

TIMOSHENKON PALKIN LIIKEYHTÄLÖIDEN RATKAISEMINEN KÄYTTÄMÄLLÄ KARAKTERISTIKAMENETELMÄÄ

ANDREA COLUSSI

Rakenteiden Mekaniikka, Vol. 23

No 3 1990, s. 3 - 17

TIIVISTELMÄ: Artikkelissa käsitellään kvasilineaarisen toisen kertaluvun hyperbolisen osittaisdifferentiaaliyhtälön ratkaisemista karakteristikamenetelmällä. Tätä on sovellettu Timoshenkon palkin liikeyhtälöiden ratkaisemiseen. Tuloksia on vertailtu ominaismuotojen summauksella sekä differenssi- ja elementtimenetelmällä saatuihin ratkaisuihin.

JOHDANTO

Aallonetenenemistehtävät ovat yhdistettyjä alku- ja reuna-arvotehtäviä. Nämä ovat yleensä hyperbolisia osittaisdifferentiaaliyhtälöitä. Hyperbolisen systeemin numeerisista ratkaisumenetelmistä karakteristikamenetelmä on tarkin (Fox, 1962, s. 218). Kaksidimensioisen probleeman ratkaisemiseen se on käyttökelpoinen, mutta useampidimensioisille systeemeille se on monimutkainen. Tällöin differenssi- ja elementtimenetelmä ovat käyttökelpoisempia.

Karakteristikamenetelmässä systeemin alkuperäiset differentiaaliyhtälöt lausutaan karakteristikoiden muodostamassa ns. karakteristisessa koordinaatistossa, jolloin differentiaaliyhtälöt ovat kanoonisessa eli normaalimuodossa. Kun nämä yhtälöt on määritetty, ne voidaan suoraan numeerisesti integroida differenssimenetelmällä. Karakteristikamenetelmää on menestyksellä sovellettu sauvarakenteiden aksiaalisten, vääntö- ja taivutusmuodonmuutosten dynaamiseen analysointiin. Tässä artikkelissa rajoitutaan tarkastelemaan vain taivutettua palkkia.

KARAKTERISTIKAMENETELMÄ

Toisen kertaluvun kvasilineaarinen osittaisdifferentiaaliyhtälö on muotoa

$$\begin{aligned} A(x, y, u, u_x, u_y) u_{xx} + 2B(x, y, u, u_x, u_y) u_{xy} + \\ C(x, y, u, u_x, u_y) u_{yy} + D(x, y, u, u_x, u_y) = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Tasolla xy oleva käyrä $\Gamma(x, y)$ tunnetaan. Funktion u ja sen ensimmäisten derivaattojen u_x ja u_y arvot tunnetaan tällä käyrällä. Näitä kutsutaan Cauchy'n ehdoiksi. Kun nämä

ehdot ovat voimassa, yhtälön (1) ratkaisu saadaan käyrän Γ läheisyydessä käyttämällä Taylorin sarjakehitelmää funktiolle u pitkin käyrää Γ .

Funktion u ja sen ensimmäisten derivaattojen u_x ja u_y kokonaisdifferentiaalit ovat

$$du = u_x dx + u_y dy, \quad (2)$$

$$du_x = u_{xx} dx + u_{xy} dy, \quad (3)$$

$$du_y = u_{xy} dx + u_{yy} dy. \quad (4)$$

Yhtälöt (1), (3) ja (4) muodostavat lineaarisen yhtälöryhmän toisten derivaattojen u_{xx} , u_{xy} ja u_{yy} ratkaisemiseksi,

$$\begin{bmatrix} dx & dy & 0 \\ 0 & dx & dy \\ A & 2B & C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{xx} \\ u_{xy} \\ u_{yy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} du_x \\ du_y \\ -D \end{Bmatrix}. \quad (5)$$

Merkitään tätä yhtälöä lyhyemmin

$$Ax = b. \quad (6)$$

Kun $\det A \neq 0$, ratkaisu on yksikäsitteinen. Kehittämällä käyrällä Γ olevassa pisteessä (x_0, y_0) funktiolle u Taylorin sarja saadaan ratkaisu pisteen (x_0, y_0) ympäristössä (Chorlton, 1969, s. 165). Kehittämällä Taylorin sarja yhä uudelleen muissa käyrän Γ pisteissä ja sen jälkeen tämän läheisyydessä olevissa pisteissä saadaan lopulta tehtävän ratkaisu halutussa tason xy alueessa.

Taylorin sarjakehitelmää ei voida käyttää, jos käyrän Γ tangentti yhtyy karakteristikaan. Tällöin $\det A = 0$ ja yhtälön (6) ratkaisu ei ole yksikäsitteinen. Tehtävä voidaan ratkaista käyttämällä karakteristikamenetelmää. Koska kerroinmatriisi A on singulaarinen, saadaan yhtälö

$$\begin{vmatrix} dx & dy & 0 \\ 0 & dx & dy \\ A & 2B & C \end{vmatrix} = 0, \quad (7)$$

joka voidaan edelleen kirjoittaa muodossa

$$C(dx)^2 - 2Bdx dy + A(dy)^2 = 0. \quad (8)$$

Tämä yhtälö määrittää karakteristikat.

