

ELEMENTTIRATKAISUN AUTOMAATTINEN TARKENTAMINEN

Hannes Niemi

Rakenteiden mekaniikka, Vol.23
No 1 1990 s. 3-22

TIIVISTELMÄ: Kirjoituksessa käsitellään eri lähestymistapoja, joita käyttäen pyritään tarkentamaan elementtimenetelmän ratkaisua. Esimerkkinä lasketaan paksuseinäisen putken siirtymätila. Lisäksi esitetään laskentakaavio, jolla tulevaisuudessa voidaan hakea riittävän tarkka ratkaisu elementtimenetelmällä.

1 JOHDANTO

Elementtimenetelmä on laajasti käytössä lujuuslaskennassa. Ohjelmistotarjonta on runsasta, ohjelmat ovat testattuja ja niihin on saatavilla monipuoliset esi- ja jälkikäsitteijät. Ohjelmien oikea toiminta voidaan helposti tarkastaa testitapauksilla. Esikäsitteijöillä voidaan myös tarkastella elementtien muotoja sekä mallille asetettuja reunaehtoja.

Elementtimenetelmän ratkaisun tarkkuutta ei ohjelmissa voi tarkastella. Tarkkuuden arviointi ja ratkaisun hyväksyminen myöhempää käyttöä varten on analyysin tekijän tiedon ja kokemuksen varassa. Usein varsinaista virhetarkastelua ei tehdä, vaan tulosten tarkkuutta perustellaan järkevääntuntuisilla siirtymillä ja verkon tiheydellä sekä elementtien muodolla. Tietokoneavusteisen suunnittelun kehittyminen vaatii analyysin automatisointia. Pitkälle viety automaattinen laskenta tarvitsee tuekseen adaptiivisuutta ja on tuomassa virhearviointia käytännön laskentaan.

2 ELEMENTTIRATKAISUN TARKENTAMINEN

Elementtimenetelmä on luonteeltaan likimenetelmä kuten differenssimenetelmä, jota voidaankin pitää elementtimenetelmän erikoistapauksena /11 s. 154/. Elementtiratkaisu on tarkka vain poikkeustapauksissa ja huonolla verkolla voidaan menettää kaikki tarkkuus, mitä on haettu kuormitusmittauksilla materiaalikokeilla ym. Oikein muodostettu elementtiratkaisu konvergoi kohti oikeaa ratkaisua. Ratkaisun tarkkuus riippuu paitsi elementtijaosta ja verkon tiheydestä myös kuormituksesta sekä mallin singulariteeteista. Kon-

vergenssi on saman tyyppistä kuin esim. differenssimenetelmällä eli se on pääasiassa verrannollinen verkon tiheyteen ratkaisualueessa (tilavuudessa).

Mallin tarkentaminen vaatii lähes aina vapausasteiden lisäämistä laskentamalliin. Vapausasteiden lisäämiseen voidaan käyttää eri lähestymistapoja. Kun mallin tarkkuutta pyritään systemaattisesti parantamaan, puhutaan eri versioista. Siirtymäelementtimenetelmälle nämä ovat h-, p- ja hp-versiot, joita on esitelty esim. lähteissä /1 s.323 ja 5/.

Jotta elementtiratkaisu lähestyisi oikeata tulosta on sen täytettävä tietyt ehdot, jotka takaavat konvergenssin verkkoa tihennettäessä /10 s.64/. Laskettaessa äärellisellä tarkkuudella pitäisi löytyä myös tilanne, jossa ratkaisu lähtee hajaantumaan. Tämä ei käytännön laskennassa liene kovin tavallista.

Ratkaisun tarkkuutta voidaan arvioida /5/ ensimmäisen kertaluvun derivaattojen epäjatkuvuudella, reunaehtojen toteutumisella, elementin voimatasapainolla, differentiaaliyhtälön toteutumisella ja ratkaisussa minimoidun normin suuruudella eri malleilla. Voidaan myös tarkastella virhetermiä energianormilla mitattuna. Hyvänä ja tehokkaana pidetään Zienkiewiczin Zhun esittämää menetelmää /13/.

2.1 Ratkaisun konvergenssinopeuden arviointi

Konvergenssin nopeutta voidaan arvioida Taylorin kehitelmän /10 s.34/ avulla. Tarkka tulos solmun ympäristössä on

$$u = u_i + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_i y + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_i z + \dots, \quad (2.1)$$

missä

u on approksimoitu suure ja

u_i on pistearvo.

Taylorin kaavalla voidaan approksimoida funktiota tarkasti edellyttäen, että funktio on riittävästi derivoituva ja rajoitettu tarkastelualueella /17 s.88/.

Approksimaatio on polynomimuotoinen. Elementtiapproksimaatio sopii kaavaan niiden termien osalta, jotka ovat mukana elementin muotofunktioissa. Virhettä voidaan kuvata muodossa /10 s.34/

$$|u - \tilde{u}| = O(h^{p+1}), \quad (2.2)$$

missä

$\tilde{u}$ on approksimaatio,

h on jakoväli ja

p on mukana olevan polynomin asteluku.

Jos elementti on täydellinen toisenasteen approksimaatio tasossa sisältäen termit $(1, x, y, xy, x^2, y^2)$, niin

$$|u - \tilde{u}| = O(h^3). \quad (2.3)$$

Virhe pienenee ratkaistavan suureen osalta kahdeksanteen osaan jaon tihentyessä puoleen. Haettaessa ratkaisun derivaattoja konvergenssin nopeus pienenee ja on

$$|u^m - \tilde{u}^m| = O(h^{p+1-m}), \quad (2.4)$$

missä

$\tilde{u}^m$ on approksimaation m :s derivaatta ja

m on derivaatan kertaluku.

