

KAKSI- JA KOLMIDIMENSIOISEN AVOUOMAVIRTAUKSEN LASKENTA DIFFERENSSI-
MENETELMÄLLÄ

Timo Laitinen

Petri Piila

TIIVISTELMÄ

Rakenteiden mekaniikka Vol. 23

No 1 1990, s. 36-49

Artikkelissa tarkastellaan avouomavirtauksen ratkaisua differenssimenetelmällä. Pääasiassa tarkastellaan 2D-mallia, jossa nopeusvektorin vaakakomponentit ovat vakioita pystysuunnassa ja nopeusvektorin pystykomponentti on nolla. Lisäksi käsitellään lyhyemmin 2D-mallin laajentamista monikerrosmalliksi, jossa kukin kerros käsitellään 2D-mallin tavoin. Lisäksi kerrosten välillä tapahtuu massan vaihtoa sekä liikemäärän vaihtoa konvektion ja diffuusion kautta. Painejakauma pystysuunnassa otaksutaan molemmissa malleissa hydrostaattiseksi. Mallien antamia tuloksia eräässä sovellutuskohteessa tarkastellaan ja verrataan näitä kohteessa tehtyihin mittaustuloksiin.

MALLIEN YLEISKUVAUS

Mallien perusyhtälöt ovat jatkuvuusyhtälö sekä liikemäärän säilymisyyhtälöt. Vesi otaksutaan kokoonpuristumattomaksi sekä lämpötila- ja konsentraatioeroista aiheutuvat tiheyden muutokset merkityksettömiksi. Tiheys supistuu siten pois jatkuvuus- ja liikeyhtälöistä.

Koska painejakautuma pystysuunnassa otaksutaan hydrostaattiseksi, voidaan paineen asemasta käyttää muuttujana vedenpinnan korkeustasoa $w(x,y)$. Tämän lisäksi tuntemattomina ovat virtaamat

$$U = u_h \quad (1)$$

ja

$$V = v_h \quad (2)$$

jossa h on vesisyvyys 2D-mallissa ja kerroksen paksuus monikerrosmallissa sekä u ja v ovat nopeusvektorin vaakakomponentit. Virtaamien laatu on siten $m/s \times m = m^2/s = m^3/s/m$. Monikerrosmallissa tarvitaan lisäksi virtausnopeuden pystykomponentit kerrosrajoilla. Nämä lasketaan jatkuvuusyhtälöistä myöhemmin esitettävällä tavalla. Yhtälöistä (1) ja (2) nähdään, että nopeuskomponentit u ja v otaksutaan vakioiksi pystysuunnassa koko vesisyvyydellä (2D-malli) tai kerroksittain (monikerrosmalli).

Virtauksen turbulენტtisuus otetaan huomioon likimääräisellä tavalla käsittelemällä kinemaattisen viskositeetin sijasta turbulენტtista viskositeettia (eddy-viskositeetti), jolle annetaan kinemaattiseen viskositeettiin verrattuna suuri arvo (luokkaa $0,01 m^2/s$), jolloin se kuvaa turbulენტtisten pyörteiden aiheuttamaa liikemäärän siirtymistä. Pohjakitka lasketaan Manningin kaavalla.

DISKRETOINTI

Diskretointi paikan suhteen suoritetaan lähteessä 1 esitetyllä "staggered grid" menetelmällä, jossa w , U ja V lasketaan omissa solmuissaan ja tarvittavat väliarvot interpoloidaan suoraviivaisesti. Jatkuvuusyhtälöt muodostetaan w -solmuissa, x -akselin suuntaiset liikeyhtälöt U -solmuissa ja y -akselin suuntaiset liikeyhtälöt V -solmuissa.

Kuva 1 esittää 2D-mallin diskretointia. Uloimpina solmuina ovat aina U - ja V -solmut. Mallin ei välttämättä tarvitse olla suorakaiteen muotoinen kuten kuvassa 1, mutta epäsäännöllinenkin reuna on kuitenkin aina porrasmainen ja reunasolmut ovat U - tai V -solmuja.

