq 0$.) Kaavaa (27) tarkastelemalla havaitaan, että päädytään yhtälön (29) sijasta tyyppilliseen muotoon ($i=3$)

$$k_{i,i-1} \phi_{i-1} + k_{i,i} \phi_i + k_{i,i+1} \phi_{i+1} + P_i = 0, \quad (35)$$

jossa kertoimet k ja P ovat laskettavissa. Toisaalta approksimaation $\hat{\phi}$ soveltaminen tuottaa yhtälön

$$k_{i,i-1} \hat{\phi}_{i-1} + k_{i,i} \hat{\phi}_i + k_{i,i+1} \hat{\phi}_{i+1} + P_i = 0. \quad (36)$$

Huomattakoon, että vaikka kyseessä on ulkonäöltään tavanomainen elementtimenetelmän yhtälö, se on syntynyt poikkeuksellisella tavalla

siten, että tuntemattoman funktion arvot tietyissä pisteissä esiin-
tyvät valmiiksi siinä. Vähentämällä yhtälöt (35) ja (36) puolittain
saadaan tulos

$$k_{i,i-1}(\phi_{i-1} - \hat{\phi}_{i-1}) + k_{i,i}(\phi_i - \hat{\phi}_i) + k_{i,i+1}(\phi_{i+1} - \hat{\phi}_{i+1}) = 0. \quad (37)$$

Jos kaikki systeemyhtälöt voidaan synnyttää vastaavaan tapaan ja jos
kerroinmatriisi tulee ei-singulaariseksi, saadut solmuarvot ovat edel-
leen tarkkoja! Tämä nähdään homogeenisessa muodossa olevia yhtälöitä
(37) tarkastelemalla: Ainoa ratkaisu on $\phi_{i-1} - \hat{\phi}_{i-1} = 0$, jne.

Samaa tulokseen päädytään tietysti myös seuraavasti: On selvää,
että yhtälöiden (35) yhteen- ja vähennyslasku ei vaikuta yhtälöryhmän
ratkaisuun. Toisaalta yhtälöiden yhteen- ja vähennyslasku voidaan tul-
kita myös siten, että alkuperäisten lokaalien painofunktioiden sijas-
ta onkin käytetty näiden erästä lineaarikombinaatiota. Näin ollen, jos
globaali painofunktio, jonka käyttö takaa tarkan ratkaisun, on muo-
dostettavissa lokaalien painofunktioiden lineaarikombinaationa, myös
lokaaleja painofunktioita käytettäessä ratkaisu tulee olemaan tarkka.

Itse asiassa yhtälöihin (32) ja (33) perustuva ratkaisumenetelmä
antaa täsmälleen tarkat solmuarvot, jos c ja k ovat elementeittäin
vakioita valittiinpa funktion ϕ (jatkuva) approksimaatio miten tahan-
sa. Se, että yksidimensioisissa probleemoissa voidaan saada tietyissä
tapauksissa tarkkoja solmuarvoja ei ole uusi asia. Itseadjungoitujen
tehtävien yhteydessä eräs selittävä teoria esitettiin jo v. 1969 /5/.
Tässä vastaava tulos on saavutettu eri tietä ja tavalla, joka selittää
myös ei-itseadjungoidun tapauksen (kts. myös /6, liite 7/).

Tarkastellaan dimensiottomaan muotoon saatettua tehtävää, jota on
selostettu jo kuvan 1 yhteydessä. Taulukossa 2 esitetään tehtävän
tarkka ratkaisu, Galerkinin menetelmän antama ratkaisu sekä tässä
ehdotetun menetelmän antama ratkaisu. Kuvassa 2 on esitetty kaksi näy-
tettä menetelmän mukaisista painofunktioista, tosin kuvan 2 tilantees-
sa parametrin β arvo on pienempi kuin esimerkkit tehtävässä. Kummassakin

numeerisessa menetelmässä funktiolle ϕ on käytetty elementteittäin lineaarista approksimaatiota ja tarvittavat integraalit on laskettu numeerisesti Gaussin kolmen pisteen integrointikaavalla.

Taulukko 2. Esimerkkiprobleemalle eri menetelmillä saadut numeeriset ratkaisut.

x	'Tarkka'	Galerkin	(32), (33)
0.0	1.00000	1.00000	1.00000
0.2	1.79176E-3	-0.20607	1.79178E-3
0.4	3.21041E-6	4.24609E-2	3.21050E-6
0.6	5.75230E-9	-8.73476E-3	5.75247E-9
0.8	1.03067E-11	1.72664E-3	1.03067E-11
1.0	0.00000	0.00000	0.00000

Huolimatta tietyistä integroinnin tarkkuuteen liittyvistä epäilyistä havaitaan yhtälöihin (32), (33) perustuvan menetelmän toimivan halutulla tavalla. Galerkinin menetelmän antama ratkaisu on myös varsin tarkka lukuunottamatta kohtia $x = 0.2$ ja $x = 0.4$.

Esimerkki 2

Tarkasteltava probleema on

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx} \left(-k \frac{d\phi}{dx} \right) + \frac{d}{dx} (u\phi) - Q &= 0 & \Omega^e, \\
 \left[\left[-k \frac{d\phi}{dx} \right] \right] &= 0 & \Gamma^e, \\
 \phi - g &= 0 & \Gamma_g^e, \\
 n \left(-k \frac{d\phi}{dx} \right) - h &= 0 & \Gamma_h^e.
 \end{aligned}
 \tag{38}$$

Kyseessä on ns. konvektio-diffuusio reuna-arvotehtävä, jota on myös jo hieman tarkasteltu lähteessä /2/. Tehtävä syntyy mm. virtausmekaniikassa, kun kontinuumin liikkeen kuvaamiseen käytetään Eulerin esitys-

tapaa. Esimerkiksi yksidimensiainen lämmönjohtumistehtävä väliaineen ollessa liikkessa on edellä esitettyä muotoa. Tällöin tehtävään liittyvät suureet olisivat: Lämmönjohtavuus k , virtausnopeus u , lämpölähteen antoisuus Q ja tuntemattomana lämpötila ϕ . Näille suureille tul- laan käyttämään jatkossa suureiden todellisesta fysikaalisesta luon- teesta riippumatta lämmönjohtumistehtävään liittyviä nimityksiä. Kent- täyhtälössä sulkujen sisällä esiintyville termeille käytetään nimityk- siä diffuusiovuon ja konvektiovuon tiheys tässä järjestyksessä. Ky- seisten termien summaa kutsutaan kokonaisvuon tiheydeksi. Suure h on annettu diffuusiovuon tiheys.

Diffuusiovuon jatkuvuusehtoon päädytään soveltamalla energiataset- ta kontrollitilavuuteen, jonka paksuuden annetaan lähestyä nollaa. Reunaehdot kiinnittävät joko lämpötilan tai diffuusiovuon tiheyden ratkaisualueen reunoilla (vain kaksi pistettä). Käsittelyä on modi- fioitu edelliseen probleemaan nähden myös reunaehto- ja valikoiman suh- teen. Edellisen esimerkkiprobleeman käsittelyssä saatuun kokemukseen nojaten lämpötilan jatkuvuusehto toteutetaan ennakolta etsimällä ratkaisua jatkuvien funktioiden joukosta. Vastaavaa hyppyehtoa ei siis tarvitse kertoa millään painofunktiolla eikä ottaa mukaan kokonais- jäännökseen.