Kaavoista (2.1-4) nähdään, että asteluvun nosto antaa nopeamman konvergenssin kuin verkon tihentäminen. Kun mallissa on mukana singulaarisuutta, on otettava mukaan singulaarisuuden astetta kuvaava termi ja kaava saa energianormille kirjoitetuna muodon /12 s.27/

$$\|u - \tilde{u}\| \leq C \cdot h^{\min(k,p)}, \quad (2.5)$$

missä

C on vakio ja

k singulaarisuutta kuvaava luku.

Särötapauksessa k on 1.5. Näyttäisi siltä, että singulaarisuuden ollessa mukana mallissa ei asteluvun nosto olisi perusteltua. Toisaalta tulokset /8 s.71/

osoittavat, että asteluvun nosto nopeuttaa konvergenssia, vaikka mukana olisi singulaarisuutta. Tämä johtuu /8 s.70/ siitä, että ratkaisu muualla käyttäytyy sileästi. Voidaankin sanoa, että singulaarisuuden ollessa reunalla ja reunaehdoista johtuvaa on kaavan (2.5) antama arvio liian suuri koko mallia ajatellen.

2.2 Ratkaisun tarkentamismenetelmät

Tarkennettaessa ratkaisua kasvattamalla verkontiheyttä ja pienentämällä elementtien kokoa puhutaan h-versiosta. Nimi tulee tavasta merkitä elementin luenteenomaista kokoa parametrilla h.

Tässä versiossa elementtien asteluku pidetään samana kuin alunperin valitussa mallissa. Verkkoa tihennetään lisäämällä uusia solmuja ja elementtejä. Mallin vapausasteet lisääntyvät. Ongelma pelkistyy verkon generointi ongelmaksi. Virhearviota tarvitaan osoittamaan milloin laskenta voidaan lopettaa ja toisaalta mihin tihennys kannattaa kohdistaa.

H-versio on käytännössä tärkein tapa tarkentaa mallia. Hyvä esikäsittelijä mahdollistaa h-version simuloinnin helposti. Jos elementtiohjelma vielä laskee mallille esimerkiksi energianormin niin voidaan puhua jopa varsinaisesta h-version soveltamisesta.

Tarkennettaessa ratkaisua korottamalla muotofunktion astelukua puhutaan p-versiosta. Elementtiverkkoa ei tihennetä vaan tyydytään alkuperäiseen elementtijakoon. Asteluvun korottaminen tuo malliin lisää vapausasteita. Se mitä vapausasteet ovat ja tuleeko malliin lisää myös solmuja riippuu tavasta, millä astelukua nostetaan.

Sileässä ratkaisussa aproksimaatiofunktioiden eli muotofunktioiden asteluvun nostamisesta on kiistämättömiä etuja laskennan kannalta. Malli voidaan rakentaa huomattavasti pienemmällä elementti- ja solmumäärällä kuin konventionaalisessa menetelmässä. Adaptiivisuuden lisääminen, mikä olennaisesti liittyy p-versioon, ohjaa tulokset hyvin lähelle oikeata ratkaisua ainakin insinöörimielessä. Useissa artikkeleissa yhtenä p-version etuna nähdään

venymien ja jännitysten parempi jatkuvuus mallin alueella. P-version mallituksessa derivaattojen parempi jatkuvuus johtuu osittain harvasta elementtiverkosta. Jälkikäsitellyssä paremmasta jatkuvuudesta on luonnollisesti hyötyä, sillä tasoituksen tarve vähenee. Tarkkuuden arvioinnissa saatetaan jopa mennä taaksepäin. Mallitettaessa rakenne yhdellä elementillä kadotetaan kokonaan yksi tarkkuuden kriteeri eli venymien jatkuvuus elementtien välillä, ja on itseasiassa palattu Ritzin menetelmään.

Dokumentoiduissa tapauksissa on yleensä korkein asteluku kahdeksan kaksidimensioisissa sovelluksissa. Rajoittuminen korkeintaan viidenteen asteeseen tuntuisi perustellulta. Korkea-asteisilla polynomiapproksimaatiolla esiintyvä Rungen ilmiö eli heilahtelu ilmenee myös elementin alueella.

Tavanomaisin tapa verrata eri menetelmiä on energiakonvergenssi. Se usein näyttääkin p-version kannalta hyvältä. Heilahtelu häviää vertailusta kokonaan. P-version tuloksia verrataan usein lineaaristen elementtien kuten kolmisolmuisen levyelementin tuloksiin. Vertailu lineaariseen elementtiin tai nelisolmuisen elementtiin on käytännössä harhaanjohtava, sillä niitä ei yleisesti käytetä. Asteluvun korotuksessa on selvä laadullinen hyppäys siirryttäessä lineaarisesta elementistä toisen asteen approksimaatioon. Tämä johtunee siitä, että kaavoja formuloitaessa käytetään heikkoa muotoa. Jos käytettäisiin suoraan tasapainoyhtälöä, ei lineaarista aproksimaatiota voitaisi käyttää ollenkaan. Edelleen ajatus venymien ja jännitysten paremmasta jatkuvuudesta perustuu osittain harvempaan elementtiverkkoon.

Kun yhdistetään h- ja p-versiot puhutaan hp-versiosta. Tässä menetelmässä muutetaan sekä verkkoa että approksimaation astelukua. Menetelmä on varmaankin tehokkain, mutta hankalimmin automatisoitavissa. Tarkoitus on löytää sopiva kombinaatio verkontiheyden ja approksimaation asteluvun välillä, käyttäen eri asteisilla muotofunktioilla toteutettuja elementtejä mallin eri osissa.

Voidaan myös lähteä etsimään optimisijoitusta solmuille. Tällöin verkko pyritään luomaan siten, että ne alueet, joiden ratkaisu on monimutkaisempi,

saavat tiheimmän verkon suhteessa mallin muihin alueisiin.

3 Eri versioiden vertailuesimerki

Seuraavassa tarkastellaan hiukan tarkemmin miltä konvergenssi näyttää, kun ratkaisu haetaan eri periaatteilla, käyttäen h-,p- ja hp-versiota. Testimalliksi on valittu sisäisen paineen kuormittama paksuseinäinen putki, koska siihen on saatavilla tarkka analyyttinen ratkaisu. Siirtymätila on lisäksi kohtuullisen vaikea ratkaista FEM:llä.