Jos reunalla ei anneta reunaehtoja, otaksutaan uloin, reunaa vastaan kohtisuora virtaama nolllaksi. Virtaamareunaehto saadaan antamalla ko. virtaamalle tietty arvo. Vedenkorkeusreunaehto puolestaan saadaan kiinnittämällä vedenpinnan korkeustaso ko. reunaa lähinnä olevissa w -solmuissa. Tällöin kunkin w -solmun vieressä olevan, em. reunalla sijaitsevan virtaussolmun virtaama lasketaan w -solmuun liittyvästä jatkuvuusyhtälöstä.

Muodostettaessa jatkuvuusyhtälöä w_i -solmussa muodostetaan solmun ympärille laatikko, jonka reunaviivoilla w_i -solmun viereiset virtaamasolmut sijaitsevat (kuva 2). Muodostettaessa x-akselin suuntaista liikeyhtälöä U_i -solmussa muodostetaan solmun ympärille laatikko, jonka y-akselin suuntaisilla sivuilla sijaitsevat U_i -solmun viereiset w-solmut ja nurkissa U_i -solmua lähimmät V-solmut. U_i -solmu sijaitsee aina em. w-solmujen puolivälissä. Vastaavalla tavalla muodostetaan laatikot V-solmujen ympärille y-akselin suuntaisia liikeyhtälöitä muodostettaessa.

Monikerrosmalli diskretoidaan samalla tavalla kuin 2D-malli. Tällöin on kuitenkin kuvassa 1 U- ja V-solmujen paikalla useita päällekkäisiä solmuja (kuvat 6, 7). Kukin virtaamasolmu sijaitsee sitä rajoittavan laatikon keskellä. Jos pohjan korkeustaso jollakin alueella muuttuu paljon, on osa kerroksista päätettävä. Tätä esittää kuva 7, jossa tarkastellaan x-z tason suuntaista pystyleikkausta. Jos U-solmua rajoittavan laatikon jomman kumman w-solmun kohdalla vesivahvuus alittaa arvon TOL/2, jossa TOL on kunkin tapauksen mittasuhteiden perusteella määräytyvä toleranssi, pidetään kyseisessä virtaamasolmussa virtaama nollana koko laskennan ajan. Sama pätee luonnollisesti myös V-solmuihin. Jos taas em. vesivahvuus on välillä TOL/2, TOL alennetaan pohjan korkeustasoa siten, että vesivahvuudeksi tulee TOL. Valitsemalla TOL riittävän suureksi saadaan laskennassa käytetty pohjan profiili porrasmaiseksi.

JATKUVUUSYHTÄLÖT

Jatkuvuusyhtälöt muodostetaan kullekin w-solmulle. 2D-tapauksessa ne ovat muotoa

$$(w_i - w_i^0) DX_i DY_i / DT + (U_e - U_w) DY_i + (V_n - V_s) DX_i = 0. \quad (3)$$

w_i^0 on vedenpinnan korkeustaso aika-askelen alussa, DX_i ja DY_i ovat laatikon sivumitat ja DT aika-askel. Muut merkinnät selviävät kuvasta 2.

Monikerrosmallissa on kunkin kerroksen virtaamat summattava. Jatkuvuusyhtälö on tällöin

$$(w_i - w_i^0) DX_i DY_i / DT + \left(\sum_{j=1}^{n_{ze}} U_{ej} - \sum_{j=1}^{n_{zw}} U_{wj} \right) DY_i + \left(\sum_{j=1}^{n_{zn}} V_{nj} - \sum_{j=1}^{n_{zs}} V_{sj} \right) DX_i = 0 \quad (4)$$

LIIEKEYHTÄLÖT

Liikkeyhtälöt muodostetaan U- ja V-solmuille. Tarkastellaan seuraavassa U-solmun liikkeyhtälön muodostamista 2D-tapauksessa (kuva 3). Liikkeyhtälö U-solmulle voidaan esittää muodossa

$$LV_w - LV_e + LV_s - LV_n + F_w - F_e - F_{ka} - F_k = DL/DT \quad (5)$$

jossa L on liikemäärävektorin komponentti x-suunnassa, LV on diffuusion ja konvektion kautta tapahtuva, em. liikemäärän komponentin vuo laatikon seinän läpi, DL on em. komponentin muutos tarkasteltavalla aika-askeleella DT, F_w , F_e ja F_{ka} ovat hydrostaattisen paineen aiheuttamat voimakomponentit x-suunnassa ja F_k on kitkavoiman komponentti x-suunnassa (kuvat 4 ja 5).