Nyt käsillä oleva tehtävä on kenttäyhtälössä esiintyvistä ensim- mäisen kertaluvun derivaatasta johtuen ei-itseadjungoitu. Näin ollen ei ole mitenkään itsestään selvää kuinka saadaan aikaan kohtuullisen luotettava numeerinen menetelmä. Tarkastellaan asiaa nyt vastaavalla mekaanisella tavalla kuin edellisessä esimerkkiprobleemassa. Jotta vertailu edellisen tapauksen kanssa helpottuisi, jätetään tässä paino- funktioiden luettelossa tunnus w_2 käyttämättä. Otaksutaan lisäksi painofunktio w_1 jatkuvaksi.

Systemiä (38) vastaavan heikon muodon lähtökohta on siis

$$\sum_e \int_{\Omega^e} w_1 \left[\frac{d}{dx} \left(-k \frac{d\phi}{dx} \right) + \frac{d}{dx} (u \phi) - Q \right] d\Omega +$$

$$+ \sum_e \left(w_3 \left[\left[-k \frac{d\phi}{dx} \right] \right] \right)_{I^e} +$$

$$+ \sum_e [w_4(\phi - g)]_{\Gamma_g^e} + \sum_e \left[w_5 \left(-n k \frac{d\phi}{dx} - h \right) \right]_{\Gamma_h^e} = 0 . \quad (39)$$

Kaavan (20) soveltaminen ensimmäisen integraalin ensimmäiseen termiin muuntaa heikon muodon aluksi seuraavaksi:

$$\begin{aligned} & \sum_e \int_{\Omega^e} \left[\frac{dw_1}{dx} k \frac{d\phi}{dx} + w_1 \frac{d}{dx} (u\phi) - w_1 Q \right] d\Omega + \\ & + \sum_e \left[(w_3 - n w_1) \left[\left[-k \frac{d\phi}{dx} \right] \right] \right]_{\Gamma^e} + \\ & + \sum_e \left[w_4(\phi - g) - n w_1 k \frac{d\phi}{dx} \right]_{\Gamma_g^e} + \\ & + \sum_e \left[n (w_5 + w_1) \left(-k \frac{d\phi}{dx} \right) - w_5 h \right]_{\Gamma_h^e} = 0 . \quad (40) \end{aligned}$$

Kaavan (20) soveltaminen vielä kerran ensimmäisen integraalin kahteen ensimmäiseen termiin johtaa yhtälöön

$$\begin{aligned} & \sum_e \int_{\Omega^e} \left(\left[\frac{d}{dx} \left(-k \frac{dw_1}{dx} \right) - u \frac{dw_1}{dx} \right] \phi - w_1 Q \right) d\Omega + \\ & + \sum_e \left[(w_3 - n w_1) \left[\left[-k \frac{d\phi}{dx} \right] \right] + n \left[\left[-k \frac{dw_1}{dx} \right] \right] \phi \right]_{\Gamma^e} + \\ & + \sum_e \left[\left(w_4 + n k \frac{dw_1}{dx} + n u w_1 \right) \phi - n w_1 k \frac{d\phi}{dx} - w_4 g \right]_{\Gamma_g^e} + \\ & + \sum_e \left[\left(n k \frac{dw_1}{dx} + n u w_1 \right) \phi + n (w_5 + w_1) \left(-k \frac{d\phi}{dx} \right) - w_5 h \right]_{\Gamma_h^e} = 0 . \quad (41) \end{aligned}$$

Yhtälössä on oletettu, että u on jatkuva, jolloin toisen termin osittaisintegroinnissa syntyvä suure $-w_1 u \phi$ hyppy häviää sisäisillä reunoilla. Hävitetään lausekkeesta jälleen kaikki muut termit paitsi ne, joissa ratkaistava funktio ϕ esiintyy joko sisäisillä tai ulkoisilla reunoilla valinnoilla:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} \left(-k \frac{dw_1}{dx} \right) - u \frac{dw_1}{dx} &= 0 & \Omega^e, \\
w_3 - n w_1 &= 0 & \Gamma^e, \\
w_1 &= 0 & \Gamma_g^e, \\
w_5 + w_1 &= 0 & \Gamma_h^e.
\end{aligned} \tag{42}$$

Jos nämä yhtälöt toteutetaan tarkasti, yhtälö (41) supistuu yksinkertaiseen muotoon

$$\begin{aligned}
&\sum_e \int_{\Omega^e} -w_1 Q \, d\Omega + \\
&+ \sum_e \left[n \left[\left[-k \frac{dw_1}{dx} \right] \right] \phi \right]_{\Gamma^e} + \\
&+ \sum_e \left[\left(w_4 + n k \frac{dw_1}{dx} \right) \phi - w_4 g \right]_{\Gamma_g^e} + \\
&+ \sum_e \left[n \left(k \frac{dw_1}{dx} + u w_1 \right) \phi + w_1 h \right]_{\Gamma_h^e} = 0.
\end{aligned} \tag{43}$$

Täsmälleen samalla tavalla kuin edellisessä esimerkkiprobleemassa yritetään saada aikaan tilanne, josta seuraa virheen eliminoituminen tarkasteltavassa pisteessä. Riippuen tarkastelupisteen sijainnista erotetaan kolme tapausta: Jos tarkasteltava piste sijaitsee sisäreunapiste-elementissä Γ^k , tehdään lisävalinnat

$$\begin{aligned}
n \left[\left[-k \frac{dw_1}{dx} \right] \right] &= \gamma \delta_k^e & \Gamma^e, \\
w_4 + n k \frac{dw_1}{dx} &= 0 & \Gamma_g^e, \\
n \left(k \frac{dw_1}{dx} + u w_1 \right) &= 0 & \Gamma_h^e.
\end{aligned} \tag{44}$$

Jos taas kysymyksessä on piste reunapiste-elementissä Γ_g^k , yhtälöä

(43) tarkastelemalla todetaan, että sopiva valinta on

$$\begin{aligned}
 n \left[\left[-k \frac{dw_1}{dx} \right] \right] &= 0 & \Gamma^e , \\
 w_4 + n k \frac{dw_1}{dx} &= \gamma \delta_k^e & \Gamma_g^e , \\
 n \left(k \frac{dw_1}{dx} + u w_1 \right) &= 0 & \Gamma_h^e .
 \end{aligned} \tag{45}$$

Viimein jos piste sijaitsee reunapiste-elementissä Γ_h^k , valitaan

$$\begin{aligned}
 n \left[\left[-k \frac{dw_1}{dx} \right] \right] &= 0 & \Gamma^e , \\
 w_4 + n k \frac{dw_1}{dx} &= 0 & \Gamma_g^e , \\
 n \left(k \frac{dw_1}{dx} + u w_1 \right) &= \gamma \delta_k^e & \Gamma_h^e .
 \end{aligned} \tag{46}$$

Jälleen kohdataan vaikeuksia tiettyjen ehtojen toteuttamisessa: Ehdoista (42) voidaan suoralta kädeltä toteuttaa vain kolme viimeistä. Adjungoidun kenttäyhtälön tarkka toteuttaminen ei tule kysymykseen, kuten on jo havaittu aikaisemmin, vaan yleensä on tyydyttävä matkimaan ratkaisua sopivasti. Ehdoista (44) tai (46) voidaan toteuttaa kustakin kaksi viimeistä. Ensimmäisen, funktion w_1 derivaatan hyppyyn, liittyvän ehdon tarkka toteuttaminen johtaisi koko ratkaisualueessa nol-
lasta eroavaan painofunktioon.