Analyyttinen ratkaisu on tässä tapauksessa sileä. Singulaarisuutta ei ole kunhan putken sisähalkaisija on suurempi kuin nolla.

3.3.1 Analyyttinen ratkaisu

Lasketaan paksuseinäisen sylinteriputken siirtymät ja venymät, kun putkea kuormittaa sisäinen paine. Ulkoinen paine oletetaan nolllaksi. Lähteessä /9 s.876-882/ on esitetty jännityksille ratkaisut

$$\sigma_r = \frac{a^2 \cdot p_s - b^2 \cdot p_u}{b^2 - a^2} - \frac{a^2 \cdot b^2 (p_s - p_u)}{r^2 \cdot (b^2 - a^2)}, \quad (3.6)$$

$$\sigma_t = \frac{a^2 \cdot p_s - b^2 \cdot p_u}{b^2 - a^2} + \frac{a^2 \cdot b^2 (p_s - p_u)}{r^2 \cdot (b^2 - a^2)}. \quad (3.7)$$

missä

σ_r on radiaali-jännitys,

σ_t on tangentiali-jännitys.

p_u on ulkoinen paine,

p_s on sisäinen paine,

a on putken sisäsäde ja

b on putken ulkosäde.

Jotta päästäisiin vertailemaan analyyttisiä tuloksia elementtimenetelmällä laskettuihin tuloksiin, lasketaan jännityksistä säteen suuntaiset siirtymät ja

venymät. Lähteestä /9 s.877 / saadaan

$$\epsilon = \frac{du}{dr}, \quad (3.8)$$

$$\frac{du}{dr} = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_r - \nu \cdot \sigma_t), \quad (3.9)$$

$$\frac{u}{r} = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_t - \nu \cdot \sigma_r). \quad (3.10)$$

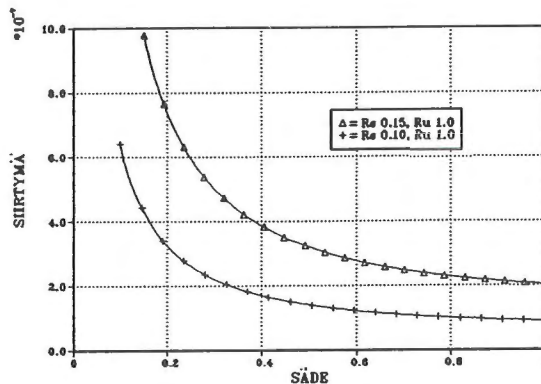
Kun sijoitetaan jännitysten kaavat (3.6-7) yhtälöihin (3.9-10) ja ratkaistaan säteen suuntainen siirtymä u , kun ulkoinen paine on nolla, saadaan

$$u = \frac{r \cdot p_s \cdot a^2}{E \cdot (b^2 - a^2)} \cdot \left[1 - \nu + (1 + \nu) \cdot \frac{b^2}{r^2} \right], \quad (3.11)$$

$$\epsilon_r = \frac{p_s \cdot a^2}{E \cdot (b^2 - a^2)} \cdot \left[1 - \frac{b^2}{a^2} + \nu \cdot \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right) \right]. \quad (3.12)$$

Piirtämällä elementtimenetelmällä lasketut tulokset samaan kuvaan analyyt-tisen ratkaisun kanssa saadaan hyvin näkyviin aproksimaation luonne. Kiin-nostavia seikkoja ovat h - ja p -versioiden erot, jotka ovat luonteeltaan pe-riaatteellisia. Lisäksi voidaan helposti huomata, miksi venymää tutkittaessa kannattaa käyttää integrointipisteissä laskettuja venymä.

Esimerkkitapauksena käytetään sylinteriputkea, jonka sisäsäde $a=0.1\text{m}$ ja ulkosäde $b=1.0\text{m}$. Valitut arvot antavat voimakkaasti kaartuvan käyrän ja erot approksimaatioiden käyttäytymisessä tulevat hyvin esiin. Siirtymätilan muoto kahdella sisäsäteen arvolla on esitetty kuvassa 3.1. Laskelmat on tehty tasovenymätilassa.



Kuva 3.1. Paksuuden vaikutus siirtymätilaan

Jännitystilaksi oletetaan tasovenymätila (TVT), joka vastaa sisäisen paineen kuormittaman pitkän putken jännitystilaa. Yllä olevissa kaavoissa sijoitetaan tällöin kimmokertoimen paikalle $\frac{E}{(1-\nu^2)}$ ja poissonin vakion paikalle $\frac{\nu}{(1-\nu)}$.

Laskenta-arvot ovat

$$E = 2.06 \cdot 10^5 \text{ MPa},$$

$$\nu = 0.3,$$

$$p_s = 1.0 \text{ Pa},$$

$$a = 0.1 \text{ m, ja}$$

$$b = 1.0 \text{ m}.$$

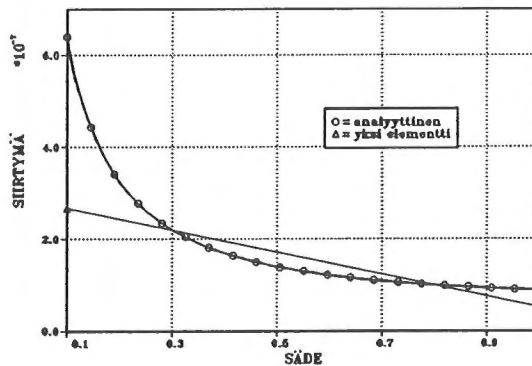
Laskenta on tehty käyttäen lähteessä /5/ johdettua rotaatiosymmetristä yksidimensionaalista putkielementtiä.