Kun yhtälön (5) molemmat puolet ajatellaan jaetuksi tiheydellä, joka otaksutaan vakioksi, saadaan yhtälön (5) termeille seuraavat esitysmuodot.

$$LV_w = u_{sw} U_{sw} DY_i + e(U_w - U_i) DY_i / DX_w \quad (6)$$

Tässä u_{sw} ja U_{sw} ovat virtausnopeus (m/s) ja virtaama ($m^3/s/m$) pisteessä w . Nopeus u_{sw} interpoloidaan lineaarisesti arvoista u_w ja u_i . Virtaama U_{sw} diskretoidaan upwinding menetelmällä siten, että

$$\begin{aligned} U_{sw} &= U_w, \text{ jos } u_{sw} > 0 \\ U_{sw} &= U_i, \text{ jos } u_{sw} < 0. \end{aligned} \quad (7)$$

DY_i on U_i -laatikon leveys y-suunnassa, DX_w on solmujen U_w ja U_i välinen etäisyys ja e on turbulентtinen viskositeetti (eddy-viskositeetti) (m^2/s).

Vastaavasti

$$LV_s = v_{ss} U_{ss} DX_i + e(U_s - U_i) DX_i / DY_s \quad (8)$$

Nopeus v_{ss} interpoloidaan lineaarisesti arvoista v_{sw} ja v_{se} . Virtaama U_{ss} on

$$\begin{aligned} U_{ss} &= U_s, \text{ jos } v_{ss} > 0 \\ U_{ss} &= U_i, \text{ jos } v_{ss} < 0. \end{aligned} \quad (9)$$

DX_i on U_i -laatikon leveys x-suunnassa ja DY_s on solmujen U_s ja U_i välinen etäisyys.

Vuot LV_e ja LV_n muodostetaan vastaavalla tavalla.

Hydrostaattisen paineen aiheuttamat U_i -laatikkoon kohdistuvat ulkoiset voimat voidaan esittää muodossa (katso kuva 5)

$$F_w - F_e - F_{ka} = 0,5 g (h_w + h_e) (w_w - w_e) DY_i \quad (10)$$

Tämä yhtälö pätee myös monikerrosmallin laatikoille.

Kitkavoima F_k on

$$F_k = 0,5 g (h_w + h_e) S_{fx} DX_i DY_i \quad (11)$$

jossa kitkakaltevuus S_{fx} lasketaan Manningin kaavalla

$$S_{fx} = n^2 U_i (U_i^2 + V_i^2)^{0,5} / h_i^{10/3} \quad (12)$$

jossa n = Manningin karkeuskerroin (tyypillisesti 0,03), $h_i = 0,5 (h_w + h_e)$ ja V_i interpoloidaan arvoista V_{sw} , V_{se} , V_{nw} ja V_{ne} .

Yhtälön (5) oikealla puolella oleva termi voidaan esittää muodossa

$$DL/Dt = (U_i - U_i^0) DX_i DY_i / Dt \quad (13)$$

jossa U_i^0 on virtaama tarkasteltavan aika-askeleen alussa.

Monikerrosmallisissa tulee yhtälöön (5) lisäksi liikemäärän x-komponentin vuot LV_b ja LV_t laatikon pohjan ja katon läpi. Vastaava yhtälö on (katso myös kuvaa 6)

$$LV_w - LV_e + LV_s - LV_n + LV_b - LV_t + F_w - F_e - F_{ka} - F_k = DL/Dt \quad (14)$$

$$LV_b = (q_b u_b + e(u_i^b - u_i) / DZ^b) DX_i DY_i \quad (15)$$

$$LV_t = (q_t u_t + e(u_i - u_i^t) / DZ^t) DX_i DY_i \quad (16)$$

z-akselin suuntaiset nopeuskomponentit q_b ja q_t ovat

$$q_b = (q_w^b + q_e^b) / 2, \quad q_t = (q_w^t + q_e^t) / 2 \quad (17)$$

u_b ja u_t lasketaan solmuarvojen u_i^b , u_i ja u_i^t avulla. Niihin sovelletaan upwinding menettelyä nopeuksien q_b ja q_t suunnan mukaan.