Ehdot (45) ovat erikoisasemassa, koska ne pystytään toteuttamaan tarkasti valinnoilla $w_1 \equiv 0$ ja $w_4 = \gamma \delta_k^e$. Valinta johtaa -kuten aikai-
semmassa esimerkissä- elementtimenetelmässä totuttuun käytäntöön, jos-
sa ratkaistavan funktion arvoja koskevat reunaehdot toteutetaan anta-
malla reunaan Γ_g^e liittyville vapausasteille suoraan vakioiden g mukai-
set arvot. Tämä nähdään helposti sijoittamalla valinnat yhtälöön (45).

Laskentamenetelmä voidaan perustaa mihinkä tahansa tarjolla ole-
vista samanarvoisista versioista (39), (40) ja (41); tietysti valitaan

se, jonka avulla laskelmat sujuvat helpoimmin. Tässä suhteessa versio (40) on paras. Kun otetaan huomioon yhtälöistä (42) kolme viimeistä, päädytään heikkoon muotoon ($w_1 \rightarrow w$)

$$\sum_e \int_{\Omega^e} \left[\frac{dw}{dx} k \frac{d\phi}{dx} + w \frac{d}{dx} (u\phi) - wQ \right] d\Omega + \sum_e (wh)_{\Gamma_h^e} + \sum_e [w_4(\phi - g)]_{\Gamma_g^e} = 0, \quad (47)$$

jonka yhteydessä funktioiden w ja ϕ tulee olla jatkuvia ja lisäksi painofunktion w tulee hävitä reunanosalla Γ_g^e . Saatu heikko muoto on jälleen täsmälleen sama kuin kirjallisuudessa esitetään. Käytäntö on kuitenkin osoittanut, ettei heikkoon muotoon (47) perustuva Galerkinin menetelmä toimi läheskään aina. Jos tarkastellaan reunanosaan Γ_g^e liittyvää solmua, sopiva painotus saadaan yhtälöiden (45) ja yhtälöistä (42) ensimmäisen avulla jolloin siis päädytään vaatimukseen $\phi - g = 0$. Viimeinen termi voidaan tämän jälkeen unohtaa (vrt. esimerkki 1). Tarkasteltaessa piste-elementteihin I^e ja Γ_h^e liittyviä solmuja sopiva painotus saadaan yhtälöistä (44) tai (46) vastaavassa järjestyksessä, sekä yhtälöistä (42) ensimmäisen avulla.

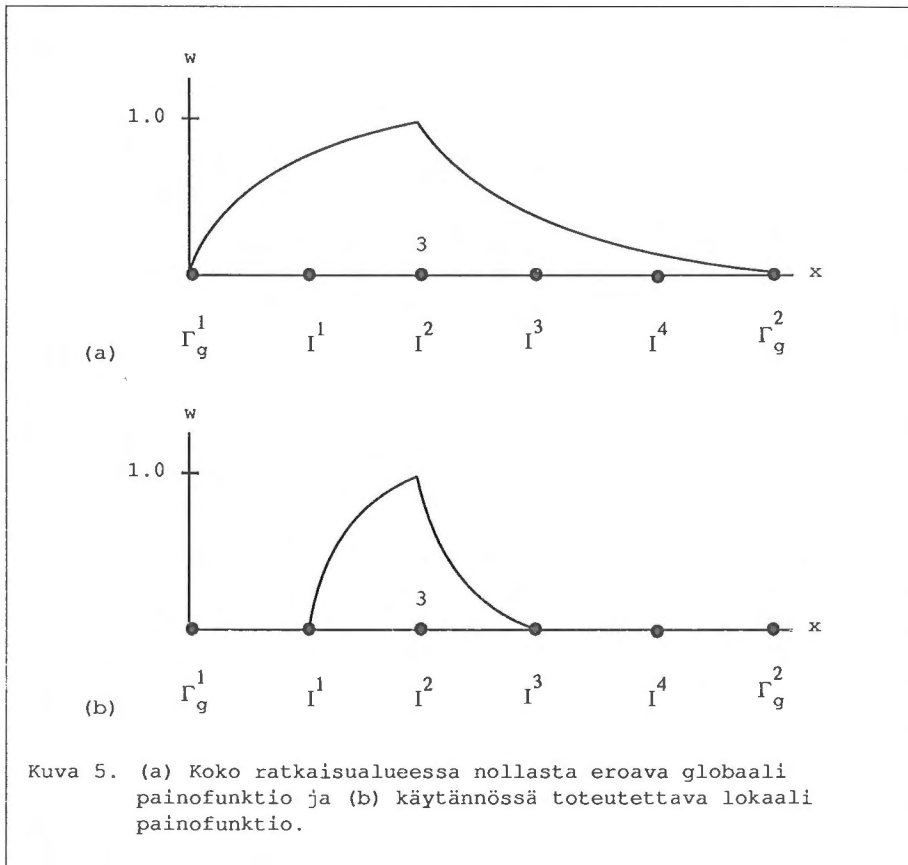
Eräs mahdollisuus on käyttää elementtikohtaisia lokaaleja painofunktioita

$$w_i^e = a_i \frac{\exp(2\alpha m_i N_i^e) - 1}{\exp(2\alpha m_i) - 1}, \quad (48)$$

jotka on määritetty samaan tapaan kuin esimerkissä 1 ratkaisemalla adjungoitu yhtälö sopivin reunaehdoin. Parametrin α arvo saadaan lausekkeesta $\alpha = -Pe$, jossa $Pe = (u dx/d\xi + dk/d\xi)/k$. Yleisesti ottaen parametri Pe on paikan funktio, mutta se ajatellaan korvatuksi elementin keskipisteessä lasketulla arvolla. Mikäli u ja k ovat elementteittäin vakioita painofunktiot (48) toteuttavat tarkasti adjungoidun tehtävän. Skalaustekijän a_i sopiva arvo (likimääräinen) saadaan lausekkeesta

$$a_i = \frac{\gamma}{k} \frac{dx}{d\xi} \frac{\tanh(\bar{\alpha})}{\bar{\alpha}}, \quad (49)$$

jossa yläviivalla tarkoitetaan tarkasteltavan solmun molemmilta puolilta otettua keskiarvoa (vrt. esimerkki 1). Skaalaustekijälle voidaan tässäkin käyttää haluttaessa arvoja $a_1 = a_2 = 1$.



Huomionarvoista on, että hyvin pienillä parametrin α arvoilla painofunktiot tulevat olemaan samoja kuin lineaariset muotofunktiot kerrottuna vakiolla. Näin ollen verkkoa riittävästi tihennettäessä päädytään lopulta Galerkinin menetelmään. Tietysti myös suhteen u/k ollessa jossain mielessä pieni, päädytään Galerkinin menetelmään hyvin harvallakin verkolla. Tämä selittää jälleen kerran Galerkinin menetel-

mällä ja lineaarisella approksimaatiolla saatavien solmuarvojen tarkkuutta tässä erikoistapauksessa.