3.2 Putken siirtymätila laskettuna h-versiolla

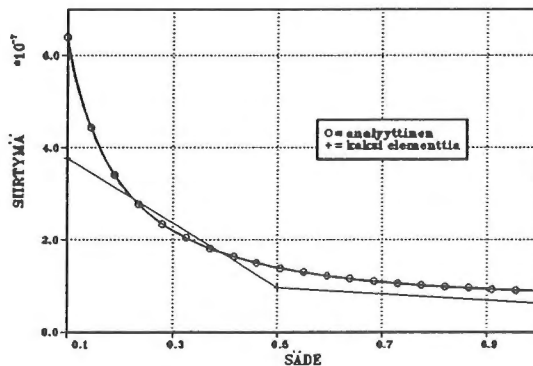
Siirtymätila laskettiin neljällä elementtijaolla. Elementti on lineaarinen kaksivapausasteinen yksidimensionoinen elementti. Kuvista 3.2-5 nähdään havainnollisesti miten lineaarinen approksimaatio minimointitehtävässä lähestyy tasan varmastasi oikeata ratkaisua. Jako on lähes tasainen, mikä heikentää konvergenssia. Analyttisestä ratkaisusta nähdään, että lähempänä sisäpin-taa tulisi käyttää tiheämpää jakoa, sillä siirtymätilan muodon muutos on

siellä voimakkaampi.

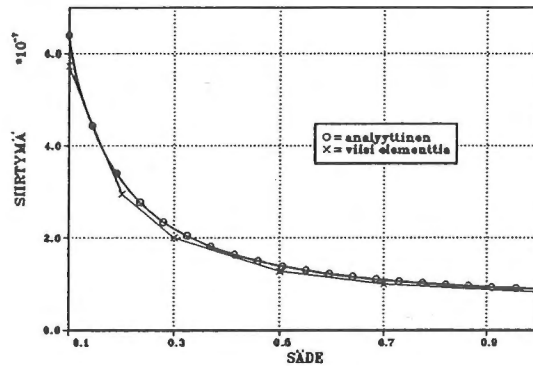
Tasajaolla tehty kymmenen elementin malli pystyy lähes täysin kuvaamaan ratkaisun. Sisäpisteen siirtymä jää liian pieneksi. Potentiaalienergian konvergenssi ($\Pi \sim p \cdot u^2$) näkyy suoraan sisäpisteen siirtymästä. 22 elementtiä antaa 0.8% pienemmän siirtymän analyttiseen verrattuna.



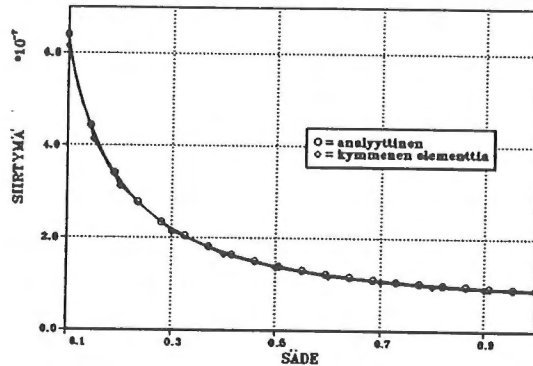
Kuva 3.2. Yksi lineaarinen elementti.



Kuva 3.3. Kaksi lineaarista elementtiä.



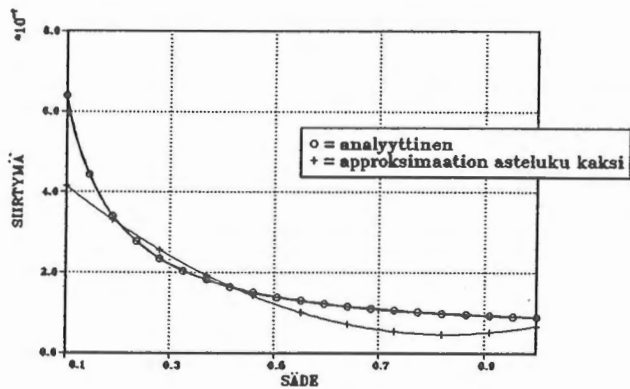
Kuva 3.4. Viisi lineaarista elementtiä.



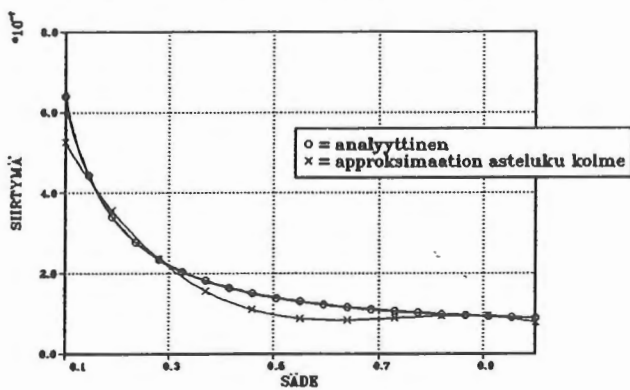
Kuva 3.5. Kymmenen lineaarista elementtiä.

3.3 Putken siirtymätila laskettuna p-versiolla

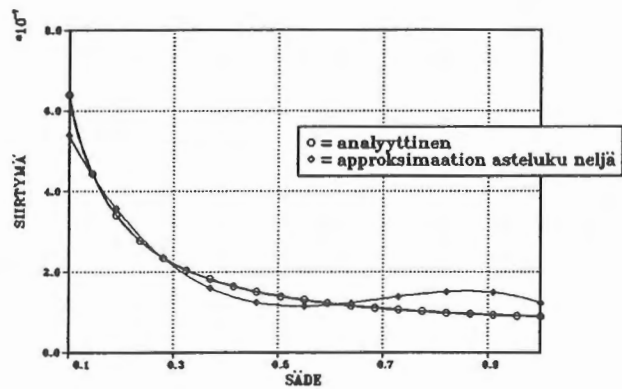
Putki on mallitettu yhdellä elementillä yli paksuuden. Analyttisestä ratkaisusta nähdään, että siirtymätila jakautuu kahteen dominoivaan osaan. Lähellä putken sisäpintaa siirtymätila on verrannollinen $1/r$:ään ja lähellä ulkopintaa siirtymätila on lineaarinen. Ratkaisu yhdellä p-tyyppin elementillä osoittautuikin yllättävän hankalaksi. Potentiaalienergian konvergenssi on voimakasta aina astelukuun kolme saakka. Siirtymätilan approksimaatio lineaarisella alueella rupeaa tämän jälkeen voimakkaasti heilahtelemaan. Mitä ilmeisimmin lineaarisen siirtymätilan vallitessa on tavallinen alhaisasteinen approksimaatio paras. Tulokset on esitetty kuvissa 3.6-9.