Pohjimmaisessa kerroksessa jää termi LV_b pois ja ylimmässä termi LV_t . Kitkatermi F_k esiintyy vain alimmassa kerroksessa. Nopeuksien q_b ja q_t laskemiseksi kaikissa laatikoissa on tiedettävä pystynopeudet kerroisrajoilla kunkin w-solmun kohdalla. Solmun w_i -kohdalla ylimmän ja toiseksi ylimmän kerroksen rajalla pystynopeus q_1 lasketaan jatkuvuusyhtälöstä.

$$q_1 DX_i DY_i + U_{w1} DY_i - U_{e1} DY_i + V_{s1} DX_i - V_{n1} DX_i = (w_i - w_i^0) DX_i DY_i / DT. \quad (18)$$

jossa U_{w1} , U_{e1} , V_{s1} ja V_{n1} ovat 1. kerroksen vaakavirtaamia.

Seuraavan kerrosrajan pystynopeus ratkaistaan jatkuvuusyhtälöstä

$$q_2 DX_i DY_i + U_{w2} DY_i - U_{e2} DY_i + V_{s2} DX_i - V_{n2} DX_i = q_1 DX_i DY_i \quad (19)$$

Näin menetellen jatketaan alimman ja toiseksi alimman kerroksen rajalle asti.

YHTÄLÖIDEN RATKAISU 2D-TAPAUKSESSA

Tuntemattomat w_i , U_i ja V_i ratkaistaan yhtälöistä (3), (5) ja yhtälöitä (5) vastaavista, V_i -solmuille muodostetuista yhtälöistä. Ratkaisumenetelmänä käytetään modifioitua Newton-Raphson iteraatiota. Yhtälöiden (3) differentioitu muoto on

$$Dw_i DX_i DY_i / DT + (DU_e - DU_w) DY_i + (DV_n - DV_s) DX_i = -F_{wi} \quad (20)$$

jossa Dw , DU ja DV ovat vedenpinnan korkeustason ja virtaamien inkrementit ja F_{wi} on jatkuvuusyhtälön epätasapaino-osa (supenneella ratkaisulla $F_{wi} = 0$).

Liiketyhtälöitä (5) differentioitaessa otetaan huomioon vain inkrementit DU_i , Dw_w ja Dw_e (kuva 3). Differentioidut liiketyhtälöt solmun w_i (kuva 2) viereisissä solmuissa U_w , U_e , V_s ja V_n voidaan tällöin esittää muodossa

$$DU_w = b_1 Dw_w + c_1 Dw_i - d_1 F_{Uw}$$

$$DV_e = b_2 Dw_i - c_2 Dw_e - d_2 F_{Ve}$$

$$DV_s = b_3 Dw_s - c_3 Dw_i - d_3 F_{Vs}$$

$$DV_n = b_4 Dw_i - c_4 Dw_n - d_4 F_{Vn}$$

(21)

jossa F -termit ovat liiketyhtälöiden epätasapaino-osia. Liiketyhtälöiden epätasapaino-osat saadaan siirtämällä yhtälössä (5) kaikki termit samalle puolelle, jolloin yhtälöt ovat muotoa $F = 0$.

Kun yhtälöt (21) sijoitetaan inkrementaaliseen jatkuvuusyhtälöön (20) se saadaan muotoon

$$a_1 Dw_w + a_2 Dw_s + a_3 Dw_i + a_4 Dw_n + a_5 Dw_e = a_6 \quad (22)$$

jossa

$$a_1 = -b_1 DY_i$$

$$a_2 = -b_3 DX_i$$

$$a_3 = (c_1 + b_2) DY_i + (c_3 + b_4) DX_i + DX_i DY_i / DT \quad (23)$$

$$a_4 = -c_4 DX_i$$

$$a_5 = -c_2 DY_i$$

$$a_6 = -F_{wi} + (-d_1 F_{Uw} + d_2 F_{Ue}) DY_i + (-d_3 F_{Vs} + d_4 F_{Vn}) DX_i$$

Jos jokin solmuista U_w , U_e , V_s tai V_n on reunasolmu, on vastaava virtaaman inkrementti nolla ja yhtälö (22) yksinkertaistuu vastaavasti.

Kaikille w -solmuille muodostetaan yhtälöä (22) vastaavat yhtälöt reunaehdot huomioiden ja saatu yhtälöryhmä ratkaistaan Gaussin eliminaatiolla. Tämän jälkeen virtaaman inkrementit ratkaistaan takaisinsijoituksella yhtälöistä (21). Menetelmää toistetaan, kunnes kunkin w -solmun jatkuvuusyhtälö (3) toteutuu riittävällä tarkkuudella eli vastaava epätasapaino-osa F_h on riittävän pieni. Iteraation alkuarvoina käytetään edellisen aika-askeleen tuloksia.