Ainoastaan karakteristikoilla kerroinmatriisi A on singulaarinen, joten derivaatat u_{xx} , u_{xy} ja u_{yy} ovat määrittelemättömiä mutta toisistaan riippuvia. Jotta yhtälöllä (6) olisi ratkaisu tulee yhtälön muidenkin determinanttien hävitä karakteristikoilla (Fox, 1962, s. 210 & Ames, 1969, s. 180). Tämä nähdään helposti, kun derivaattojen u_{xx} , u_{xy} ja u_{yy} ratkaisemiseen käytetään Cramerin sääntöä eli

$$\frac{u_{xx}}{\Delta_1} = \frac{u_{xy}}{\Delta_2} = \frac{u_{yy}}{\Delta_3} = \frac{1}{\Delta}, \quad (9)$$

missä Δ on A :n determinantti. Determinantit Δ_1, Δ_2 ja Δ_3 saadaan vaihtamalla Δ :n ensimmäinen, toinen ja kolmas sarake vektoriin b (Chorlton, 1969, s. 165).

Koska yhtälön (6) muidenkin determinanttien tulee hävitä, voidaan kirjoittaa yhtälö

$$\begin{vmatrix} du_x & dx & 0 \\ du_y & 0 & dy \\ -D & A & C \end{vmatrix} = 0, \quad (10)$$

jolloin saadaan

$$-Ddx dy - Adu_x dy - Cdu_y dx = 0. \quad (11)$$

Tämä yhtälö määrittää ehdot joiden tulee toteutua pitkin karakteristikoita.

Yhtälön (8) juuret ovat

$$\frac{dy}{dx} = B + \sqrt{B^2 - AC} \equiv f, \quad (12a)$$

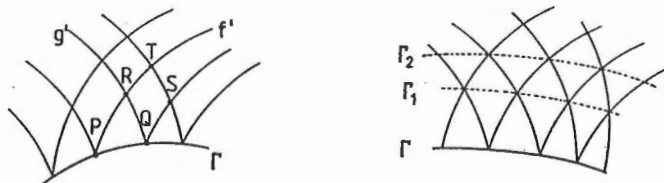
$$\frac{dy}{dx} = B - \sqrt{B^2 - AC} \equiv g. \quad (12b)$$

Kun yhtälö (1) on hyperbolinen, f ja g ovat reaaliarvoisia ja keskenään erisuuria. Yhtälöt (12a) ja (12b) määrittävät kaksi karakteristikaperhettä, f' ja g' . Jaetaan yhtälö (11) dx :llä ja sijoitetaan yhtälöt (12a) ja (12b) siihen, jolloin saadaan

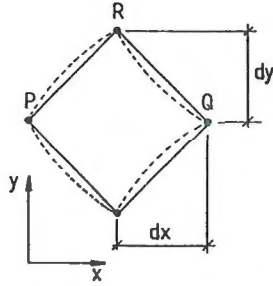
$$Ddy + Afu_x + Cu_y = 0, \quad (13)$$

$$Ddy + Agu_x + Cu_y = 0. \quad (14)$$

Tason xy käyrällä Γ on anettu u, u_x ja u_y . Piirretään karakteristikat f ja g käyrän Γ pisteistä. Saadaan kuvassa 1a oleva kahden karakteristikaperheen muodostama verkko. Merkitään karakteristikoiden leikkauspisteitä kirjaimilla P, Q, R, S ja T .



Kuva 1 Herätekäyrä Γ ja karakteristikoiden muodostama verkko



Kuva 2 Karakteristikamenetelmän elementti

Jos karakteristikat riippuvat ratkaisusta joudutaan leikkauspisteiden koordinaatit (x, y) laskemaan samaan tapaan kuin funktio u ja sen derivaatat u_x ja u_y . Millä tavalla nämä arvot lasketaan, riippuu valitusta aproksimaatiosta. Trapetsisäännöllä voidaan yhtälöt (12a) ja (12b) diskretoida seuraavasti käyttämällä kuvassa 2 esitettyjä merkintöjä

$$y_R - y_P = \frac{f_R + f_P}{2} (x_R - x_P) , \quad (15)$$

$$y_R - y_Q = \frac{g_R + g_P}{2} (x_R - x_Q) . \quad (16)$$

Vastaavasti yhtälö (2) saa diskreetit muodot

$$u_R - u_P = \frac{u_{zR} + u_{zP}}{2} (x_R - x_P) + \frac{u_{yR} + u_{yP}}{2} (y_R - y_P) , \quad (17)$$

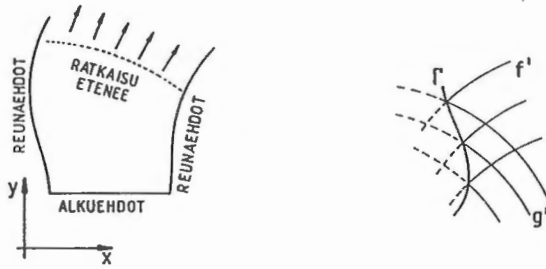
$$u_R - u_Q = \frac{u_{zR} + u_{zQ}}{2} (x_R - x_Q) + \frac{u_{yR} + u_{yQ}}{2} (y_R - y_Q) . \quad (18)$$

Diskretoidaan vielä yhtälöt (13) ja (14) samaan tapaan, jolloin saadaan

$$\frac{A_R f_R + A_P f_P}{2} (u_{zR} - u_{zP}) + \frac{C_R + C_P}{2} (u_{yR} - u_{yP}) = -\frac{D_R + D_P}{2} (y_R - y_P) , \quad (19)$$

$$\frac{A_R g_R + A_Q g_Q}{2} (u_{zR} - u_{zQ}) + \frac{C_R + C_Q}{2} (u_{yR} - u_{yQ}) = -\frac{D_R + D_Q}{2} (y_R - y_Q) . \quad (20)$$