Kuvassa 5(a) esitetään solmuun 3 liittyvän koko ratkaisualueessa nollasta eroavan ja kuvassa 5(b) käytännöllisemmän lokaalin painofunktion kuvaajat tapauksessa, jossa $\alpha < 0$ ei ole itseisarvoltaan kovin suuri ja vakio $a = 1$. Kaavojen (48) mukainen painofunktio (kuva 5(b)) on jatkuva, ja se toteuttaa hyppyehdot muualla paitsi solmuissa I^1 ja I^3 . Edellisestä esimerkistä poiketen painofunktiot eivät ole enää symmetrisiä solmun 3 suhteen. Tarkasteltavan reuna-arvot tehtävän numeeristen ratkaisumenetelmien yhteydessä puhutaan usein ylävirratuksesta (engl. upwinding), kun painotetaan tavalla tai toisella enemmän solmun ylävirran puolelle jäävää ratkaisualueen osaa. Motiivina on ratkaisumenetelmän stabiliteetin parantaminen. Tässä oikea -stabiiliin menetelmään johtava -painotus syntyy automaattisesti ilman sen syvällisempiä pohdintoja.

Taulukko 3. Eri menetelmillä saadut malliprobleeman ratkaisut.

x	'Tarkka'	Galerkin	(47), (48)
0.0	1.00000	1.00000	1.00000
0.2	1.00000	0.40382	1.00000
0.4	1.00000	1.13249	1.00000
0.6	1.00000	0.24189	1.00000
0.8	1.00000	1.33040	1.00000
1.0	0.00000	0.00000	0.00000

Taulukossa 3 esitetään vertailun vuoksi Galerkinin menetelmällä ja yhtälöihin (47) ja (48) perustuvalla menetelmällä saadut ratkaisut dimensiottomaan muotoon saatetussa malliprobleemassa $k = 1$, $u = 100$ ja $Q = 0$. Ratkaisualue, reunaehdot ja elementtityyppi ovat kuten edellisessä esimerkissä. Tarvittavat integraalien arvot on laskettu numeerisesti Gaussin kolmen pisteen kaavalla. Yhtälöihin (47) ja (48) perustuvalla menetelmällä saatu ratkaisu on laskentatarkkuuden puitteissa sama kuin tarkka ratkaisu. Sen sijaan Galerkinin menetelmä ei toimi tässä tapauksessa edes tyydyttävästi.

Esimerkki 3

Tarkastellaan lopuksi tehtävää

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(-k \frac{\partial \phi}{\partial x_\alpha} \right) + c \phi - Q &= 0 & \Omega^e, \\
 n_\alpha \left[-k \frac{\partial \phi}{\partial x_\alpha} \right] &= 0 & \Gamma^e, \\
 \phi - g &= 0 & \Gamma_g^e; \Lambda_g^e, \\
 n_\alpha \left(-k \frac{\partial \phi}{\partial x_\alpha} \right) - h &= 0 & \Gamma_h^e.
 \end{aligned} \tag{50}$$

Kyseessä on esimerkkiprobleeman 1 kaksidimensioiden versio; tosin yksidimensioisessa tehtävässä (21) ei ollut viimeisen yhtälön (50) tyyppiä olevaa reunaehto. Indeksien $\alpha = 1, 2$ suhteen on kaavojen lyhennykseksi tässä ja jatkossa voimassa Einsteinin summeeraussääntö. Suureet g ja h ovat annetut ratkaistavan funktion ja vuon tiheyden jakaumat. Funktion arvoa koskeva reunaehto annetaan reunanosalla $\bar{\Gamma}_g$. Tällä reunanosalla otetaan mukaan myös reunaelementtien väliset pisteet Λ_g^e , koska sekä funktio g että ratkaistava funktio ϕ -saatua kokemusta hyödyntäen oletetaan jatkuviksi. Reunanosalla Γ_h sen sijaan reunaelementtien väliset pisteet on syytä jättää pois, koska ulkoisen normaalin suunta voi muuttua niissä epäjatkovasti ja reunaehdon kirjoittaminen ei tällöin onnistu. Painofunktio w_1 oletetaan jatkuvaksi kuvan 3(b) muunnetussa ratkaisualueessa.

Systemiä (50) vastaava heikon muodon lähtökohta on täten

$$\begin{aligned}
 &\sum_e \int_{\Omega^e} w_1 \left[\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(-k \frac{\partial \phi}{\partial x_\alpha} \right) + c \phi - Q \right] d\Omega + \\
 &+ \sum_e \int_{\Gamma^e} w_3 n_\alpha \left[-k \frac{\partial \phi}{\partial x_\alpha} \right] d\Gamma + \\
 &+ \sum_e \int_{\Gamma_g^e} w_4 (\phi - g) d\Gamma + \sum_e [w_6 (\phi - g)]_{\Lambda_g^e} +
 \end{aligned}$$

$$+ \sum_e \int_{\Gamma_h^e} w_5 \left[n_\alpha \left(-k \frac{\partial \phi}{\partial x_\alpha} \right) - h \right] d\Gamma = 0 . \quad (51)$$

Kaavan (19) soveltaminen muodossa $g \hat{=} w_1$, $h \hat{=} -k \partial \phi / \partial x_\alpha$ muuntaa yhtälön seuraavaksi :

$$\begin{aligned} & \sum_e \int_{\Omega^e} \left(\frac{\partial w_1}{\partial x_\alpha} k \frac{\partial \phi}{\partial x_\alpha} + c w_1 \phi - w_1 Q \right) d\Omega + \\ & + \sum_e \int_{I^e} (w_3 - w_1) n_\alpha \left[\left[-k \frac{\partial \phi}{\partial x_\alpha} \right] \right] dI + \\ & + \sum_e \int_{\Gamma_g^e} w_1 n_\alpha \left(-k \frac{\partial \phi}{\partial x_\alpha} \right) d\Gamma + \\ & + \sum_e \int_{\Gamma_g^e} \left(w_4 \phi - n_\alpha w_1 k \frac{\partial \phi}{\partial x_\alpha} - w_4 g \right) d\Gamma + \sum_e [w_6 (\phi - g)]_{\Lambda_g^e} + \\ & + \sum_e \int_{\Gamma_h^e} \left[(w_5 + w_1) n_\alpha \left(-k \frac{\partial \phi}{\partial x_\alpha} \right) - w_5 h \right] d\Gamma = 0 . \quad (52) \end{aligned}$$