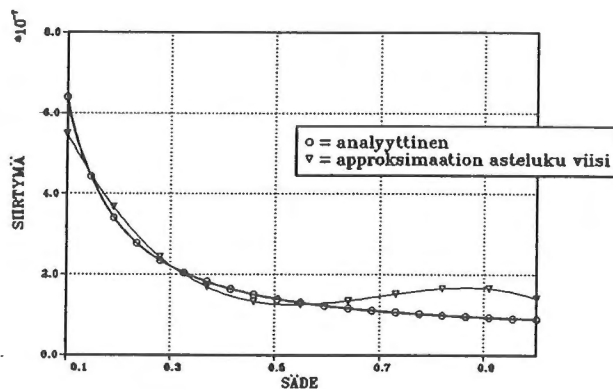
Kuva 3.6. Toisen asteen approksimaatio.



Kuva 3.7. Kolmannen asteen approksimaatio.



Kuva 3.8. Neljännen asteen approksimaatio.



Kuva 3.9. Viidennen asteen aproksimaatio.

Yksidimensioisessa tapauksessa mallin tarkennus p-versiossa on kuplafunktioiden lisäämistä elementtiin. Kuplafunktiot ovat elementin sisäisiä muotofunktioita. Yleensä elementeistä on riisuttu sisäiset muodot pois, sillä katsotaan niiden vaikuttavan vain vähäisesti tuloksiin. Kuplafunktiot tarkentavat ratkaisua elementin sisällä ja vaikutus globaalisti on heikompi kuin vapausasteiden lisäys rajapinnoille. Tästä johtuen voidaan havaita, että mallitettaessa putki tasomallilla on p-version konvergenssi hiukan nopeampaa.

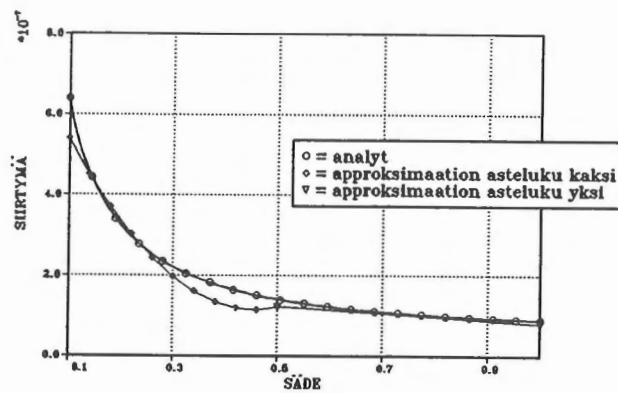
3.5 Putken siirtymätila laskettuna hp-versiolla

Hp-versio vaatii aina palautetta eri laskentakierrosten välillä, jotta tihennyksen tarve eri paikoissa voitaisiin jotenkin havaita.

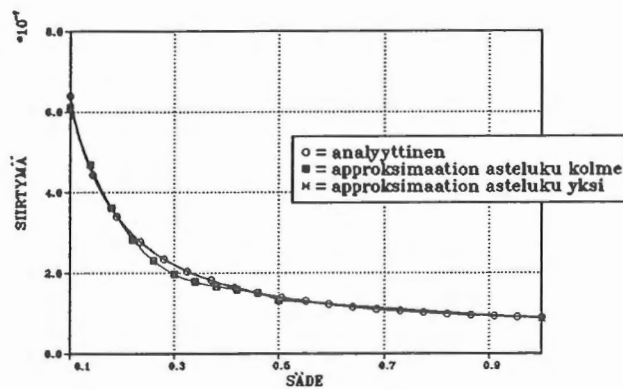
Nyt on tietenkin helppo toimia, koska tunnetaan analyttinen ratkaisu ja sitä voidaan suoraan käyttää hyväksi. Todellisuudessa jouduttaisiin laskemaan jännityksiä, energiatiheyksiä ja reunaehtojen toteutumisia mallin eri osissa.

Mallitus aloitetaan yhdellä lineaarisella elementillä. Toisessa vaiheessa käytetään kahta lineaarista elementtiä, jolloin havaitaan voimakas muutos sisäpisteiden siirtymässä verrattuna ensimmäiseen laskentaan. Kolmannessa vaiheessa nostetaan sisemmän elementin muotofunktion astelukua. Siirtymä kasvaa jälleen huomattavasti verrattuna toiseen laskenta kierrokseen. Neljännessä

vaiheessa nostetaan edelleen sisemmän elementin muotofunktion astelukua. Tulos on jo hyvin lähellä analyyttistä koko matkalla. Tulokset on esitetty kuvissa 3.2 ja 3.10-11.



Kuva 3.10. Toisen asteen approksimaatio ja lineaarinen approksimaatio.



Kuva 3.11. Kolmannen asteen approksimaatio ja lineaarinen approksimaatio.

3.6 Verkon optimointi

Edellä esitetyt menetelmät eivät muuta alunperin valitun verkon luonnetta. P-versiossa verkko ei muutu lainkaan. H-versiossa uusi verkko muodostetaan vanhasta mekaanisesti jakamalla yksittäiset elementit koko mallin alueella. Hp-versio on tuloksin varainen, mutta yksinkertaisesti ajatellen osa-alueilla noudatetaan erikseen valittua periaatetta.