Yhtälöt (15)-(18) ja toinen yhtälöistä (19) ja (20) muodostavat epälineaarisen yhtälöryhmän muuttujien x, y, u, u_x ja u_y laskemiseksi pisteessä R . Yhtälö ratkaistaan yleisessä tapauksessa iteroimalla. Jos karakteristikat ovat suoria ja riippumattomia funktion u arvoista, leikkauspisteet on helppo määrittää. Tällöin leikkauspisteet voidaan ratkaista erillään jatkuvuus- ja karakteristikisesta yhtälöstä. Yhtälöt (15) ja (16) voidaan siis ratkaista erikseen, jolloin jäljelle jää vain kolme tuntematonta u_R, u_{zR} ja u_{yR} . Samalla tavalla lasketaan muuttujien arvot muissa käyrän Γ läheisyydessä olevissa karakteristikoiden leikkauspisteissä. Tämän jälkeen voidaan edellä määritetyistä karakteristikoiden leikkauspisteistä muodostaa uusi käyrä Γ_1 , jolla muuttujien u, u_x ja u_y arvot ovat



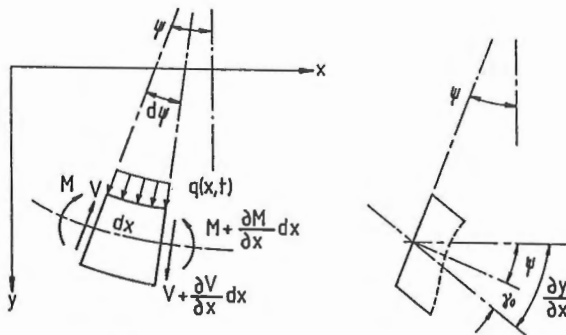
Kuva 3 Ratkaisun eteneminen ja karakteristikat reunalla.

tunnettuja (kuva 1b). Seuraavaksi lasketaan tuntemattomien arvot käyrän Γ_1 läheisyydessä, minkä jälkeen voidaan muodostaa käyrä Γ_2 . Tätä proseduuria toistamalla ratkaisu etenee aina vain kauemmaksi käyrästä Γ , ja lopulta se kattaa alueen, jossa vaste haluttiin määrittää (kuva 3a).

Alkuarvotehtävillä ei ole ainoastaan alkuehtoja vaan niillä voi olla myös reunaehtoja. Karakteristikat eivät voi ulottua reunan yli ja siten määrittelyalueen ulkopuolelle. Koska reunapisteessä toinen karakteristikaperheistä f' tai g' puuttuu (kuva 3b), toinen yhtälöistä (15) tai (16) jää pois. Samoin käy toiselle yhtälöistä (19) tai (20). Yhtälöitä jää jäljelle kolme mutta tuntemattomia on viisi. Puuttuvat yhtälöt saadaan reunaehdoista.

KARAKTERISTIKAMENETELMÄN SOVELTAMINEN TIMOSHENKON PALKIN LIIKEYHTÄLÖÖN

Johdetaan Timoshenkon palkkiteorian mukainen liikeyhtälö kuvan 4 vapaakappaleen tasapainotilan avulla.



Kuva 4 Timoshenkon palkin vapaakappale.

Timoshenkon palkkiteoriassa on kaksi siirtymäsuuretta, poikkileikkauksen keskipis-

teen siirtymä y sekä poikkileikkauksen kiertymä ψ . Näiden välillä on yhteys

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \psi + \gamma_0, \quad (21)$$

missä γ_0 on liukuma painopiste akselin kohdalla. Kuvasta 4 saadaan yhteys $Rd\psi = dx$, mistä taivutusmomentille saadaan yhtälö

$$\frac{M}{EI} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (22)$$

Leikkausvoima voidaan lausua leikkausmuodonmuutoksen γ avulla

$$V = G \int_A \gamma dA. \quad (23)$$

Tulo $GA\gamma_0$ on leikkausvoima, joka on lausuttu painopiste akselin kohdalla esiintyvän leikkausmuodonmuutoksen γ_0 avulla. Se ei ole arvoltaan sama kuin yhtälöstä (23) laskettu leikkausvoima. Käyttämällä leikkausvoiman korjauskerrointa k nämä voidaan saattaa yhtä suuriksi. Nyt saadaan leikkausvoimalle yhtälö

$$V = kGA\gamma_0. \quad (24)$$

Korjauskerroin on poikkileikkauksen keskimääräinen jännitys jaettuna leikkauskertoimen ja neutraali akselin liukuman tulolla (Mindlin & Deresiewicz, 1976). Tämä on riippuvainen leikkausjännitysten jakaumasta poikkileikkauksessa ja poikkileikkauksen muodosta. Leikkausjännitysten jakauma on riippuvainen liiketilasta. Cowperin (1966) artikkelissa on johdettu monille erilaisille poikkileikkauksille yksinkertaisia yhtälöitä korjauskertoimen arvojen laskemiseksi.

Kirjoittamalla taivutusmomentti- ja pystysuora voimatasapainoyhtälö ja käyttämällä yhtälöitä (21) ja (22) saadaan Timoshenkon palkin liikeyhtälöt; kaksi toisistaan riippuvaa osittaisdifferentiaaliyhtälöä,

$$kGA \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \psi \right) + EI \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \rho I \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \quad (25)$$

$$kGA \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = q(x, t). \quad (26)$$