Osittaisintegroitukaavaa sovellettaessa ulkoinen reuna Γ on jaettu osiin Γ_g^e , Γ_g^e ja Γ_h^e . Ensinmainitulla tarkoitetaan keinoitekoista sisäsolmuihin ja tiettyihin reunan solmuihin liittyvää reunanosaa (vrt. kuva 3(b)). Huomattakoon vielä, että kaavaa (19) on käytetty funktion h lausekkeessa olevan indeksin α johdosta itse asiassa kahdesti. Uusi osittaisintegrointi ($g \hat{=} k \partial w_1 / \partial x_\alpha$, $h \hat{=} \phi$) antaa lopuksi

$$\begin{aligned} & \sum_e \int_{\Omega^e} \left(\left[\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(-k \frac{\partial w_1}{\partial x_\alpha} \right) + c w_1 \right] \phi - w_1 Q \right) d\Omega + \\ & + \sum_e \int_{I^e} n_\alpha \left[(w_3 - w_1) \left[\left[-k \frac{\partial \phi}{\partial x_\alpha} \right] \right] + \left[\left[-k \frac{\partial w_1}{\partial x_\alpha} \right] \right] \phi \right] dI + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_e \int_{\Gamma_\xi^e} w_1 n_\alpha \left(-k \frac{\partial \phi}{\partial x_\alpha} \right) d\Gamma + \sum_e \int_{\Gamma_\xi^e} \left[n_\alpha \left(k \frac{\partial w_1}{\partial x_\alpha} \right) \phi \right] d\Gamma + \\
& + \sum_e \int_{\Gamma_g^e} \left[\left(w_4 + n_\alpha k \frac{\partial w_1}{\partial x_\alpha} \right) \phi - n_\alpha w_1 k \frac{\partial \phi}{\partial x_\alpha} - w_4 g \right] d\Gamma + \sum_e [w_6 (\phi - g)]_{\Lambda_g^e} + \\
& + \sum_e \int_{\Gamma_h^e} \left[(w_5 + w_1) n_\alpha \left(-k \frac{\partial \phi}{\partial x_\alpha} \right) + n_\alpha k \frac{\partial w_1}{\partial x_\alpha} \phi - w_5 h \right] d\Gamma = 0 . \quad (53)
\end{aligned}$$

Hävitetään aluksi kaikki ne termit kokonaisjäännöksestä, joissa ϕ tai sen derivaatta esiintyy integraaleissa alueitten Ω^e , I^e , Γ_g^e tai Γ_h^e ylitse asettamalla vaatimukset

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(-k \frac{\partial w_1}{\partial x_\alpha} \right) + c w_1 &= 0 & \Omega^e , \\
w_3 - w_1 &= 0 & I^e , \\
n_\alpha \left[\left[-k \frac{\partial w_1}{\partial x_\alpha} \right] \right] &= 0 & I^e , \\
w_4 + n_\alpha k \frac{\partial w_1}{\partial x_\alpha} &= 0 & \Gamma_g^e , \\
w_1 &= 0 & \Gamma_g^e , \\
w_5 + w_1 &= 0 & \Gamma_h^e , \\
n_\alpha k \frac{\partial w_1}{\partial x_\alpha} &= 0 & \Gamma_h^e .
\end{aligned} \quad (54)$$

Yksidimensioisessa tapauksessa tilanne oli hieman erilainen. Solmupisteitä ei eristetty vastaavalla tavalla kuin tässä, joten kaavoissa ei esiintynyt elementtejä Γ_ξ^e ja Λ_g^e . Periaatteessa olisi voitu edetä täsmälleen samoin kuin edellä ja saada yhtälöitä (54) lähemmin muistuttavat ehdot. Näissä tapauksissa pyrittiin kuitenkin välttämään tarpeettomia merkintöjä.

Ehtojen (54) tarkka toteuttaminen yksinkertaistaa yhtälöä (53)

huomattavasti. Kun integraalit reunojen Γ_ε^e ylitse esitetään vielä napakoordinaattien $r = \varepsilon$ ja φ avulla, saadaan esitysmuoto

$$\begin{aligned} & \sum_e \varepsilon \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \left(w_1 k \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) d\varphi + \sum_e \bar{\phi} \varepsilon \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \left(-k \frac{\partial w_1}{\partial r} \right) d\varphi + \\ & + \sum_e \int_{\Gamma_g^e} \left(n_\alpha k \frac{\partial w_1}{\partial x_\alpha} g \right) d\Gamma + \sum_e [w_6 (\phi - g)]_{\Lambda_g^e} + \\ & + \sum_e \int_{\Gamma_h^e} (w_1 h) d\Gamma + \sum_e \int_{\Omega^e} (-w_1 Q) d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (55)$$

On käytetty hyväksi ilmeistä tietoa, että tässä ympyräviivalla Γ_ε^e $n_\alpha \partial f / \partial x_\alpha = -\partial f / \partial r$ ja $r = \varepsilon$ on vakio. Yhtälössä on lisäksi sovellettu integraalilaskennan yleistettyä väliarvolausetta. Yläviiva viittaa funktion arvoon integroimisalueen tietyssä pisteessä. Väliarvolauseen soveltaminen on oikeutettua, mikäli jäljelle jäänyt integroitava ei vaihda merkkiään tarkastelualueessa. Otaksutaan että ko. ehto pätee. Integrointirajat riippuvat solmun sijainnista, kuitenkin sisäiselle solmulle voidaan valita $\phi_0 = 0$ ja $\phi_1 = 2\pi$.

Nyt ollaan tilanteessa, jossa voidaan tarkastella rajatapauksia $\varepsilon \rightarrow 0$, jolloin tietysti $\bar{\phi} \rightarrow \phi_k$. Mikäli halutaan ratkaista kukin solmuarvo ϕ_k omasta yhtälöstään, ilmeisesti painofunktio tulee valita ainakin niin, että ensimmäinen integraaleista häviää kun $\varepsilon \rightarrow 0$.

Riippuen tarkasteltavan pisteen sijainnista erotetaan jälleen kolme tapaus. Jos tarkastellaan elementtiä Λ_g^k tulee vaatia lisäksi, että

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \left(-k \frac{\partial w_1}{\partial r} \right) d\varphi &= 0 & \Gamma_\varepsilon^e, \\ w_6 &= \gamma \delta_k^e & \Lambda_g^e. \end{aligned} \quad (56)$$

Ensimmäinen yhtälöistä (kuten kaikki muutkin asetetut ehdot) on helppo toteuttaa valinnalla $w_1 = 0$. Päädytään siis -tämä ei liene yllätys-

yhtälöihin, joiden mukaan ratkaistavan funktion arvot saadaan annettujen reuna-arvojen avulla tällä reunan osalla. Jos tarkastellaan reunaan Γ_{ε}^k liittyvää solmua, painofunktioiden tulee ilmeisesti toteuttaa ehdot

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \left(-k \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) d\varphi = \gamma \delta_k^e \quad \Gamma_{\varepsilon}^e, \quad (57)$$

$$w_6 = 0 \quad \Lambda_g^e.$$

Esitysmuoto (52) tuntuu (kuten muissakin esimerkeissä) soveltuvan parhaiten käyttömenetelmän pohjaksi. Kun otetaan huomioon ehdot, jotka ovat helposti toteutettavissa: Ehdosta (54) toinen, neljäs, viides ja kuudes, saadaan ($w_1 \rightarrow w$)

$$\sum_e \int_{\Omega^e} \left(\frac{\partial w}{\partial x_{\alpha}} - k \frac{\partial \phi}{\partial x_{\alpha}} + c w \phi - w Q \right) d\Omega + \sum_e \int_{\Gamma_h^e} w h d\Gamma +$$

$$+ \sum_e \int_{\Gamma_g^e} n_{\alpha} k \frac{\partial w}{\partial x_{\alpha}} (\phi - g) d\Gamma + \sum_e [w_6 (\phi - g)]_{\Lambda_g^e} = 0. \quad (58)$$

Kysymyksessä on elementtimenetelmän kirjallisuudessa esiintyvä tavallinen tehtävän diskretoinnissa käytettävä heikko muoto, jos jätetään kolmas termeistä huomiotta. Näin on siis puhtaasti mekaanisen manipuloinnin avulla päädytty (miltei) yleisesti hyväksytyyn diskretoinnin perustana olevaan heikkoon muotoon, jossa esiintyviä funktioita on toistaiseksi rajoitettu vain jatkuvuusvaatimuksilla. Lisäksi painofunktion w tulee hävitä reunanosalla Γ_g^e .