YHTÄLÖIDEN RATKAISU MONIKERROSMALLISSA

Myös monikerrosmallin ratkaisu palautuu yhtälöiden (22) tyyppisten yhtälöiden ratkaisuun. Perusyhtälönä on jatkuvuusyhtälön (4) differentioitu muoto. Tämän jälkeen muodostetaan kussakin kerroksessa yhtälöiden (21) muotoiset, yhtälöistä (14) differentioidut yhtälöt. Kun nämä sijoitetaan differentioituun jatkuvuusyhtälöön, saadaan kullekin w -solmulle yhtälön (22) tyyppiset yhtälöt. Pystynopeudet q ovat apumuuttujan asemassa eikä yhtälöitä (18) ja (19) differentioida. Nopeudet q ratkaistaan erikseen yhtälöistä (18) ja (19) kunkin iteraatioaskeleen alussa. Tällöin vedenpinnan korkeustasoille w sekä virtaamille U ja V käytetään edellisellä iteraatioaskeleella laskettuja arvoja.

LASKENTASOVELLUTUS

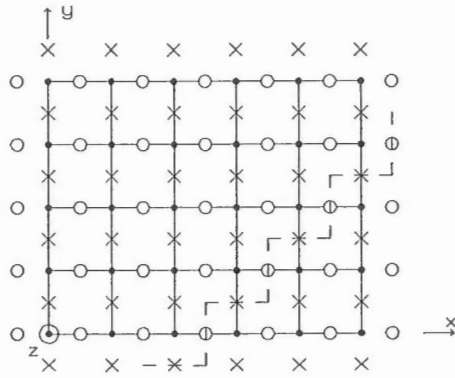
Laskentasovellutuksena tarkastellaan stationaarista virtaustilannetta kaapeissa salmessa, joka purkaa vettä järvestä (kuvat 8-11). Salmen kapeimman kohdan leveys on noin 50 m. Kapeimman kohdan jälkeen salmi levenee äkillisesti, jolloin syntyy pyörteitä päävirtauksen molemmille puolille. Lisäksi pohjan korkeustason voimakkaat muutokset (kuva 11) mutkistavat virtaustilannetta, koska paikoitelleen muodostuu pystyvirtauksia. Salmen kapeimmassa kohdassa virtausnopeudet ovat 1 - 1,5 m/s. Vedenpinnan korkeustaso järvestä on noin +91,5, jota käytetään ylävirran reunaehtona. Alavirran reunaehtona käytetään kokonaisvirtaamaa $65 \text{ m}^3/\text{s}$, joka on saatu hydrologisista taulukoista. Stationaarinen tilanne on laskettu epästationaarisella menetelmällä.

Tällöin alkutilanteena on ollut vedenpinnan korkeustaso +91,5 sekä nollavirtaumat koko laskenta-alueella. Alavirran puoleinen reunaehtovirtaama on kasvatettu nollasta arvoon $65 \text{ m}^3/\text{s}$ kuudessa tunnissa. Laskennan aika-askelena on käytetty kahta tuntia. Laskenta on lopetettu kun virtaustilanne ei enää olennaisesti muutu. Tähän on tarvittu noin 2 vrk tarkastelu-aika.

Turbulenttisen viskositeetin ja Manningin karkeuskertoimen arvojen muuttaminen vaikuttaa vain vähän laskentatuloksiin. Mittaushavaintoja lähimmäksi on päästy viskositeetin arvolla $0,01 \text{ m}^2/\text{s}$ ja karkeuskertoimen arvolla 0,03.

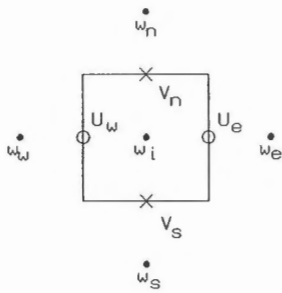
Kuvassa 8 on esitetty pintavirtausmittauksia alueelta. Kuvassa 9 on esitetty monikerrosmallilla lasketut keskimääräiset virtausnopeudet 1,5 m syvyydellä. Kuvassa 10 on esitetty 2D-mallilla lasketut virtausnopeudet. Kuvassa 11 on pohjan korkeustason tasa-arvokäyriä.

