

# ADAPTIIVISUUDESTA JA SIIRTYMÄSUUREIDEN JÄLKIKÄSITTELYSTÄ SEKAELEMENTTIMENETELMÄSSÄ

Reijo KOUHIA

Rakenteiden Mekaniikka, Vol. 22

No 4 1989, s. 3-12

**TIIVISTELMÄ:** Artikkelissa käsitellään taivutetun palkin malliprobleeman avulla yksinkertaisen adaptiivisen prosessin ominaisuuksia. Stenbergin esittämää elementtikoh-  
taisesti suoritettavaa taipuman jälkikäsittelemenetelmää on sovellettu ja sen tarkkuutta  
on tutkittu numeerisesti.

## JOHDANTO

Taivutetun ohuen palkin Hellingerin-Reissnerin funktionaali on

$$\Pi_R(M, v) = -\frac{1}{2} \int_0^L \frac{M^2}{EI} dx - \int_0^L v'' M dx - \int_0^L \bar{p} v dx, \quad (1)$$

$EI$  on palkin taivutusjäykkyys,  $\bar{p}$  annettu palkin akselia vastaan kohtisuora kuormitus  
ja  $M$  taivutusmomentti. Taipuman  $v$  on toteutettava geometriset reunaehdot. Pilkku  
symbolin oikeassa yläkulmassa merkitsee derivointia paikkakoordinaatin  $x$  suhteen.  
Funktionaalin (1) diskreetti muoto on

$$\Pi_R(\mathbf{m}, \mathbf{v}) = -\frac{1}{2} \mathbf{m}^T \mathbf{H} \mathbf{m} + \mathbf{v}^T \mathbf{C} \mathbf{m} - \mathbf{v}^T \bar{\mathbf{p}}, \quad (2)$$

jossa  $\mathbf{m}$  on taivutusmomenttien solmupistearvoista koostuva vektori ja vastaavasti  
 $\mathbf{v}$  taipumien vektori ja  $\bar{\mathbf{p}}$  kuormitusvektori. Positiivisesti definiitti joustomatriisi  $\mathbf{H}$   
koostuu elementtimatriiseista

$$H_{ij}^e = \int_{I^e} \frac{\psi_i \psi_j}{EI} dx, \quad (3)$$

jossa  $\psi_i$ :t ovat taivutusmomentin approksimaatiossa käytetyt muotofunktiot. Tasapai-  
nomatriisin  $\mathbf{C}$  alkiot

$$C_{\alpha i}^e = - \int_{I^e} \varphi_{\alpha}'' \psi_i dx, \quad (4)$$

jossa  $\varphi_{\alpha}$ :t ovat taipuman muotofunktiot, voidaan saattaa osittaisintegroimalla muotoon

$$C_{\alpha i}^e = \int_{I^e} \varphi_{\alpha}' \psi_i' dx, \quad (5)$$

lisättyinä mahdollisilla sijoitustermeillä alueen reunoilta. Mikäli elementtimenetelmäformulaatiossa käytetään tasapainomatriisin muotoa (4), on taipuman muotofunktiot valittava  $C^1$  jatkuvien funktioiden luokasta, mutta vastaavasti momentin approksimaatio saa olla paloittain jatkuva, kun taasen muodon (5) käyttö vaatii molemmilta approksimaatioilta  $C^0$  jatkuvuutta.

Satulapintafunktionaalia (2) käyttäen voidaan problema asettaa muodossa: etsi  $m$  ja  $v$  siten, että

$$\min_v \max_m \Pi_R(m, v), \quad (6)$$

jolloin sen ratkaisu, satulapiste, saadaan funktionaalin (2) stationaarisuusehdosta

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{H} & \mathbf{C}^T \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} m \\ v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \bar{p} \end{Bmatrix}. \quad (7)$$

Jos taivutusmomentin approksimaatio saa olla elementtikohtaisesti paloittain jatkuva, on matriisi  $\mathbf{H}$  blokkidiagonaalinen, eli sen vapausasteet eri elementeistä eivät kytkeydy toisiinsa. Tätä ominaisuutta voidaan tehokkaasti käyttää hyväksi systeemin iteratiivisessa ratkaisussa [2]. Tähän seikkaan ei tässä esityksessä kuitenkaan puututa.