Järjestelemällä termejä ja ottamalla käyttöön merkinnät $c_1^2 = \frac{E}{\rho}$ ja $c_2^2 = \frac{kG}{\rho}$ voidaan yhtälöt (25) ja (26) esittää muodossa

$$\psi_{xx} - \frac{1}{c_1^2} \psi_{tt} = \frac{kGA}{EI} (\psi - y_x), \quad (27)$$

$$y_{xx} - \frac{1}{c_2^2} y_{tt} = \psi_x, \quad (28)$$

kun $q(x, t) = 0$. Yhtälöt (27) ja (28) ovat lineaarisia hyperbolisia osittaisdifferensiaaliryhtälöitä. Yhtälön (8) juuria on kaksi. Ne ovat reaaliarvoisia sekä funktion ja sen ensimmäisten derivaattojen arvoista riippumattomia, joten karakteristinen verkko muodostuu suorista. Ottamalla käyttöön merkinnät

$$f_1 = \frac{kGA}{EI} (\psi - y_x) , \quad (29)$$

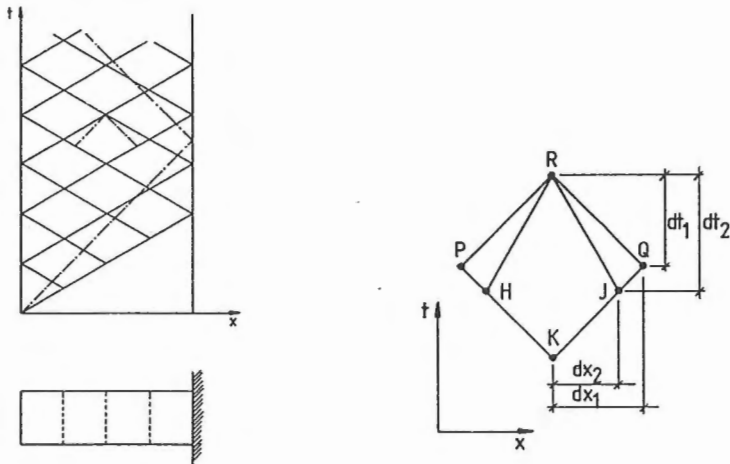
$$f_2 = \psi_x , \quad (30)$$

jolloin yhtälöt (27) ja (28) voidaan kirjoittaa lyhyemmässä muodossa

$$\psi_{xx} - \frac{1}{c_1^2} \psi_{tt} = f_1 , \quad (31)$$

$$y_{xx} - \frac{1}{c_2^2} y_{tt} = f_2 . \quad (32)$$

Ratkaistavana on kaksi toisistaan riippuvaa yhtälöä. Kummallakin yhtälöllä on omat karakteristikansa, jotka vain erikoistapauksessa yhtyvät. Tasossa xt on siis kaksi päällekkäistä karakteristikoiden muodostamaa verkkoa, joiden laskennallinen käsittely on vaikeata. Helpompaa on käsitellä vain yhtä verkkoa siten, että toisen verkon karakteristikat otetaan huomioon kuvan 5 mukaisesti.



Kuva 5 Karakteristikoiden muodostama verkko ja yksi verkon elementti.

Rakenne jaetaan x -akselin suunnassa alkioihin, joiden pituus on dx_1 . Tämän jälkeen aika-askeleet dt_1, dt_2 sekä askel dx_2 voidaan määrittää yhtälöistä

$$dt_1 = \frac{dx_1}{c_1} , \quad (33)$$

$$dt_2 = \frac{2c_1}{1 + \frac{c_1}{c_2}} dt_1 , \quad (34)$$

$$dx_2 = c_2 dt_2 . \quad (35)$$

Yhtälöt (31) ja (32) ovat samaa muotoa kuin yhtälö (1). Tehdään yhtälössä (1) muuttujien vaihdoilla $y = t, u = \psi$ ja merkitään $A = 1, B = 0, C = -c_1^{-2}$ ja $D = -f_1$. Tällöin saadaan yhtälö (31). Kaavojen (12a) ja (12b) muuttujat f ja g ovat vaihenopeuden $\sqrt{\frac{E}{\rho}}$ positiivinen ja negatiivinen juuri eli $+c_1$ ja $-c_1$. Yhtälöt (13) ja (14) voidaan lausua yhtenä yhtälönä

$$d(\psi_t) \mp c_1 d(\psi_x) + c_1^2 f_1 dt = 0 . \quad (36)$$

Vastaavasti saadaan yhtälölle (32) samankaltaisella muuttujan vaihdolla muoto

$$d(y_t) \mp c_2 d(y_x) + c_2^2 f_2 dt = 0 . \quad (37)$$

Ottamalla huomioon merkinnät (29) ja (30) ja käyttämällä yhtälöitä (19) ja (20), yhtälöt (36) ja (37) saavat diskreetin muodon.

$$\begin{aligned} &(\psi_{tR} - \psi_{tP}) - c_1(\psi_{xR} - \psi_{xP}) + \\ &+ \frac{c_1^2 kGA}{2EI}(\psi_R - y_{xR} + \psi_P - y_{xP}) dt_1 = 0 , \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} &(\psi_{tR} - \psi_{tQ}) + c_1(\psi_{xR} - \psi_{xQ}) + \\ &+ \frac{c_1^2 kGA}{2EI}(\psi_R - y_{xR} + \psi_Q - y_{xQ}) dt_1 = 0 . \end{aligned} \quad (39)$$

Vastaavasti diskretoidaan jatkuvuusyhtälöt.

$$(\psi_R - \psi_P) = +(\psi_{xR} + \psi_{xP}) \frac{dx_1}{2} + (\psi_{tR} + \psi_{tP}) \frac{dt_1}{2} , \quad (40)$$

$$(\psi_R - \psi_Q) = -(\psi_{xR} + \psi_{xQ}) \frac{dx_1}{2} + (\psi_{tR} + \psi_{tQ}) \frac{dt_1}{2} , \quad (41)$$

$$(y_{tR} - y_{tH}) - c_2(y_{xR} - y_{xH}) + c_2^2(\psi_{xR} + \psi_{xH}) \frac{dt_2}{2} = 0 , \quad (42)$$

$$(y_{tR} - y_{tJ}) + c_2(y_{xR} - y_{xJ}) + c_2^2(\psi_{xR} + \psi_{xJ}) \frac{dt_2}{2} = 0 , \quad (43)$$

$$(y_R - y_H) = +(y_{xR} + y_{xH}) \frac{dx_2}{2} + (y_{tR} + y_{tH}) \frac{dt_2}{2} , \quad (44)$$

$$(y_R - y_J) = -(y_{xR} + y_{xJ}) \frac{dx_2}{2} + (y_{tR} + y_{tJ}) \frac{dt_2}{2} . \quad (45)$$