Tulokset osoittavat, että 2D-malli ei pysty kuvaamaan hyvin tämän kaltaista tilannetta, jossa on suurehkot virtausnopeudet ja pohjan korkeuden vaihtelut. Monikerrosmalli sen sijaan hydrostaattisesta paineotaksumasta huolimatta pystyy kuvaamaan virtaustilanteen hyvin tarkasti.

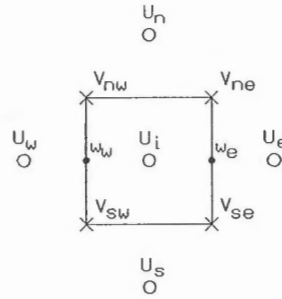


Kuva 1. Esimerkki yksinkertaisesta laskentaverkosta.

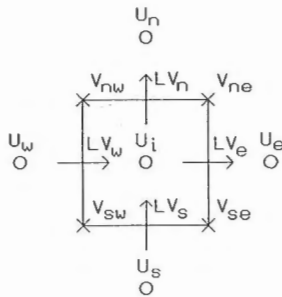
- w-piste o U-piste x V-piste
- vino rantaviiva



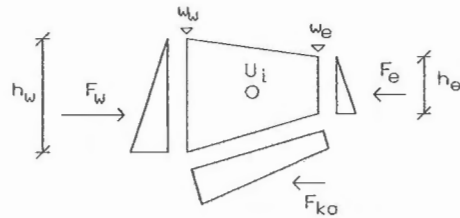
Kuva 2. w_i -laatikko 2D-mallissa



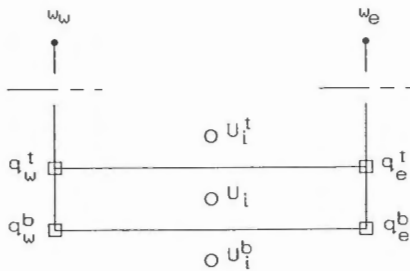
Kuva 3. U_i -laatikko 2D-mallissa



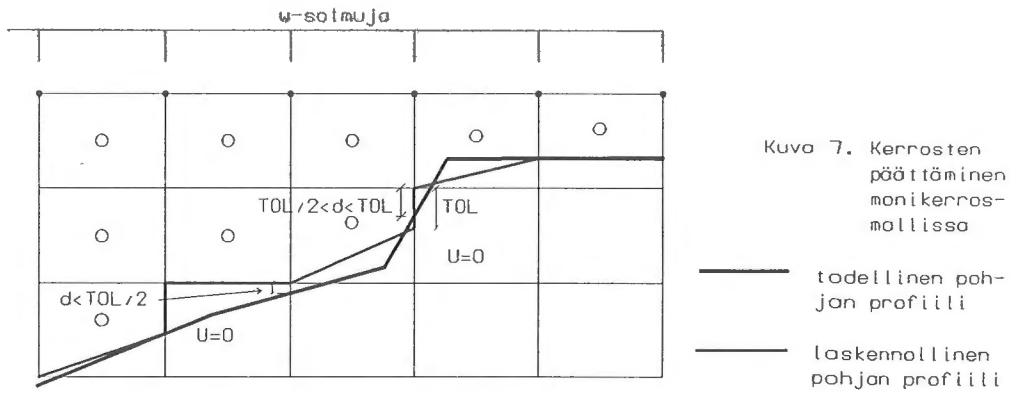
Kuva 4. Liikemäärän x-komponentin siirtyminen U_i -laatikon reunojen läpi 2D-mallissa