Jatkossa käytetään tasapainomatriisille muotoa (5) ja taipumaa sekä taivutusmomenttia approksimoidaan lineaarisilla muotofunktiolla.

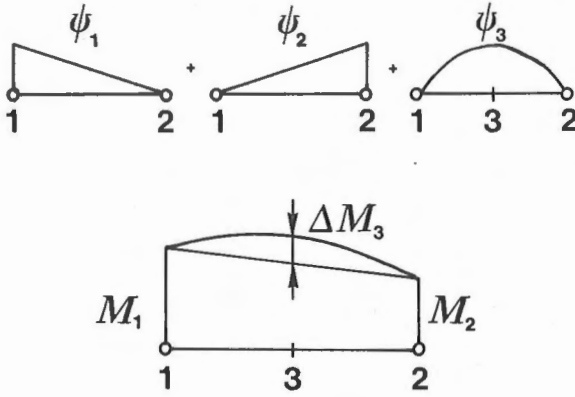
## ADAPTIIVISUUDESTA

Pyrittäessä etsimään niitä elementtiverkon osia, joissa ratkaisun tarkkuus ei toteuta analysoijan toiveita tarvitaan tietoa virheen jakautumisesta ratkaisualueessa. A posteriori virhe-estimaatteja hyväksikäyttäen voidaan arvioida saadun elementtimenetelmäratkaisun virhettä. Kun virheen jakautumisesta ja sen suuruudesta on saatu arvio, on seuraavana probleemana miten jo tiedossa olevaa approksimaatiota on parannettava, jotta mahdollisimman tehokkaasti saavutettaisiin haluttu tarkkuus. Elementtimenetelmissä on käytetty kolmea erilaista perusmenetelmää ratkaisun tarkkuuden parantamiseksi. Adaptiivisessa h-menetelmässä elementin kokoa pienennetään siellä missä virhe on suurin, kun vastaavasti adaptiivisessa p-menetelmässä polynomiapproksimaation astetta kasvattamalla päädytään parempaan tulokseen. Kolmannessa vaihtoehdossa, r-menetelmässä elementtien lukumäärä ja approksimaation aste pidetään muuttumattomana, mutta solmupisteiden paikkaa muuttamalla pyritään kohti optimaalisempaa elementtiverkkoa. Tämä menettely johtaa kuitenkin epälineaarisen yhtälösystemin

ratkaisuun vaikka itse ratkaistava probleema olisi lineaarinen, joten se on useimmissa tapauksissa epäkäytännöllinen tapa numeerisen ratkaisun parantamiseen. Näistä perusmenetelmistä voidaan myös muodostaa yhdistettyjä algoritmeja. Tässä artikkelissa keskitytään pelkästään h-menetelmään. Sekaelementtimenetelmässä on kuitenkin tavanomaiseen siirtymämenetelmään verrattuna useampia mahdollisuuksia suorittaa a posteriori virhearviointi ja tästä pääteltävä elementtiverkon hienonnus.

Yhtenä sekamenetelmien etuna on voimasuureiden approksimaation tarkkuus, voimasuureita voidaankin pitää primaarisina suureina ja siirtymiä sekundaarisina. Siten tuntuu varsin luonnolliselta seuraava numeerisissa kokeiluissa havaittu seikka: tihennysprosessit jotka perustuvat virhe-estimaattiin voimasuureiden suhteen ovat tehokkaampia kuin menetelmät joissa verkon hienonnus suoritetaan siirtymäsuureista saadun informaation perusteella.

Mahdollisimman yksinkertainen a posteriori virhe-estimaatti saadaan käyttämällä lisänä hierarkista muotofunktiota  $\psi_3$  (kuva 1).



KUVA 1. Muotofunktiot.