Muuttujien arvot pisteissä H ja J saadaan lineaarisella interpolaatiolla pisteiden P, Q ja K arvoista. Esimerkiksi taipuman y arvot ovat

$$y_H = y_K + \frac{2}{1 + \frac{e_1}{c_2}}(y_P - y_K) , \quad (46)$$

$$y_J = y_K + \frac{2}{1 + \frac{e_1}{c_2}}(y_Q - y_K) , \quad (47)$$

Yhtälöt (38)-(45) muodostavat lineaarisen yhtälöryhmän

$$Ku = f , \quad (48)$$

missä vektoriö $u^T = \{\psi_R \ \psi_{zR} \ \psi_{tR} \ y_R \ y_{zR} \ y_{tR}\}$. Jos jatkuvuusyhtälöt otetaan sekä positiivisten että negatiivisten karakteristikoiden suuntaan, saadaan kerroinmatriisiksi

$$K = \begin{bmatrix} \alpha & -c_1 & 1 & 0 & -\alpha & 0 \\ \alpha & +c_1 & 1 & 0 & -\alpha & 0 \\ 2 & 0 & -dt_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 & -c_2 & 1 \\ 0 & \beta & 0 & 0 & +c_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -dt_2 \end{bmatrix}, \quad (49)$$

missä $\alpha = \frac{c_1^2 dt_1}{2} \frac{kGA}{EI}$ ja $\beta = \frac{c_2^2 dt_2}{2}$. Voimavektoriksi saadaan

$$f = \left\{ \begin{array}{l} -\alpha(\psi_P - y_{zP}) - c_1\psi_{zP} + \psi_{tP} \\ -\alpha(\psi_Q - y_{zQ}) + c_1\psi_{zQ} + \psi_{tQ} \\ \psi_P + \psi_Q + (\psi_{zP} - \psi_{zQ}) \frac{dx_1}{2} + (\psi_{tP} + \psi_{tQ}) \frac{dt_1}{2} \\ -\beta\psi_{zH} - c_2y_{zH} + y_{tH} \\ -\beta\psi_{zJ} + c_2y_{zJ} + y_{tJ} \\ y_H + y_J + (y_{zH} - y_{zJ}) \frac{dx_2}{2} + (y_{tH} + y_{tJ}) \frac{dt_2}{2} \end{array} \right\}. \quad (50)$$

Kun tarkasteltava piste R ei ole reunalla, jatkuvuusyhtälö voidaan ottaa kumman tahansa karakteristikoiden suunnassa tai molemmissa suunnissa. Sen sijaan reunapisteissä toinen karakteristikoiden suunnista, negatiivinen tai positiivinen, puuttuu. Tämän mukaan valitaan jatkuvuusyhtälöiksi, joko (40) ja (44) tai (42) ja (45). Reunaehto- ja käsitteily on helpompaa, jos jatkuvuusyhtälö otetaan vain t -akselin suunnassa. Tällöin tehdään pieni virhe mutta sen merkitys pienenee askelta pienennettäessä. Kerroinmatriisiksi saadaan nyt

$$K = \begin{bmatrix} \alpha & -c_1 & 1 & 0 & -\alpha & 0 \\ \alpha & +c_1 & 1 & 0 & -\alpha & 0 \\ 1 & 0 & -dt_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 & -c_2 & 1 \\ 0 & \beta & 0 & 0 & +c_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -dt_1 \end{bmatrix}, \quad (51)$$

ja voimavektoriksi saadaan

$$f = \left\{ \begin{array}{l} -\alpha(\psi_P - y_{zP}) - c_1\psi_{zP} + \psi_{tP} \\ -\alpha(\psi_Q - y_{zQ}) + c_1\psi_{zQ} + \psi_{tQ} \\ \psi_K + \psi_{tK} dt_1 \\ -\beta\psi_{zH} - c_2y_{zH} + y_{tH} \\ -\beta\psi_{zJ} + c_2y_{zJ} + y_{tJ} \\ y_K + y_{tK} dt_1 \end{array} \right\}. \quad (52)$$

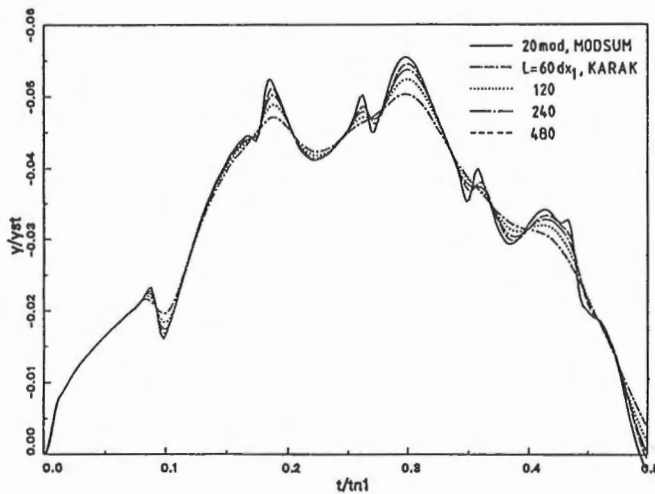
Yhtälöt voidaan diskretoida myös muilla tavoilla. Askeleen kokoa pienentämällä eri diskreteita käyttäen lasketut ratkaisut lähestyvät toisiaan. Yhtälö (48) joudutaan yleensä ratkaisemaan tuhansista satoihin tuhansiin kertoihin. Kerroinmatriisi pysyy koko ajan muuttumattomana ja ainoastaan voimavektori joudutaan päivittämään kullakin askeleella. Tämän vuoksi on kannattavaa ratkaista tehtävä peräkkäisinä sijoituksina.