Saatu heikko muoto kelpaa periaatteessa sellaisenaan Galerkinin menetelmän lähtökohdaksi. Käyttämällä hyväksi edellä saatua painofunktioita koskevaa lisäinformaatiota vastaavalla tavalla kuin yksidimensioisissa tapauksissa, voidaan yhtälöön (58) perustuvan menetelmän ominaisuuksia parantaa huomattavasti.

Jos tarkastellaan piste-elementin Λ_g^e kohdalla olevaa solmua, tilanne vastaa täysin yksidimensioisia tapauksia. Näin ollen yhtälön

viimeinen termi voidaan unohtaa, jolloin siis approksimaation tulee toteuttaa ehto $\phi - g = 0$ ko. pisteissä. Rajoittamalla vielä approksimaatioihin tai funktioihin g , joita käytettäessä reunaehto $\phi - g = 0$ toteutuu myös elementeissä Γ_g^e (reunaehdon pisteittäisen toteuttamisen seurauksena), voidaan yhtälön (58) kolmaskin termi unohtaa ja saadaan täsmälleen kirjallisuudessa ehdotettu heikko muoto

$$\sum_e \int_{\Omega^e} \left(\frac{\partial w}{\partial x_\alpha} k \frac{\partial \phi}{\partial x_\alpha} + c w \phi - w Q \right) d\Omega + \sum_e \int_{\Gamma_h^e} w h d\Gamma = 0 . \quad (59)$$

Esitetty lisärajoitus, joka kyllä johtaa laskennallisesti mukavaan heikkoon muotoon, on tietysti tarkasti ottaen perusteltu vain, jos käytetty funktio ϕ (vain rajallinen määrä vapausasteita) pystyy kuvaamaan funktion g kulkua reunalla Γ_g^e . Käytännössä tämä merkitsee sitä, että funktion g tulee olla kussakin elementissä Γ_g^e reunan suuntaisen koordinaatin matala-asteinen polynomi. Heikko muoto (58) ei kärsi vastaavista rajoitteista, vaan soveltuu ilman tarkempia pohdintoja yleisempiin tapauksiin.

Yksidimensioisiin tapauksiin verrattuna painofunktioiden muodostaminen, muille kuin piste-elementtiin Λ_g^e liittyville solmuille, on huomattavasti hankalampaa. On välttämätöntä tehdä tiettyjä kompromisseja painofunktioiden yksinkertaisuuden ja painofunktiolle asetettujen ehtojen toteuttamisen välillä. Mutta -kuten osoittautuu- likimääräin ehtojen toteuttaminen johtaa stabiiliin menetelmään.

Seuraavassa selostetaan esimerkkimielessä erästä mahdollisuutta yrittää simuloida tässä probleemassa esiintyviä vaatimuksia. Tarkastellaan vahvasti yksinkertaistettua tilannetta, jossa painofunktion w ajatellaan riippuvan vain muuttujasta r . Saadun adjungoidun differentiaaliyhtälön yleinen ratkaisu tulee olemaan tällöin /7/

$$w = A I_0(\beta r) + B K_0(\beta r) , \quad (60)$$

jossa A ja B ovat vakioita, I_0 ja K_0 ovat (muunnettuja) Besselin funktioita kertalukua nolla, $r \in [0, 1]$ on tarkasteltavasta solmusta laskettu dimensioton etäisyys ja dimensioton parametri $\beta = \sqrt{c/k} h$. Suure h on

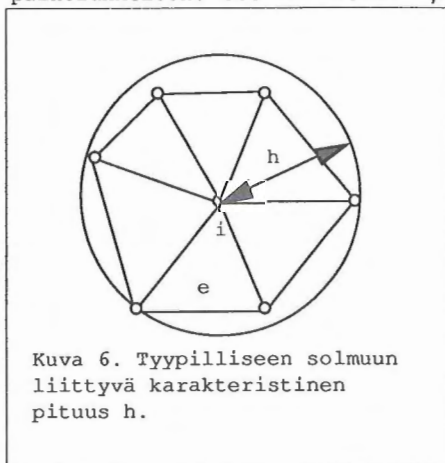
sopivasti valittu karakteristinen pituus: Pienimmän kaikki solmuun liittyvät elementit sisälleen sulkevan ympyrän säde (kuva 6). Besselin funktioiden asympotoottiset esitykset ovat /8/

$$I_0 = \begin{cases} 1 & \beta r \ll 1 \\ e^{\beta r / \sqrt{2\pi\beta r}} & \beta r \gg 1 \end{cases}, \quad (61)$$

$$K_0 = \begin{cases} -\ln(\beta r) & \beta r \ll 1 \\ \pi e^{-\beta r / \sqrt{2\pi\beta r}} & \beta r \gg 1 \end{cases},$$

joista nähdään, että pienillä argumentin arvoilla käyttäytyminen on oikean tyyppistä. (Jotta yhtälöistä (57) ensimmäinen voisi toteutua, ilmeisesti käyttäytymisen tulee olla logaritmista muuttujan r suhteen tarkasteltavan pisteen kohdalla.) Edelleen nähdään, että heikon muodon johdossa käytetyn yleistetyn väliarvolauseen soveltaminen on oikeutettua tyyppiä (60) olevia painofunktioita käytettäessä. Yhtälön (55) ensimmäinen integraali häviää ainakin tavanomaisia polynomiapproksimaatioita sovellettaessa, koska $\varepsilon \ln(\varepsilon) \rightarrow 0$ kun $\varepsilon \rightarrow 0$.

Ääritapauksissa, joissa β on hyvin pieni tai hyvin suuri, saataisiin ratkaisu kaavojen (61) nojalla suhteellisen yksinkertaiseen muotoon. Tehtyjen oletusten puitteissa ei ole kuitenkaan mielekäästä pyrkiä aivan yhtälön (60) mukaiseen painofunktioon. Jos nimittäin β on hyvin pieni, tiedetään tavanomaisten Galerkinin menetelmän painofunktioiden toimivan halutulla tavalla. Sen sijaan tapaus, jossa β on hyvin suuri, on ongelmallinen. Näin ollen tuntuu järkevältä pyrkiä painofunktioon, jonka rajatapauksina saadaan Galerkinin menetelmän painofunktiot ja toisaalta likimain yhtälöiden (61) mukaiset ($\beta r \gg 1$) eksponentiaalista tyyppiä olevat painofunktiot.