Hierarkisilla vapausasteilla ei ole kytkentää eri elementtien välillä, joten ne voidaan eliminoida elementtikohtaisesti, jolloin virheen estimointi ei ole työläs toimenpide. Otaksutaan nyt, että tietyllä elementtiverkolla on saatu ratkaistuksi solmupiste- $\mathbf{m}_S$  ja  $\mathbf{v}_S$  (vastaten lineaarisia perusmuotofunktioita). Stationaarisuusehdon (7) alemmasta yhtälöstä, tasapainoyhtälöstä, voidaan ratkaista taivutusmomentin muutokset  $\mathbf{m}_H$ :

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{H}_{SS} & -\mathbf{H}_{SH} & \mathbf{C}_{SS}^T & 0 \\ -\mathbf{H}_{HS} & -\mathbf{H}_{HH} & 0 & \mathbf{C}_{HH}^T \\ \mathbf{C}_{SS} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{C}_{HH} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{m}_S \\ \mathbf{m}_H \\ \mathbf{v}_S \\ \mathbf{v}_H \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{\mathbf{p}}_S \\ \bar{\mathbf{p}}_H \end{Bmatrix},$$

$$\mathbf{m}_H = \mathbf{C}_{HH}^{-1} \bar{\mathbf{p}}_H. \quad (8)$$

Alaindeksi  $S$  viittaa lineaarisiin perusmuotofunktioihin ja  $H$  parabolisiin hierarkisiin lisämuotofunktioihin. Virhe-estimaatti elementissä  $e$  voidaan määrittellä lausekkeella

$$E^e = \sqrt{\int_{I^e} \psi_3^2 dx (\Delta M_3)^2}, \quad (9)$$

jolloin virhe koko ratkaisualueella on

$$E = \sqrt{\sum_e (E^e)^2}. \quad (10)$$

Elementtimenetelmäratkaisu on hyväksyttävä jos

$$E < \varepsilon \|M\|, \quad \|M\| = \sqrt{\int_0^L M^2 dx}, \quad (11)$$

jossa  $\varepsilon$  on analysoijan asettama virheen toleranssi ja  $M$  on taivutusmomentin approksimaatio sisältäen hierarkisen lisäyksen.

Mikäli ehto (11) ei toteudu, on elementtiverkkoa tihennettävä. Pyrkimyksenä on optimaalinen elementtiverkko, jolloin virhe  $E$  on tasan jakautunut eri elementeille [1, 3]. Suoritetaan hienonnus siten, että ne elementit joissa [1]

$$E^e \geq \Lambda \max_e E^e, \quad 0 \leq \Lambda \leq 1. \quad (12)$$

jaetaan kahteen uuteen elementtiin. Kun  $\Lambda = 0$  on kyseessä tasainen tihennys, ja jos  $\Lambda = 1$  jaetaan vain elementti jossa on suurin virhe-estimaatti (mahdollisesti useampikin).

## SIIRTYMÄSUUREIDEN JÄLKIKÄSITTELYSTÄ

Stenberg [5] on esittänyt yksinkertaisen tavan parantaa taipuman approksimaatiota elementtikohtaisella jälkikäsitteilyllä. Tarkastellaan elementtiä  $e$ , jossa taipuman  $v$  parannettu approksimaatio olkoon  $v^*$  ja joka ratkaistaan virtuaalisen työn yhtälöstä

$$\begin{aligned} v^*(x_1) &= v_1^* = v_1 \\ v^*(x_2) &= v_2^* = v_2 \\ \int_{x_1}^{x_2} EI v^{*''} \delta v^{*''} dx &= \int_{x_1}^{x_2} \bar{p} \delta v^* dx + \left[ M' \delta v^* - M \delta v^{*'} \right]_{x_1}^{x_2}. \end{aligned} \quad (13)$$

Testifunktiot eli virtuaaliset siirtymät  $\delta v^*$  kuuluvat samaan polynomifunktioiden joukkoon kuin  $v^*$ , ja jotka voivat olla esimerkiksi Hermiten kuubiset polynomit

$$\begin{aligned} \varphi_1(\xi) &= L_1^2(1 + 2L_2), \\ \varphi_2(\xi) &= 2L_1^2L_2, \\ \varphi_3(\xi) &= L_2^2(1 + 2L_1), \\ \varphi_4(\xi) &= -2L_1L_2^2, \end{aligned} \quad (14)$$

jossa  $L_1 = \frac{1}{2}(1 - \xi)$  ja  $L_2 = \frac{1}{2}(1 + \xi)$ , eli lineaariset perusuotofunktiot, ja  $\xi = 2(x - x_c)/h^e$ ,  $x_c = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ , ja  $h^e = x_2 - x_1$ , jolloin

$$v^*(x) = \varphi_1(x)v_1 + \frac{h^e}{2}\varphi_2(x)v_1^{*'} + \varphi_3(x)v_2 + \frac{h^e}{2}\varphi_4(x)v_2^{*'}, \quad (15)$$