NUMEERISET ESIMERKIT

Tarkastellaan homogeenisen yksiaukkoisen palkin transienttia vastetta. Kuormituksena on ajan suhteen puolisiniaallonmuotoinen pistekuorma keskellä palkkia. Materiaali on kimmoinen. Palkin pituus on 2400 mm, korkeus 300 mm ja leveys 150 mm. Kimmokerroin on $2,1 \cdot 10^5 \frac{N}{mm^2}$ ja liukukerroin on $0,8 \cdot 10^5 \frac{N}{mm^2}$. Tiheys on $7,8 \cdot 10^{-3} \frac{g}{mm^3}$, ja leikkausvoiman korjauskerroin on 1,0. Impulssin kestoaika on 0,1 ms ja se on noin neljäskymmenesosa rakenteen pisimmästä värähdysajasta. Voiman suurin arvo on 1 MN.

Kuvassa 6 on tulokset tapauksista, joissa on käytetty sekä ominaismuotojen summausta että karakteristikkamenetelmää. Tulokset on esitetty dimensioittomina siten, että aika on jaettu Eulerin palkkiteorian mukaisella pisimmällä värähdysajalla ja keskipisteen taipuma vastaavalla taipuman staattisella arvolla. Sarjaratkaisu (Anderson, 1953) on laskettu käyttäen 20:tä ominaismuotoa. Karakteristikkamenetelmää käytettäessä palkki on analysoitu erikseen jakamalla se 60, 120, 240 ja 480 osaan (dx_1). Jatkuvuusyhtälö on diskretoitu sekä negatiivisia että positiivisia karakteristikoita pitkin. Reunoilla olevissa pisteissä jatkuvuusyhtälö on kuitenkin diskretoitu vain t -akselin suunnassa.

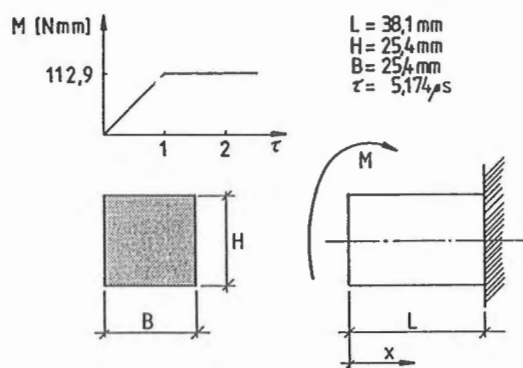
Kuvasta 6 nähdään, että karakteristikkamenetelmällä laskettu ratkaisu lähestyy vastaavaa sarjaratkaisua.



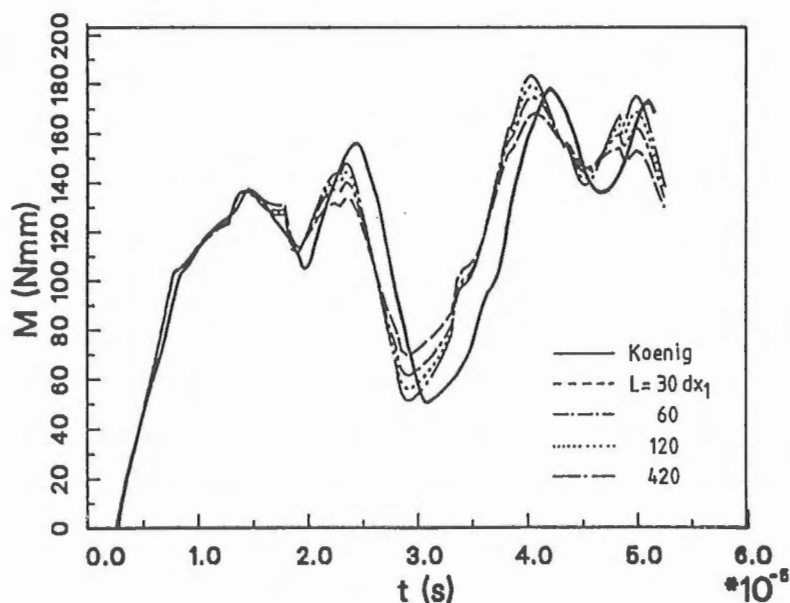
Kuva 6 Palkin keskipisteen taipuma (sarjaratkaisu ja karakteristikkamenetelmä).

Tarkastellaan Koenigin ja Davidsin (1968) käyttämää numeerista esimerkkiä. Ulokepalkki, jota kuormittaa ulokkeen päässä pistemomentti. Rakenteen geometria ja kuor-

mitus on esitetty kuvassa 7. Käytettävät materiaaliparametrit ovat: kimmokerroin $E = 2,068 \cdot 10^5 \frac{N}{mm^2}$, liukukerroin $G = 0,796 \cdot 10^5 \frac{N}{mm^2}$ ja tiheys $\gamma = 8,304 \cdot 10^{-3} \frac{g}{mm^3}$. Leikkausvoiman korjauskertoimelle on käytetty arvoa 0,833. Koenig ja Davids pitävät käyttämäänsä ratkaisumenetelmää elementtimenetelmän tyyppisenä ja kutsuvat sitä nimellä "Direct Analysis". Al-Mousawin (1988) mukaan menetelmä on kuitenkin lähempänä differenssi- kuin elementtimenetelmää.