Kaavojen (2.4-5) osoittama konvergenssinopeus osoittaa juuri sen nopeuden, mikä saavutetaan h- tai p-versiolla. Konvergenssinopeutta voidaan huomattavasti nopeuttaa huomioimalla ratkaistavan ongelman erityisluonne ja muodostamalla verkko sen mukaisesti. Käytännössä tämä tarkoittaa sitä, että samalla vapausastemäärällä saadaan eri tuloksia.

Jatketaan putkimallin käsittelyä. Käytetään nyt kaksidimensionaalista tasomallia ja kahdeksansolmuisia levyelementtejä.

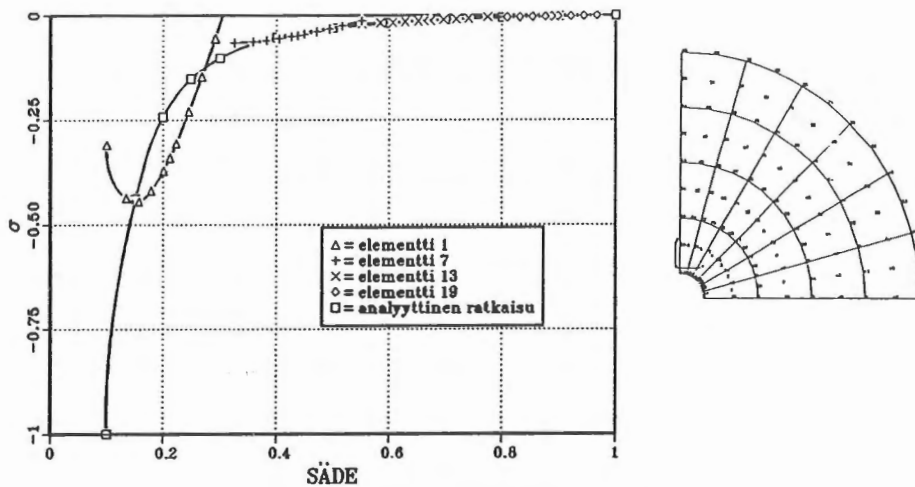
Putki mallitettiin tasovenymätilassa 1/4-mallilla. Elementtejä oli kehän suunnassa kuusi ja paksuussuunnassa neljä. Optimoinnissa pyrittiin sidotulla vapausastemäärällä hakemaan paksuussuuntaan verkolle hyvä muoto. Johtopäätökset tehtiin silmämääräisesti graafisista tuloksista.

Laskenta tehtiin muutamilla verkoilla käyttäen PATRAN ohjelmaa mallin generoimiseen. Mallin tihennys tehtiin siten, että ensimmäisen ja viimeisen elementin suhde määrättiin generointikäskyssä /6/.

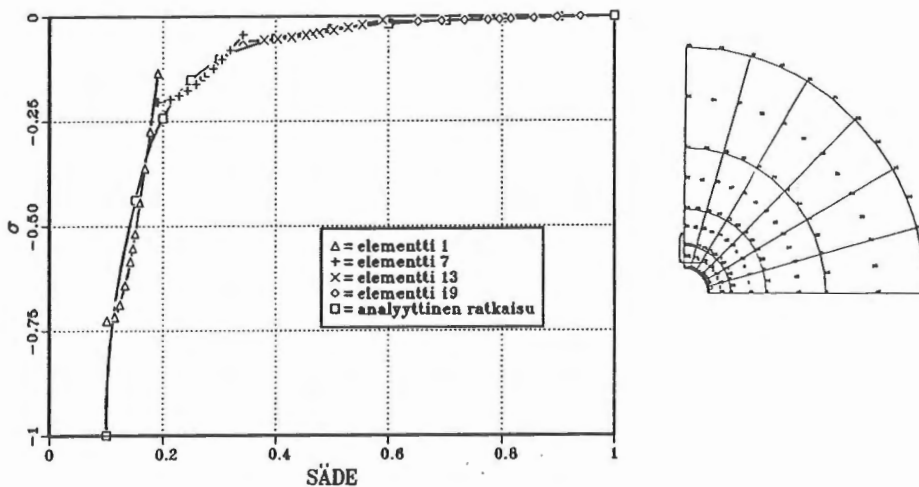
verkko	sisimmän ja uloimman elementin suhde	
1	1.0	tasajako
2	4.5	ensimmäinen 'tihennys'
3	12.0	toinen 'tihennys'

Tulokset on esitetty kolmelle eri verkolle. Tarkkuutta ei ole analysoitu kuvis-
sa muuten kuin vertaamalla radiaalijännitystä analyttiseen tulokseen. Elementtimenetelmän tulokset on laskettu elementtikohtaisesti pitkin elementtien reunaa.

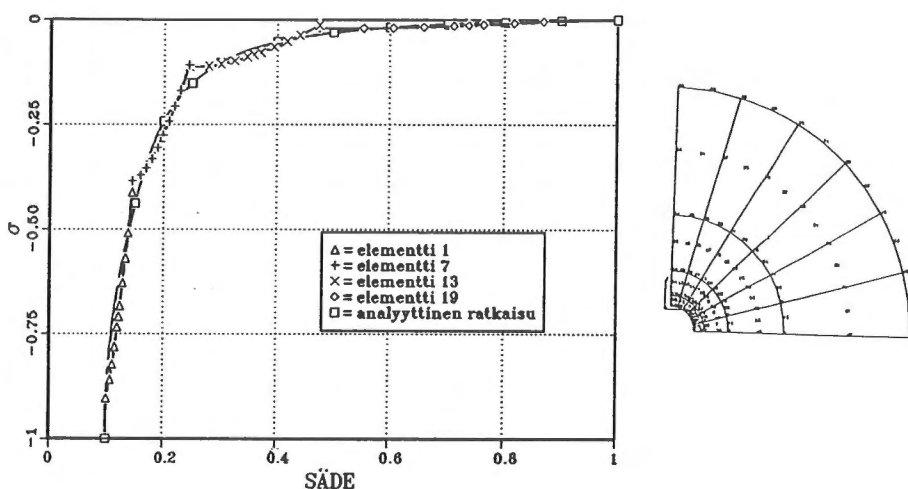
Kuvista 3.12-14 näkyy hyvin miten ratkaisu verkon optimoinnin mukaan lähestyy oikeata ratkaisua. Jännityksen jatkuvuuden toteutuminen mallin parantuessa on ilmeinen. Samoin nähdään, että elementtiratkaisun antama jännitys kuormasivulla lähestyy todellista arvoa mallia optimoitaessa. Solmujen sijoituksella huomattava merkitys tarkkuuteen. Tyypillisimpiä sovel-luskohteita ovat olleet särömallit, joissa mallia tihennetään kohti särön kär-keä. Tihennyksen käyttö ilman asiantuntemusta tai sopivaa indikaattoria on kuitenkin vaikeata.