Parametrit  $v_1^{*'}$  ja  $v_2^{*'}$  voidaan ratkaista yhtälöstä

$$\begin{bmatrix} a(\varphi_2, \varphi_2) & a(\varphi_2, \varphi_4) \\ a(\varphi_4, \varphi_2) & a(\varphi_4, \varphi_4) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1^{*'} \\ v_2^{*'} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (\bar{p}, \varphi_2) + M_1 - a(\varphi_2, \varphi_1)v_1 - a(\varphi_2, \varphi_3)v_2 \\ (\bar{p}, \varphi_4) - M_2 - a(\varphi_4, \varphi_1)v_1 - a(\varphi_4, \varphi_3)v_2 \end{Bmatrix}. \quad (16)$$

Edellä on käytetty lyhennysmerkintöjä

$$\begin{aligned} a(\varphi_\alpha, \varphi_\beta) &= \int_{x_1}^{x_2} EI\varphi_\alpha''\varphi_\beta''dx, \\ (\bar{p}, \varphi_\alpha) &= \int_{x_1}^{x_2} \bar{p}\varphi_\alpha dx. \end{aligned} \quad (17)$$

Jälkikäsitellyistä taipumasta  $v^*$  määritettyjä momenttien arvoja  $M^* = -EIv^{*''}$  voidaan käyttää hyväksi a posteriori virheen arvioinnissa. Taivutusmomentin virheestimaatti elementissä  $e$  olkoon

$$E^{*e} = \sqrt{\int_{I^e} (M^* - M)^2 dx}, \quad (18)$$

jossa  $M$  on lineaaristen perusuotofunktioiden avulla määritetty taivutusmomentti ja

$$E^* = \sqrt{\sum_e (E^{*e})^2}. \quad (19)$$

Jälkikäsitellyä voidaan suorittaa myös käyttäen parabolista muotofunktiota  $\varphi_3 = 4L_1L_2$ , jolloin

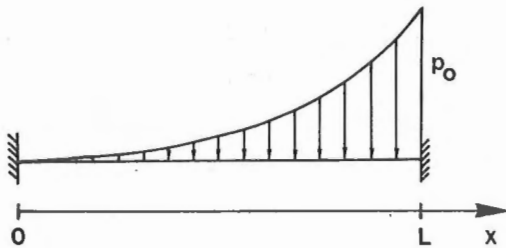
$$v^*(x) = L_1(x)v_1 + L_2(x)v_2 + \varphi_3(x)\Delta v_3^*. \quad (20)$$

Parametri  $\Delta v_3^*$  voidaan nyt määrittää yhtälöstä

$$a(\varphi_3, \varphi_3)\Delta v_3^* = (\bar{p}, \varphi_3) + \frac{M_1 + M_2}{h^e}. \quad (21)$$

## ESIMERKKI

Tarkastellaan kuvan 2 mukaista päistään jäykästi kiinnitettyä palkkia, johon vaikuttaa kolmannen asteen polynomin muotoisesti jakautunut poikittainen kuorma [4].



KUVA 2. Jäykästi kiinnitetty tasajäykkä palkki,  $p(x) = p_0(x/L)^3$ .