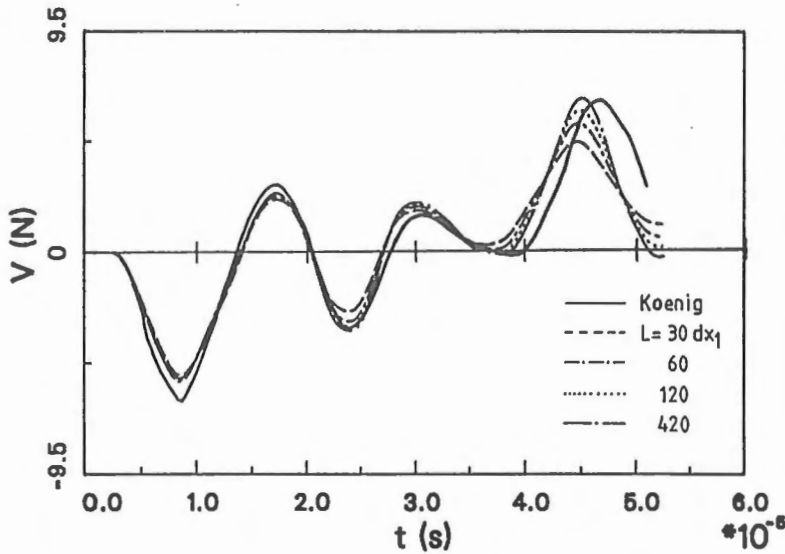


Kuva 7 Ulokepalkki ja kuormitus.



Kuva 8 Taivutusmomentti pisteessä $x = 12,7$ mm.

Tarkastellaan ensin askelkoon merkitystä karakteristikkamenetelmällä laskettuun ratkaisuun. Kuvissa 8 ja 9 on esitetty taivutusmomentti- ja leikkausvoimajakaumat ajan funktiona pisteessä $x = 12,7$ mm. Askel dx_1 on valittu eri tapauksissa siten, että rakenne diskretoidaan x -akselin suunnassa 30, 60, 120 tai 420 osaan. Kuvista nähdään,

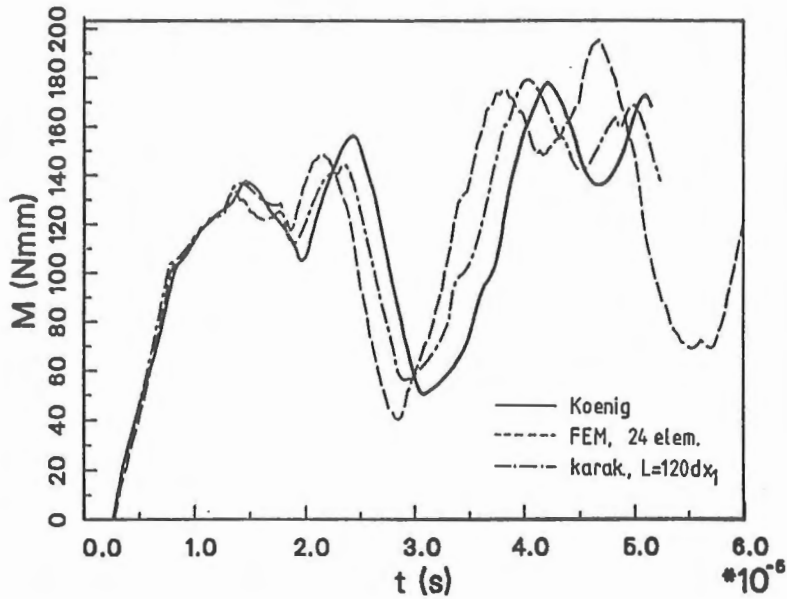


Kuva 9 Leikkausvoima pisteessä $x = 12,7\text{mm}$.

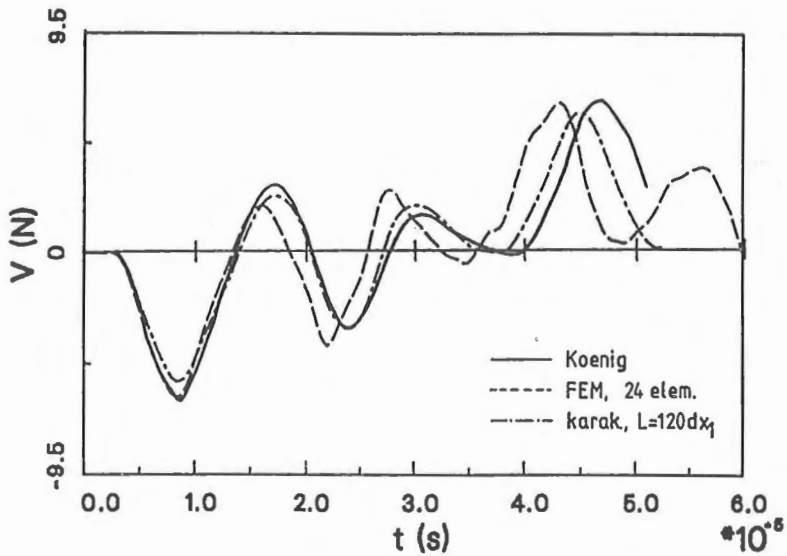
että saadut tulokset vastaavat hyvin differenssimenetelmällä laskettuja tuloksia. Askeleen koko ei selvästikään vaikuta dispersioon käytettäessä karakteristikamenetelmää, vaan vaihenopeudet ovat kaikilla diskretoinneilla saman suuruisia. Sen sijaan käytetty diskretointi vaikuttaa voimakkaasti vasteen suurimpiin ja pienimpiin arvoihin.