Kuva 3.12. Mallin yksi tulokset.



Kuva 3.13. Mallin kaksi tulokset.



Kuva 3.14. Mallin kolme tulokset.

4 KÄYTÄNNÖN ONGELMAT

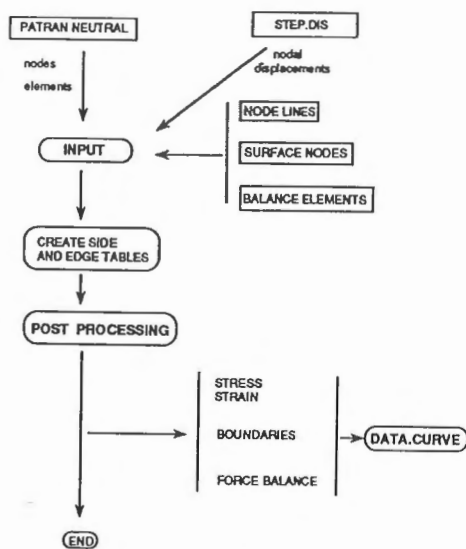
H-versiota ja optimointia voisi helposti käyttää jo nykyisillä ohjelmilla, mutta tulosten arvointi on liian vaivalloista, jotta käytännön laskennassa menetelmiä voitaisiin johdonmukaisesti soveltaa. Erityisesti tilavuusmalleissa olisi pakko saada kunnollinen palaute ratkaisusta, sillä puhtaan h-version käyttö johtaa malleihin, joiden koko tekee nopeasti mallin tulosten käsittelyn mahdottomaksi. Tihennys läpi koko mallin on karkeaa laskentaa verrattuna verkon optimointiin. Monimutkaisen tilavuusmallin tarkastelu visuaalisesti nykyisillä jälkikäsitteijöillä on vaivalloista, vaikka laskentakapasiteettia olisikin riittävästi käytössä. Erillaiset piiloviiva- ja pintakuvat helpottavat laskijan työtä, mutta useiden suurten mallien käsittely on aikaa vievää työtä, johon kenelläkään ei liene kiinnostuusta.

Kaupallisiin ohjelmiin on odotettavissa adaptiivisia ominaisuuksia. Useimmat kokeilut on tehty h-versiolla, kohdistuen tihennykset kriittisille alueille (esim. /2/). P-versioon perustuvia kaupallisia ohjelmia on esitelty vain PROBE /3/. P-version eksoottisuus ja epäilyt sen toimivuudesta lienevät syynä siihen, ettei menetelmä tule nopeasti yleistymään. Sillä on kuitenkin etuja, jotka tekevät laskennan kokonaisuutena helpoksi. Mallin geometrian määrittäminen yksinkertaistuu (eli tilanne on sama, jos h-version tihennys

tehdään ohjelmassa analyysin ajaksi) ja tihennys on helpompi automatisoida. Nopeamman konvergenssin pitäisi antaa paremmat tulokset pienemmällä vapausastemäärällä.

Ongelma on jakaantunut kahteen osaan. Toisaalta etsitään hyvää ja luotettavaa parametria, jolla voidaan arvioida ratkaisun tarkkuutta, ja toisaalta kehitetään verkon generointimenetelmää, jolla mallin verkkoa muokataan, kun tavoitellaan tarkempaa ratkaisua.

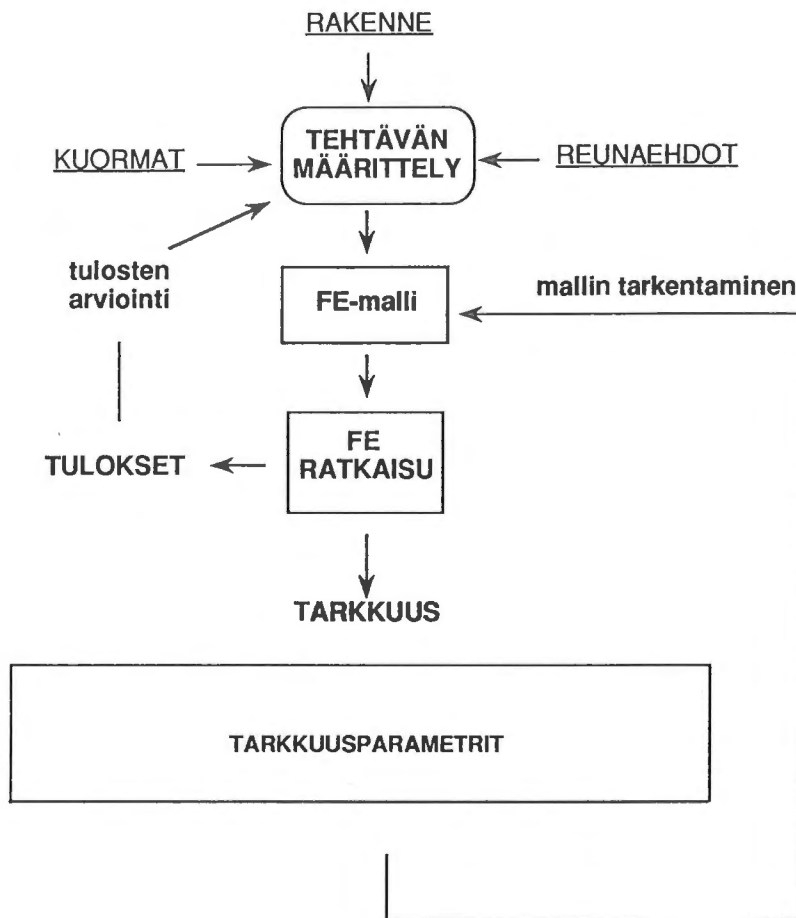
OHJELMAN RAKENNE



Kuva 4.1. POST3D-ohjelman toiminta/4/.