Kuvissa 3 ja 4 on esitetty keskimääräisen elementin koon funktiona taivutusmomentin ja jälkikäsitellyn taipuman suhteellinen virhe  $e_r(M)$  ja  $e_r(v^*)$  sekä taipuman suhteellinen virhe  $\bar{e}_r(v)$  mitattuna pelkästään solmupisteissä maksiminormin mielessä

$$e_r(M) = \frac{\sqrt{\int_0^L (M_{ex} - M)^2 dx}}{\sqrt{\int_0^L M_{ex}^2 dx}},$$

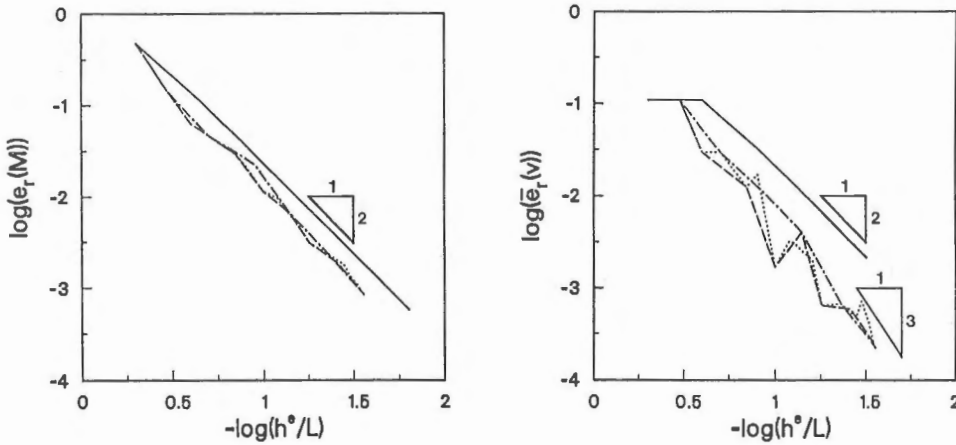
$$e_r(v^*) = \frac{\sqrt{\int_0^L (v_{ex} - v^*)^2 dx}}{\sqrt{\int_0^L v_{ex}^2 dx}},$$

$$\bar{e}_r(v) = \frac{\max |v_{ex}(P) - v(P)|}{\max |v_{ex}(P)|}, \quad P \text{ solmupiste,}$$

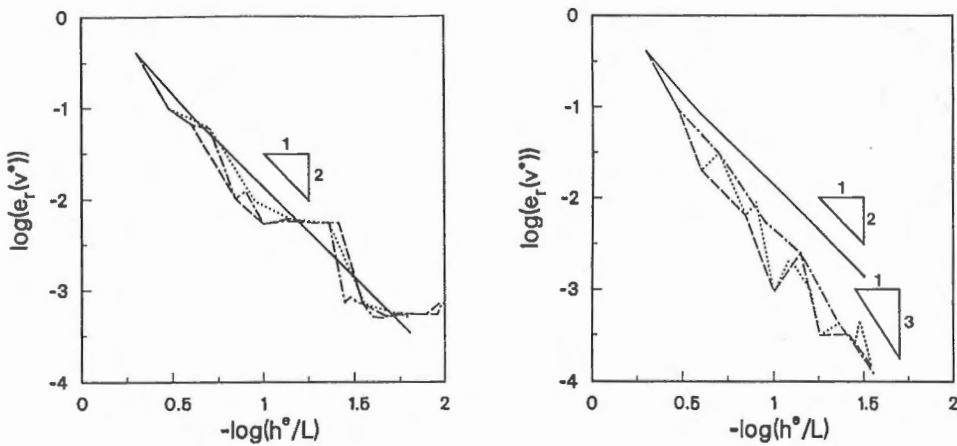
jossa  $M_{ex}$  ja  $v_{ex}$  ovat taivutusmomentin ja taipuman tarkat ratkaisut, huomaa  $\bar{e}_r(v) = \bar{e}_r(v^*)$ . Taivutusmomentin suppenemismuutos on kvadraattinen, joka on optimaalinen tulos lineaariselle approksimaatiolle. Kuvasta havaitaan myös, että adaptiivisessa analyysissä taipuman jälkikäsitely parantaa tarkkuutta huomattavasti, lukuunottamatta harvinta verkkoa jossa oli kaksi elementtiä. Suhteellisen alhainen tihennysparametrin arvo  $\Lambda = 0,3$  antaa tässä esimerkissä parhaimman tuloksen, joka johtune ratkaisun sileydestä. Huomautettakoon, että ratkaisun ollessa sileä saavutettaisiin p-menetelmällä optimaalinen tulos ja että adaptiivisella h-menetelmällä ei ole vaikutusta momentin asympotoottiseen suppenemisnopeuteen. Kuvissa 5a-d on esitetty jälkikäsitellyn ja käsittelemättömän taipuman suppenemistä eri tihennysparametrin arvoilla. Kuvien 3, 4 ja 5 adaptiiviset laskelmat perustuvat virhe-estimaattiin (9). Estimaatin (18) käyttö johtaisi samanlaisiin tuloksiin

TAULUKKO 1. Taipuman ja taivutusmomentin suhteelliset virheet kuvan 8 adaptiivisesta prosessista,  $N$  on elementtien lukumäärä.