Lasketaan sama ulokepalkki esimerkki myös elementtimenetelmällä. Aikaintegrointiin on käytetty keskeisdifferenssimenetelmää ja massamatriisina on käytetty diagonaalista massamatriisia. Lineaarista yhden integrointipisteen Timoshenkon palkkielementtejä on käytetty 24 kappaletta. Aika-askeleena on käytetty $0,3\mu\text{s}$. Kuvissa 10 ja 11 on esitetty taivutusmomentti- ja leikkausvoimajakaumat ajan funktiona, laskettuna karakteristika-, elementti- ja differenssimenetelmällä. Nähdään, että kaikki käytetyt ratkaisumenetelmät antavat samanlaisia tuloksia. Käyrät ovat varsin pitkälle samanmuotoisia. Eri ratkaisumenetelmien numeeriset dispersiot sen sijaan poikkeavat toisistaan varsin paljon. Elementtimenetelmä antaa pienemmän vaihenopeuden ja differenssimenetelmä suuremman kuin karakteristikamenetelmä.

Tarkastellaan vielä momentin etenemistä palkissa. Kuvassa 12 on esitetty karakteristika- ja elementtimenetelmällä lasketut momenttijakaumat eri ajan hetkinä. Huomataan, että tulokset ovat hyvin lähellä toisiaan, mutta dispersio vääristää tulosta. Kuvasta nähdään, että heijastumisen yhteydessä ero kasvaa selvästi.



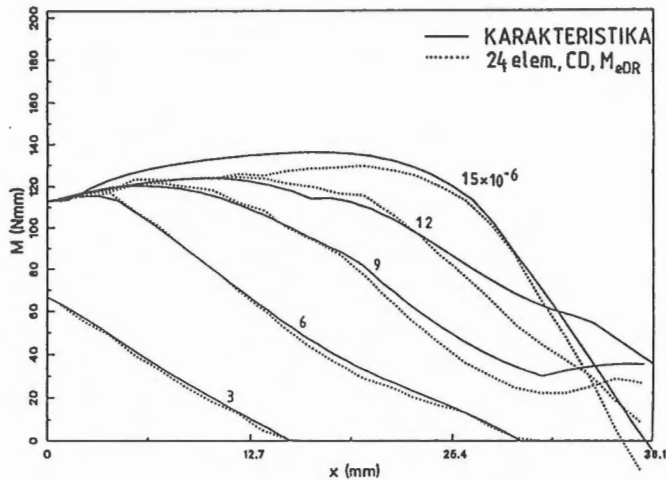
Kuva 10 Taivutusmomentti pisteessä $x = 12,7\text{mm}$.



Kuva 11 Leikkausvoima pisteessä $x = 12,7\text{mm}$.

PÄÄTELMÄT

Karakteristikamenetelmä on kaksidimensioisen aaltoyhtälön numeerisista ratkaisumenetelmistä tarkin ja nopein (Al-Mousawi, 1988). Lineaarissa probleemoissa näin ei kuitenkaan välttämättä ole. Jos vaste halutaan ratkaista vain muutamissa rakenteen kohdissa, sarjaratkaisu on taloudellisempi. Elementtimenetelmä on taloudellisempi, jos



Kuva 12 Taivutusmomenttijakauma eri ajan hetkinä.

halutaan selvittää vain vasteen suurimmat ja pienimmät arvot. Hypäyksellisten heurätteiden etenemisen karakteristikamenetelmä kuvaa tarkkaan, kun taas sarjamuotoinen ratkaisu ja elementtimenetelmä eivät kuvaa sitä kovinkaan tarkkaan. Materiaaliltaan epälineaaristen rakenteiden vasteen analysointiin karakteristikamenetelmä on hyvä. Tämä tosin ei onnistu, jos materiaali on myötöpehmenevää, koska silloin karakteristikoita ei ole enää olemassa.

Karakteristikamenetelmää on vaikea soveltaa geometrialtaan monimutkaisempiin rakenteisiin. Toisaalta menetelmä ei johda kovinkaan paljoa parempiin tuloksiin kuin esimerkiksi elementtimenetelmä. Tämän vuoksi menetelmän merkitys on lähinnä vertailulaskelmien tekeminen muille ratkaisumenetelmille.

KIITOKSET

Työ liittyy Suomen Akatemian rahoittamaan tutkimusprojektiin.

LÄHDEVIITTEET

ANDERSON, R. 1953, Flexural Vibrations in Uniform Beams According to the Timoshenko Theory, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 20, ss. 504-510

AL-MOUSAWI, M.M., 1988, On Numerical Solution Methods for Flexural Waves in Stepped Beams, *International Journal of Impact Engineering*, Vol. 7, nro 3, ss. 327-343

AMES, W.F., 1969, *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, London, Nelson, 291 s.

CHORLTON, F., 1969, *Boundary Value Problems in Physics and Engineering*, London, Van Nostrand Reinhold Company Ltd., 250 s.

COWPER, G.R., 1966, The Shear Coefficient in Timoshenko's Beam Theory, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 33, ss. 335-340

FOX, L., 1966, *Numerical Solution of Ordinary and Partial Differential Equations*, New York, Pergamon, 509 s.

KOENIG, H.A. & DAVIDS, N., 1968, Dynamical Finite Element Analysis for Elastic Waves in Beams and Plates, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 4, ss. 643-660

MINDLIN, R.D. & DERESIEWICZ, H., 1976, Timoshenko's Shear Coefficient for Flexural Vibrations of Beams, In: Kalnins, A. & Dym, C.L. *Vibration Beams, Plates and Shells*, Benchmark Papers in Acoustics/8, Stroudsburg, Pennsylvania, Dowden, Hutchinson & Ross Inc., ss. 14-40

Andrea Colussi, DI, TKK, rakennetekniikan laitos