

SYMMETRISEN TASAPAINOLAMINAATIN LÄMPÖPITENEMISKERTOIMISTA

Antti Pramila

TIIVISTELMÄ

Rakenteiden mekaniikka, Vol. 22

No 2 1989, s. 42-63

Artikkelissa tarkastellaan laminointikulman ja yhdensuuntaiskerroksen termoelastisten vakioiden vaikutusta symmetrisen tasapainolaminaatin lämpöpitenemiskertoimiin. Lämpöpitenemiskertoimien lausekkeet saataan $[\theta/-\theta]_s$ laminaatin tapauksessa muotoon, mistä näkyy eksplisiittisesti niiden riippuvuus laminointikulmasta ja yhdensuuntaiskerroksen ominaisuuksista. Johdettuja uusia lausekkeitä käyttäen artikkelissa tarkastellaan lämpöpitenemiskertoimien nollakohtia ja ääriarvoja. Ääriarvokohtien osoitetaan olevan riippumattomia yhdensuuntaiskerroksen lämpöpitenemiskertoimista. Avoimella välillä (0° , 90°) laminaatin lämpöpitenemiskertoimilla voi saatujen tulosten mukaan olla 2, 1 tai ei yhtään ääriarvoa riippuen G_{12} :n suhteellisesta arvosta muihin kimmovakioihin nähden.

JOHDANTO

Komposiittimateriaalien ja -rakenteiden käyttö erilaisissa teknillisissä sovellutuksissa on lisääntynyt viimeksikuluneiden parin vuosikymmenen aikana voimakkaasti. Syynä tähän on mm. se, että esimerkiksi useilla pikäkuitulujitteisilla komposiiteilla saavutetaan lujitteen suunnassa lujuus- ja jäykkyysarvoja, jotka ovat korkeampia kuin perinteisillä metallisilla materiaaleilla. Koska komposiittimateriaalien tiheys on pieni, ovat ne ensisijaisesti korvanneet metalleja sovellutuksissa, joissa rakenteen keveys (lujuudesta ja jäykkyydestä tinkimättä) on erityisen tavoiteltava ominaisuus. Tällaisia sovellutuksia löytyy esimerkiksi avaruus-, lento-, laiva- ja autotekniikasta.

Komposiittimateriaaleja käytettäessä rakenteen mekaaniset ominaisuudet voidaan kerrospaksuuksia, -suuntia ja -lukumääriä säätelämällä "räätälöidä" juuri halutuiksi. Tämä vaatii kuitenkin huomattavasti enemmän laskentaa kuin mitä tarvitaan perinteisiä materiaaleja käytettäessä. Perusteoriaa on esitelty mm. oppikirjoissa [1], [2], [3] ja [4].

Useilla kuitulujitetuilla yhdensuuntaiskomposiiteilla lämpöpitenemiskerros kuitujen suunnassa on huomattavasti pienempi kuin kuituja vastaan kohtisuorassa suunnassa, eräillä jopa negatiivinen. Yhdensuuntaiskerroksista, joilla on pitkittäis- ja poikittaissuuntaan erisuuret (positiiviset) lämpöpitenemiskertoimet, muodostetulle $[\theta/-\theta]_s$ laminaatille saadaan silti tietyillä kulman arvoilla negatiivinen lämpöpitenemiskerros α_{xx}^0 x-suuntaan, johon nähden kerrokset muodostavat siis kulmat $+\theta$ ja $-\theta$. Tälle alunperin kokeellisesti havaitulle ilmiölle löydettiin teoreettinen selitys klassillisen laminaattiteorian pohjalta, ks. [5] ja [6]. Täysin anisotrooppisista kerroksista muodostetun laminaatin lämpöpitenemiskertoimien määrittämiseen tarvittava yhtälöryhmä on esitetty lähteessä 7.