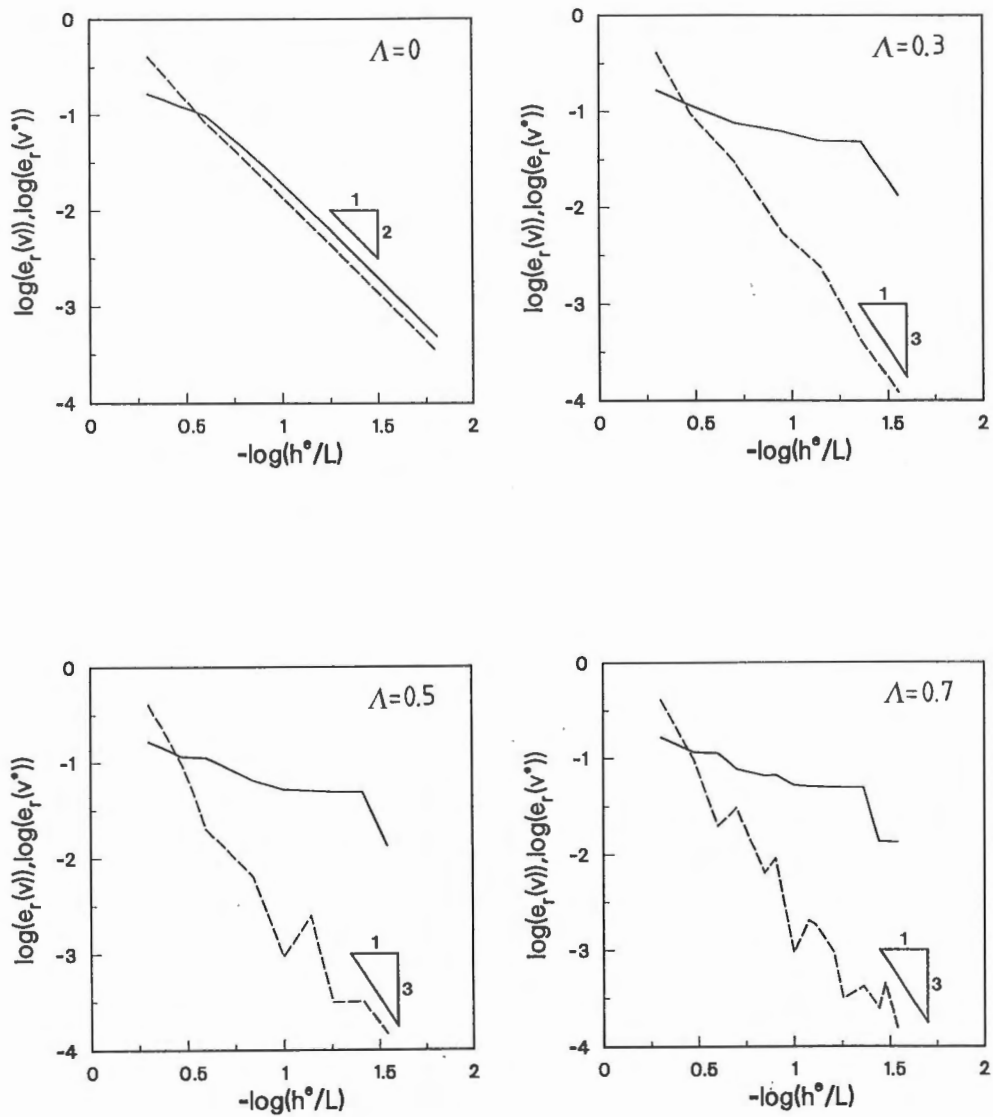
N	$e_r(v)$	$e_r(v^*)$		$\bar{e}_r(v)$	$e_r(M)$
		kuubinen	parabolinen		
2	16,62 %	40,89 %	41,42 %	7,14 %	47,98 %
3	11,51 %	9,46 %	10,02 %	7,14 %	14,18 %
5	7,66 %	3,05 %	6,19 %	1,95 %	4,64 %
9	6,25 %	0,54 %	0,96 %	0,64 %	2,25 %
14	5,02 %	0,25 %	0,62 %	0,26 %	0,66 %