Tarkastellaan edellisen perusteella erästä tapaa muodostaa

likimääräinen solmuun i liittyvä lokaali painofunktio elementissä e (kuva 6). Korvataan muuttuja r alkajaisiksi yhtälöissä (61) lausekkeella $1-N_i^e$. Jos nimittäin elementit ovat kolmion muotoisia, niin kohtalaisella tarkkuudella $r \approx 1-N_i^e$. Approksimaatio on tietysti sitä tarkempi mitä tarkemmin muut elementtiin liittyvät solmut osuvat kuvan 6 mukaisen ympyrän kehälle ja mitä lyhyemmät ovat näiden solmujen väliset etäisyydet. Ilman tätä varsin karkeaa likimääräistämistä painofunktion jatkuvuusvaatimusten toteuttamisessa elementtien välillä tulee hankaluuksia. Jos vielä unohdetaan asymptoottisten kaavojen ($\beta r \gg 1$) nimittäjässä esiintyvä neliöjuurilauseke, saadaan approksimaatio

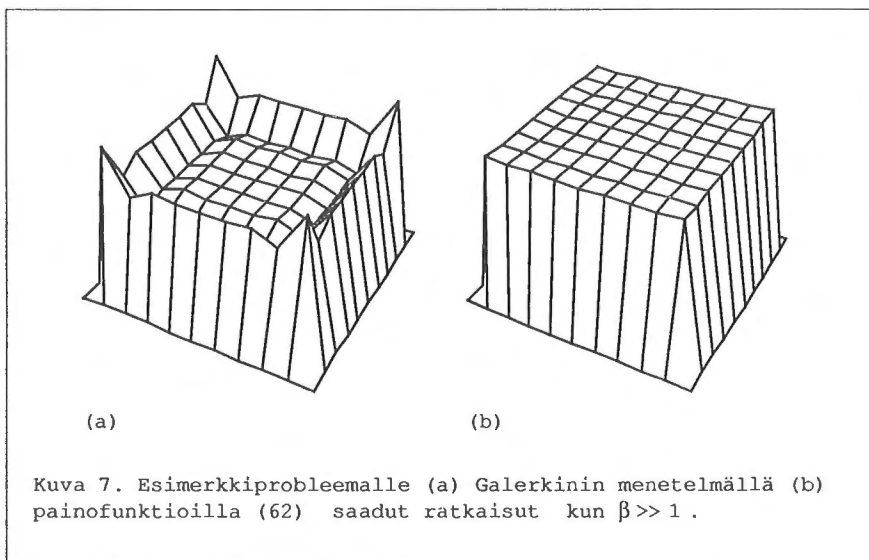
$$w_i^e = \sinh(\beta N_i^e) / \sinh(\beta) . \quad (62)$$

Hyvin pienillä parametrin β arvoilla saadaan nyt Galerkinin menetelmän mukaiset painofunktiot (tämä nähdään sarjakehitelmästä kuten yksidimensioisessa vastaavassa tapauksessa, jakaja on lisätty kompensoimaan osoittajaan ilmestyvä β). Sen sijaan hyvin suurilla parametrin β arvoilla käyttäytyminen on tyypiltään lähellä asymptoottisia lausekkeita (61).

Painofunktion (62) käytön etuna on, että Galerkinin menetelmälle ja ko. reuna-arvoteknille johdettujen konvergenssitulosten voidaan uskoa jälleen pätevän, koska rajamenetelmänä, kun $h \rightarrow 0$ (k ja c kiinteät), saadaan Galerkinin menetelmä. Huomattakoon, että yksidimensioisessa tapauksessa päädyttiin täsmälleen yhtälön (62) mukaiseen ratkaisuun, joka antoi tarkat solmuarvot. Tässä ei tietystikään johtuen tehdyistä likimääräistyksistä tule käymään näin.

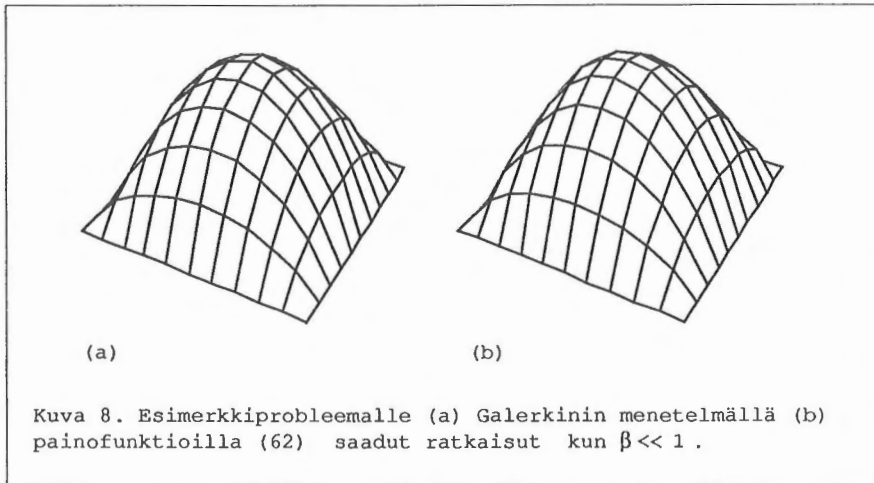
Kuitenkin johdettu menetelmä toimii erittäin hyvin ainakin lineaaristen kolmioelementtien sekä bilineaaristen suorakulmioelementtien tapauksissa edellyttäen että tarvittavat integraalit onnistutaan laskemaan riittävällä tarkkuudella. Kuvissa 7 ja 8 esitetään tietyissä esimerkkiprobleemoissa painofunktioihin (62) perustuvalla menetelmällä ja tavanomaisella Galerkinin menetelmällä saadut numeeriset ratkaisut, kun approksimaatio on bilineaarista tyyppiä ja käytetään heikkoa muotoa (59). Ratkaisualue on yksikköneliö ja elementtiverkko ta-

sainen 10×10 . Funktion arvo on asetettu nolllaksi kaikkialla reunoilla. Kummassakin tapauksessa k ja c ovat vakioita ja $Q=1$. Kuvan 7 ratkaisut liittyvät tehtävään jossa $k=10^{-5}$ ja $c=1$. Tarkka ratkaisu on tällöin miltei kaikkialla $\phi=1$ paitsi reunojen läheisyydessä hyvin ohuessa rajakerroksessa, jossa ratkaisu siirtyy reuna-arvoon $\phi=0$. Kuvassa 7(a) näkyy sama ilmiö kuin yksidimensioisessa tapauksessa: Galerkinin menetelmä antaa ratkaisun, joka heilahtelee reunojen läheisyydessä. Sen sijaan painofunktiot (62) antavat miltei tarkat solmuarvot käytettäessä numeerista 5×5 Gauss-Legendre integrointia, kuten kuvasta 7(b) ilmenee.



Galerkinin menetelmän heilahtelu saadaan korjattua periaatteessa tihentämällä verkkoa reunojen läheisyydessä. Ei ole kuitenkaan vaikeaa osoittaa, että kuvan 7(b) tyyppiseen ratkaisuun päästään vasta hyvin tiheällä verkolla. Karkea approksimaatio sopivalle elementtikoolle h saadaan tutkimalla, millä parametrin β arvolla painofunktiot (62) ovat jossain mielessä lähellä Galerkinin menetelmän painofunktioita. Ilmeisesti tulee valita $h=C\sqrt{k/c}$ jossa C on vakio suuruusluokaltaan yksi. Esimerkkiprobleeman tapauksessa päädyttäisiin näin ollen koh-

tuuttomaan vaatimukseen $h \approx 10^{-3}$ kahdessa ensimmäisessä reunan viereisessä elementtikerroksessa.



Kuvan 8 esittämät ratkaisut liittyvät tehtävään jossa $k = 0.1$ ja $c = 10^{-6}$. Menetelmien antamat ratkaisut ovat miltei identtiset, johtuen tietysti siitä, että painofunktiot eivät juuri eroa toisistaan tässä tapauksessa.