Yllämainittu piirre mahdollistaa esimerkiksi tietyssä suunnassa täysin lämpöpitenemättömän laminaatin konstruoinnin. Täten asiaan liittyy paitsi teoreettista, myös käytännöllistä mielenkiintoa. Em. lähteissä lämpöpitenemiskertoimille johdetut lausekkeet ovat kuitenkin muodossa, josta ei voi päätellä niiden nollakohtia ja/tai mahdollisia ääriarvokohtia. Tietyssä suunnassa lämpöpitenemiskertoimen nolla omaavaa laminaattia suunniteltaessa joudutaan käyttämään siten yrityksen ja erehdyksen tietä, ts. kokeile-

maan eri θ :n arvoilla. Vaikka käytössä on kaupallisia ohjelmistojakin (esim. GENLAM ja COMPCAL), joilla voi laskea mm. laminaatin lämpöpitenemiskertoimet, on tehtävä työläs.

Teoreettista mielenkiintoa - ja käytännöllistä - on myös sillä, mikä on lämpöpitenemiskertoimen pienin mahdollinen tai suurin mahdollinen arvo käytettäessä tiettyä yhdensuuntaiskerrosta. Lähteissä 2 ja 6 on esimerkinomaisesti näytetty, että lämpöpitenemiskerroin saavuttaa eräissä tapauksissa minimiarvon, kun $\theta \approx 30^\circ$. Tarkempaa tutkimusta ääriarvojen esiintymisen edellytyksistä ei tämän kirjoittaja - yrityksistä huolimatta - ole mistään kuitenkaan löytänyt.

Tässä artikkelissa tarkastellaan perusteorian esittämisen jälkeen johdattelevana esimerkkinä $[\theta_1/\theta_1/\theta_2/\theta_2/\theta_3/\theta_3]_S$ ja $[\theta_1/\theta_1/\theta_2/\theta_2]_S$ laminaattien lämpöpitenemiskertoimia. Numeerinen laskenta viittaa siihen, että α_{xx}^0 :n minimiarvo saavutetaan edellisessä, kun $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \bar{\theta}$ ja jälkimmäisessä kun $\theta_1 = \theta_2 = \bar{\theta}$. $\bar{\theta}$ on kulma, jolla saavutetaan α_{xx}^0 :n minimiarvo $[\theta/\theta]_S$ laminaatissa.

Artikkelin loppuosassa johdetaan $[\theta/\theta]_S$ laminaatin α_{xx}^0 :lle ja α_{yy}^0 :lle lausekkeet, joista näkyy eksplisiittisesti niiden riippuvuus laminointikulmasta. Johdettuja kaavoja edelleen kehittämällä näytetään, että α_{xx}^0 :n nollakohtien ja ääriarvojen etsintä johtaa vastaavasti $\sin^2 \theta$:n ja $\cos^2 \theta$:n suhteen toista astetta olevan yhtälön ratkaisemiseen. Tämän perusteella artikkelissa johdetaan kimmovakioille ehdot, joiden vallitessa α_{xx}^0 :llä on 2, 1 tai ei yhtään ääriarvoa avoimella välillä $(0^\circ, 90^\circ)$. Itsestään selvää on, että sillä on aina ääriarvot kohdissa $\theta = 0^\circ$ ja $\theta = 90^\circ$. Mielenkiintoista on se, että ääriarvojen esiintymiskohdat ovat riippumattomia yhdensuuntaiskerroksen lämpöpitenemiskertoimista α_{11} ja α_{22} .

PERUSTEORIA

Yhdensuuntaiskerroksen peruskaavat

Käytetään kuvan 1 mukaisia koordinaatistoja, missä x, y-koordinaatisto on koko laminaatin "luonnollinen" koordinaatisto ja 1,2 - koordinaatiston akselit yhtyvät yhdensuuntaiskerroksen (laminan) pääsuuntiin siten, että akseli 1 yhtyy kuitujen suuntaan. Lineaarisesti kimmoiseksi oletetun yhdensuuntaiskerroksen jännitys-venymäyhteys on (tasojännitystila)

$$\{\sigma\} = [Q] \{ \{\varepsilon\} - \Delta T \{\alpha\} \}, \quad (1)$$

missä ΔT on lämpötilan muutos ja

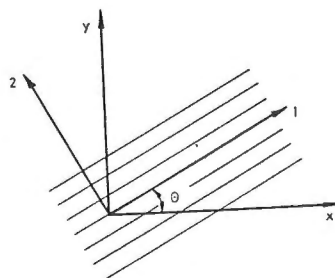
$$\{\sigma\}^T = [\sigma_{11} \sigma_{22} \tau_{12}], \quad (2)$$

$$\{\varepsilon\}^T = [\varepsilon_{11} \varepsilon_{22} \gamma_{12}], \quad (3)$$

$$\{\alpha\}^T = [\alpha_{11} \alpha_{22} 0], \quad (4)$$

sekä

$$[Q] = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}, \quad (5)$$



Kuva 1. Käytetyt koordinaatistot, merkintöjä.