KUVA 3. Taivutusmomentin ja sekä taipuman solmupistearvojen suppeneminen keskimääräisen elementin pituuden funktiona. Yhtenäinen viiva  $\Lambda = 0$ , eli tasainen tihennys, pistekatkoviiva  $\Lambda = 0,3$ , katkoviiva  $\Lambda = 0,5$  ja pisteviiva  $\Lambda = 0,7$ .

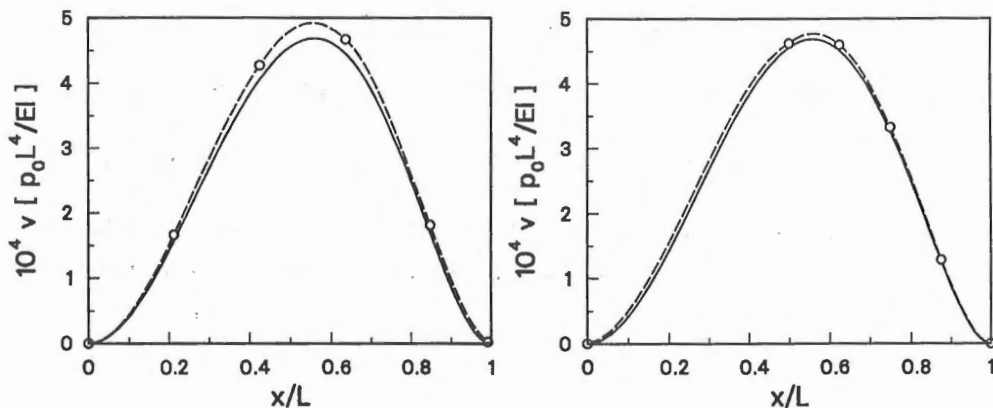


KUVA 4. Jälkikäsitellyn taipuman virhe  $e_r(v^*)$  keskimääräisen elementin pituuden funktiona käyttäen parabolista (vasemmalla) ja kuubista (oikealla) approksimaatiota. Viivatyyppien merkitys sama kuin kuvassa 3.

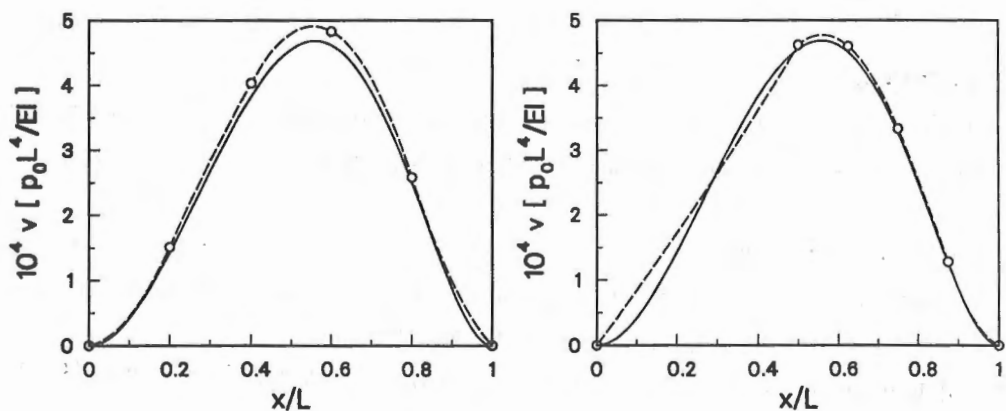


KUVA 5. Jäkikäsitellyn  $v^*$  (katkoviiva) ja käsittelemättömän  $v$  (yhtenäinen viiva) taipuman suhteellinen virhe,  $\Lambda = 0; 0,3; 0,5$  ja  $0,7$ .