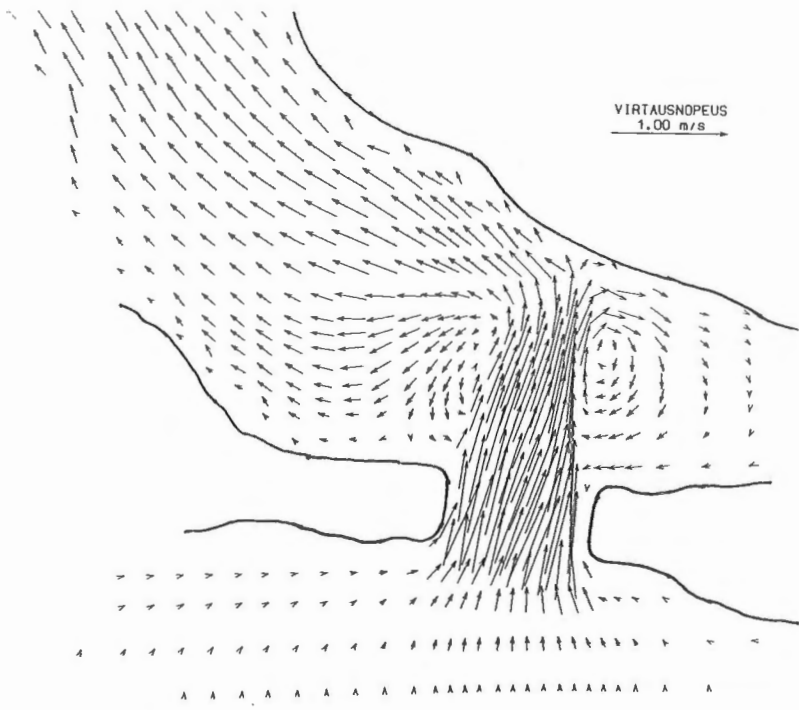
Kuva 5. U_i -laatikkoon kohdistuvat ulkoiset voimat (=hydrostaattinen poine)



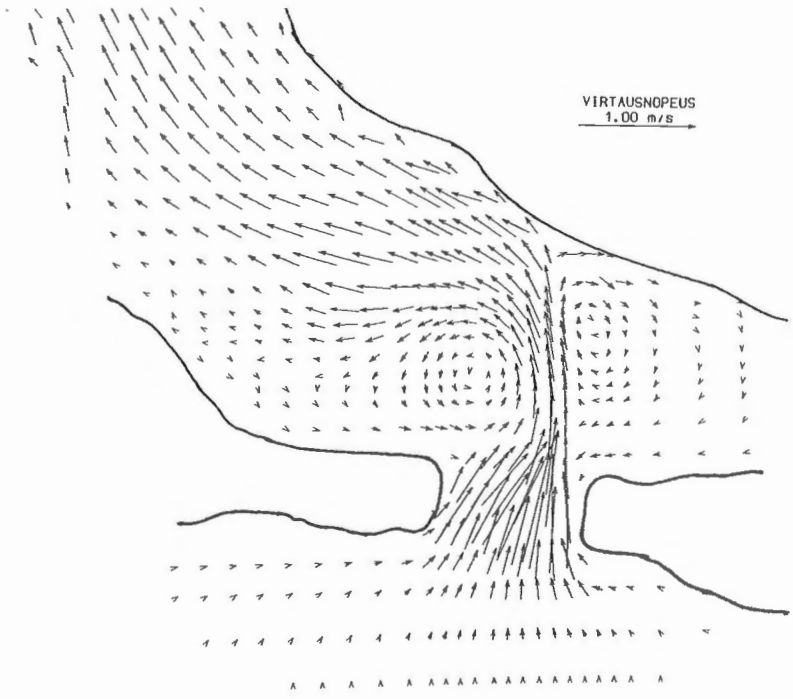
Kuva 6. U_i -laatikko sivulta päin monikerrosmallissa



Kuva 8. Kohteen pintavirtausmittauksia



Kuva 9. Monikerrosmallilla laskettu pinta virtausnopeuksia



Kuva 10. 2D-mallilla laskettu virtausnopeuksia



Kuva 11. Pohjan korkeustason tasa-arvokäyriä (nykyisen sillan penkereet piirretty katkoviivallo)

LÄHDELUETTELO

1. Suhas V. Patankar, Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, McGraw-Hill Book Company, 1980
2. A.M. Davies, Application of the Galerkin Method to the Formulation of a Three Dimensional Nonlinear Hydrodynamic Numerical Sea Model, Appl.Math. Modeling 4(1980) pp 245-256
3. K. Mahmood, V. Yevjevich, Unsteady Flow in Open Channels, Water Resources Publications, 1975

Timo Laitinen, projektipäällikkö, Oy Vesi-Hydro Ab
Petri Piila, suunnitteluinsinööri, Oy Vesi-Hydro Ab