HUOMAUTUKSIA

Edellä on käsitelty esimerkkeinä eräitä konvektio-diffuusioyhtälön erikoistapauksia. Noudatetun toimintamallin avulla voidaan synnyttää käyttökelpoisia heikkoja muotoja automaattisesti ja ennenkaikkea saada samanaikaisesti tietoa hyviä tuloksia antaville painofunktioille asetettavista vaatimuksista. Näitä alustavia ajatuskuluja voitaneen yrittää soveltaa muissakin tapauksissa kuin konvektio-diffuusioyhtälön yhteydessä.

Klassillinen Galerkinin keinon mukainen elementtimenetelmä onkin itse asiassa 'sokea' standardiversio, joka ei ota lainkaan huomioon kulloisenkin tehtävän erityispiirteitä. Niinpä viime vuosina on alka-

nut ilmestyä formulaatioita, joissa Galerkinin keinoa soveltavia heikkoja muotoja on modifioitu lisäämällä niihin verkon tiheydestä ja ratkaistavan tehtävän luonteesta riippuvia ns. häiriötermejä (engl. perturbation term). Mainittakoon mm. versiot SUPG-menetelmä (Streamline-Upwind/Petrov-Galerkin method) /9/, GLS-menetelmä (Galerkin/Least-Squares method) /10/ ja GGLS-menetelmä (Galerkin Gradient Least Squares method) /11/. Tässä artikkelissa esitettyä toimintamallia hieman muuntamalla voidaan synnyttää luontevasti edellämainittuja kolmea formulaatiota muistuttavia versioita ilman että täytyy etukäteen lyödä lukkoon häiriötermin luonne, koska toimintamallin seuraaminen tuottaa tarvittavat häiriötermit periaatteessa automaattisesti. Tätä aihepiiriä on käsitelty alustavasti artikkelissa /12/.

Teemme seuraavassa vielä joitakin hyppyehtoihin liittyviä huomautuksia. Tarkasteltavissa tapauksissa hyppyehtoihin on päädytty fysikaalisen tulkinnan avulla. Esimerkiksi lämmönjohtumistehtävässä, joka on käsiteltyä tyyppiä, on järkevää vaatia, että lämpövirran tiheys on jatkuva mielivaltaisen ratkaisualueen pinnan lävitse kuljettaessa. Vaatimus seuraa yksinkertaisesti energian taseen periaatteen soveltamisesta sopivasti valittuun kontrollialueeseen. Käytetty ehto on siis järkevä, jos tehtävän ajatellaan kuvaavan lämmönjohtumista. Mikään ei kuitenkaan takaa, että käytetty jatkuvuus- tai hyppyehto on mielekäs jonkin toisen fysikaalisen tulkinnan yhteydessä.

Yleisesti ottaen mekaniikan aksioomat -joista useat käytännössä tärkeät reuna-arvot tehtävät johdetaan -koskevat sellaisenaan tiettyä äärellistä kontrollialuetta. Tällöin oikea matemaattinen formulaatio olisi myös integraalimuotoinen äärellistä aluetta koskeva taseyhtälö, joka sisältää kaiken tilanteeseen liittyvän fysikaalisen informaation. Jos taseyhtälöstä siirrytään kutakin ratkaisualueen pistettä koskevaan differentiaaliyhtälömuotoiseen esitykseen, joudutaan tekemään tiettyjä oletuksia suureiden jatkuvuudesta. Oletusten seurauksena menetetään osa taseyhtälöihin sisältyvästä informaatiosta; nimittäin juuri hyppehdot. Jos siis halutaan kirjoittaa tietylle fysikaaliseen probleemaan liittyvälle tehtävälle toimiva heikko muoto lähtien taivomaisesta reuna-arvot tehtävä esityksestä, on tehtävä ensin täyden-

nettävä oikeellisilla hyppyehdoilla.

Erityisesti elementtimenetelmän matemaattishenkisessä kirjallisuudessa tuntuu olevan tapana unohtaa tehtävien fysikaalinen tausta ja malliin johtaneet jatkuvuusoletukset. Kirjoittajille onkin jäänyt jossain määrin epäselväksi miten ja missä vaiheessa puhtaasti matemaattinen tempuilu palauttaa taseyhtälöstä differentiaaliyhtälöön siirryttäessä menetetyt hyppyehdot. Yleensä sopivaan heikkoon muotoon päädytään nimittäin lähtökohdasta, jossa tehtyjen jatkuvuusoletusten nojalla hyppyehdot on voitu unohtaa.

Mainittakoon vielä, että esitettyyn menetelmään sisältyy tiettyjä käytännön vaikeuksia, koska tarvittavat integraalit joudutaan laskemaan numeerisesti. Galerkinin menetelmää sovellettaessa ei synny juuri ongelmia, koska integroitavana on yleensä matalan asteinen polynomi (tai rationaalifunktio). Näin ollen suhteellisen pienillä integrointipisteiden lukumäärällä saavutetaan haluttu tarkkuus. Sen sijaan eksponentiaalista tyyppiä olevia painofunktioita käytettäessä tavanomaiset numeeriset integrointimenetelmät eivät välttämättä toimi lainkaan. Ainakin yksidimensioisessa tapauksessa ongelmat voidaan kuitenkin kiertää suorittamalla osa integroinnista analyttisesti. Tätä aihepiiriä sivutaan artikkelissä /12/.

KIRJALLISUUTTA

- [1] Zienkiewicz, O. C., Why Finite Elements? Luku 1 teoksessa Finite Elements in Fluids -Volume 1 (toim. Gallagher, Oden, Taylor, Zienkiewicz), Wiley 1975.
- [2] Salonen, E-M. , Heikkojen muotojen johtamisesta. Rakenteiden Mekaniikka, Vol.21, No.1, 1988, s. 66...75.
- [3] Lanczos, C. , Linear differential Operators. Van Nostrand 1961.

- [4] Hughes, T.J.R., The Finite Element Method. Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis. Prentice-Hall 1987.
- [5] Tong, P. , Exact solutions of certain problems by the finite element method. AIAA. J. Vol.7, 1969, s.178...180.
- [6] Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.J., The finite element method, fourth edition, volume 1, McGraw-Hill 1989.
- [7] Carrier, G.F, Pearson, C.E, Ordinary Differential equations, Blaisdell Publishing Company 1968.
- [8] Press, W.H., Flannery, B.P., Teukolsky, S.A., Vetterling, W.T., Numerical Recipes, Cambridge University Press 1986.
- [9] Hughes, T.J.R., 'Recent progress in the development and understanding of SUPG methods with special reference to the compressible Euler and Navier-Stokes equations', Int. J. numer. methods fluids, 7, 1261-1275 (1987).
- [10] Hughes, T.J.R., Franca, L.P., Hulbert, G.M., Johan, Z. and Shakib, F., 'The Galerkin/least-squares method for advective-diffusive equations', in Recent Developments in computational Fluid Dynamics, AMD-Vol. 95, 75-99 (1988).
- [11] Franca, L.P., and Dutra do Carmo, E.G. 'The Galerkin gradient least-squares method', Comput. methods Appl. Mech. Eng. 74, 41-54 (1989).
- [12] Freund, J., Salonen, E-M., 'A logic for simple Petrov-Galerkin weighting functions', accepted for presentation at the Second World Congress on Computational Mechanics, August 27-31, 1990, Stuttgart.

Jouni Freund, assistentti, mekaniikan laboratorio, TKK

Eero-Matti Salonen, apul.prof, mekaniikan laboratorio, TKK