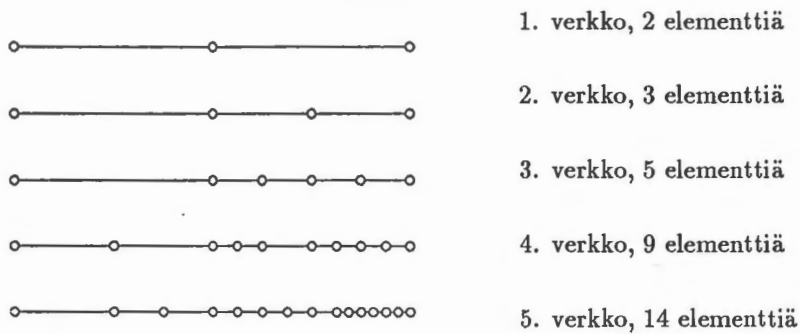




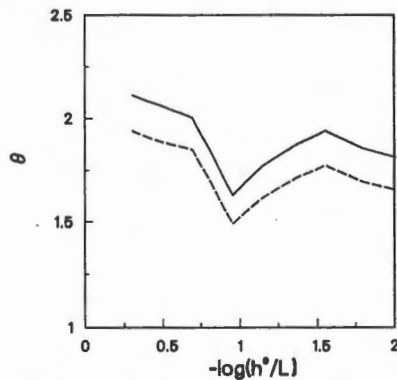
KUVA 6. Taipuman kuvaajia laskettuna viiden elementin tasavälisellä ja adaptiivisesti hienonnetulla verkolla jossa on pyritty 10 % tarkkuuteen taivutusmomentin suhteen,  $\Lambda = 0,3$ . Suhteelliset virheet tasavälisellä verkolla laskettuna:  $e_r(v) = 6,87 \%$ ,  $\bar{e}_r(v) = 4,57 \%$  ja  $e_r(v^*) = 5,36 \%$  ja adaptiivisesti  $e_r(v) = 7,66 \%$ ,  $\bar{e}_r(v) = 1,95 \%$  ja  $e_r(v^*) = 3,05 \%$ . Kuubiset muotofunktiot jälkikäsitellyllä taipumalla. Analyttinen ratkaisu on esitetty yhtenäisellä viivalla ja numeerinen katkoviivalla johon solmupisteiden kohdat on merkitty ympyröillä.



KUVA 7. Kuten kuva 6, mutta käyttäen parabolista muotofunktiota jälkikäsitellylle taipumalle. Tasavälinen verkko  $e_r(v^*) = 5,35 \%$  ja adaptiivinen  $e_r(v^*) = 6,19 \%$ .



KUVA 8. Adaptiivinen verkontihennysprosessi pyrittäessä taivutusmomenttien suhteen 2 % tarkkuuteen,  $\Lambda = 0,3$ . Taulukossa 1 on esitetty virheiden suuruudet prosessin eri vaiheissa.



KUVA 9. Tehokkuusindeksi  $\theta$  (estimoidun virheen suhde todelliseen virheeseen) elementtijaon funktiona. Yhtenäinen viiva on estimaatille (9) ja katkoviiva estimaatille (18). Adaptiivinen laskenta ja  $\Lambda = 0,3$ .

## VIITTEET

- [1] BABUŠKA, I., SZABO, B., Lecture notes on finite element analysis, käsikirjoitus 1983.
- [2] BAROUDI, D., valmistella oleva Diplomityö, TKK Rakennus- ja maanmittaustekniikan osasto.
- [3] DEVLOO, P., ODEN, J.T., STROUBOULIS, T., Implementation of an adaptive refinement technique for the SUPG algorithm, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 61 1987, s. 339-358.
- [4] KOUHIA, R., Hybridi- ja sekaelementtimenetelmistä, *Rakenteiden Mekaniikka*, Vol. 20 1987 No 2, s. 3-22.
- [5] STENBERG, R., Postprocessing schemes for some mixed finite elements, julkaistaan *RAIRO, Mathematical Modelling and Numerical Analysis*.

Reijo Kouhia, dipl. ins., TKK, rakennetekniikan laitos