VTT:n Rakenneanalyysi (Ra) -tutkimusohjelmassa (1989-1991) kehitetään rakenneanalyysien laadunvarmistusta ja automatisointia. Tähän liittyen on VTT:n Ydinvoimatekniikan laboratoriossa kehitetty ohjelma POST3D elementtitulosten tarkkuuden arviointiin. Ohjelmalla voidaan analysoida FE-mallin toimivuutta ja havaita mallin kriittiset alueet. Ohjelman toiminta-kaavio on kuvassa 4.1. Laskennan tuloksia käsitellään mallin geometrian ja solmusiirtymien perusteella ja analyysi voidaan tehdä millä tahansa FE-ohjelmalla. Syöttötietoina annetaan mallin geometria ja siirtymät. Ohjel-

ma laskee suoraan siirtymistä approksimaation mukaiset elementikohtaiset tulokset halutuille elementeille, pinnoille ja särmille. Ohjelma tulostaa arvot lähtötiedoiksi graafiselle ohjelmalle, jonka avulla laskija voi tarkastella reunaehtoien toteutumista, elementtien voimatasapainoa ja venymien sekä jännitysten jatkuvuutta elementtien rajoilla.



Kuva 4.2. Elementtiratkaisun hakeminen.

Tavoitteeksi elementtilaskennalle voidaan asettaa automatisointi, jossa ratkaisun tuloksista laskettuja suureita käytetään suoraan integroidusti verkon uudelleen muodostamiseen. Kuvassa 4.2 on esitetty yksi toimintamalli las-

kennan etenemisestä. Laskennan ei tarvitse olla automaattista. Laskennassa on otettu käyttöön uusi lähestymistapa, joka johtaa vähintään kahden ratkaisun muodostamiseen. Lineaarisella alueella tämä ei liene ongelma, mutta epälineaarisessa laskennassa ratkaisuaikat ja tulosten suuri määrä rajoittavat tarkastelun lineaariselle alueelle.

Peruslähtökohdat elementtiratkaisun tarkentamiselle on löydetty. Menetelmät, joilla verkkoa voidaan tihentää, rajoittuvat vielä suppeisiin sovelluskohteisiin, mutta perusideat on oivallettu. Työtä menetelmien tuomiseksi käytännön laskentaan tehdään myös VTT:n Ra-tutkimusohjelman puitteissa.

LÄHDELUETTELO

- /1/ Babuška, Ivo, Szabo, Barna, On the rates of convergence of the finite element method, International journal for Numerical methods in engineering, 1982. Vol 18, No. 3, pp. 323-341. ISSN 0029-5981.
- /2/ Chae, S., Bathe, K., On automatic mesh construction and mesh refinement in finite element analysis. Int. J. Computers & Structures, 1989. Vol 32, No.3/4, pp. 911-936.
- /3/ Gupta, S., Taylor, B., Control of the error of diskretization and idealization in the new p-version finite element program, PROBE. In: Supercomputer applications in automotive research and engineering development. Minnesota, Minneapolis: Cray Research, Inc., 1988. pp.405-428.
- /4/ Niemi, H., 20 solmuisen kontinuumielementin jälkikäsitteilyohjelma POST3D, VTT Ydinvoimatekniikan laboratorio, 1989. Työraportti RAMEK-1/89. 6 s.
- /5/ Niemi, H., Elementtimenetelmän ratkaisun tarkkuuden arviointikriteerit ja niiden käyttö tulosten tarkentamiseen. Diplomityö, Helsingin teknillinen korkeakoulu, koneinsinööriosasto. Espoo, 1989. 103s.

- /6/ PATRAN Release 2.3A. PDA Engineering, California.
- /7/ Rikkonen, H., Matematiikan pitkä peruskurssi V., Vektorimuuttujan funktioiden differentiaalilasku, kolmas painos. Espoo: Otapaino, 1977. 143 s. ISBN 951-671-030-1
- /8/ Szabo, B., Estimation and control of error based on p convergence. In: Accuracy estimates and adaptive refinements in finite element computations. Great Britain: John Wiley and Sons, 1986. s.61-78 ISBN 0 471 90862 2.
- /9/ Ylinen, A., Kimmo- ja Lujuusoppi II, toinen painos, Porvoo: WSOY, 1970. s. 477-1010.
- /10/ Zienkiewicz, O., The Finite Element Method, third edition, Kent: Whitstable, 1986. 787 p. ; ISBN 0-07-084072-5
- /11/ Zienkiewicz, O., Morgan, K. Finite Elements and Approximation. USA: John Wiley & Sons, 1982. s. 328 ; ISBN 0-471-98240-7.
- /12/ Zienkiewicz, O., Craig, A., Adaptive Refinement, Error Estimates, Multigrid Solution, and Hierarchic Finite Element Method Concepts. In: Accuracy estimates and adaptive refinements in finite element computations. Great Britain: John Wiley and Sons, 1986. s. 25-59 ISBN 0 471 90862 2.
- /13/ Zienkiewicz, O., Zhu, J., A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis, International journal for Numerical methods in engineering, 1987. Vol 24. ISSN 0029-5981.

DI Hannes Niemi, VTT, Ydinvoimatekniikan laboratorio