Matriisin [Q] alkioit ovat

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{22} &= \frac{E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{12} &= \frac{\nu_{12}E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{21}E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{66} &= G_{12} \end{aligned} \quad (6)$$

Poissonin vakioiden alaindeksien kohdalla on nõudatettu komposiittikirjallisuudessa yleistynyttä käytäntöä: $\nu_{12} = \epsilon_{22}/\epsilon_{11}$, kun ainoastaan $\sigma_{11} \neq 0$. Tällöin ν_{12} on suurempi kahdesta Poissonin vakiosta (engl. major Poisson's ratio), koska $E_{11} > E_{22}$. Tämä valinta johtaa valitettavasti [Q]:n käänteismatriisin alkioiden kohdalla epäjohdonmukaisiin alaindekseihin. On ehkä syytä myös korostaa, että kaavassa (3) γ_{12} on nimenomaan liukuma $\gamma_{12} = 2\epsilon_{12} = u_{1,2} + u_{2,1}$. Tämä valinta on tehty, jotta koordinaatistojen väliset muunnoskaavat pysyvät mahdollisimman yksinkertaisina.

Yhdensuuntaiskerroksen muunnoskaavat

Jännityskomponenttien välinen muunnoskaava on

$$\{\sigma\} = [L] \{\bar{\sigma}\}, \quad (7)$$

missä

$$\{\bar{\sigma}\}^T = [\sigma_{xx} \sigma_{yy} \tau_{xy}], \quad (8)$$

ja

$$[L] = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2 \sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix}, \quad (9)$$

Kontragradienttilain perusteella venymien välinen muunnoskaava on

$$\{\bar{\epsilon}\} = [L]^T \{\epsilon\}. \quad (10)$$

Kaavojen (1), (7) ja (10) avulla saadaan yhdensuuntaiskerroksen jännitys-venymäyhdeksi x, y-koordinaatistossa

$$\{\bar{\sigma}\} = [\bar{Q}]\{\bar{\epsilon}\} - [L]^{-1}[Q]\{\alpha\} \Delta T, \quad (11)$$

missä

$$[\bar{Q}] = [L]^{-1}[Q][L]^{-T} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}, \quad (12)$$

ja

$$\{\bar{\epsilon}\}^T = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{yy} & \gamma_{xy} \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Eksponentti "-T" kaavassa (12) tarkoittaa käänteismatriisin transpoosia.

Matriisin $[\bar{Q}]$ alkioiden lausekkeet on esitetty liitteessä A.

Lämpöpitenemiskertoimet ovat venymiä, kun $\Delta T = 1$, joten niiden välinen koordinaatistomuunnos on

$$\{\alpha\} = [L]^{-T}\{\bar{\alpha}\}, \quad (14)$$

missä

$$\{\bar{\alpha}\}^T = \begin{bmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{yy} & \alpha_{xy} \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Muunnoskaavan (14) "aukikirjoitettu" käänteismuoto on esitetty liitteessä A.

Kaavojen (11) ja (14) perusteella saadaan

$$\{\bar{\sigma}\} = [\bar{Q}]\{\bar{\epsilon}\} - \{\bar{R}\} \Delta T, \quad (16)$$

missä

$$\{\bar{R}\} = [\bar{Q}]\{\bar{\alpha}\}. \quad (17)$$

Vektorin $\{\bar{R}\}$ alkioiden lausekkeet ovat

$$\begin{aligned} R_1 &= \bar{Q}_{11} \alpha_{xx} + \bar{Q}_{12} \alpha_{yy} + \bar{Q}_{16} \alpha_{xy} \\ R_2 &= \bar{Q}_{12} \alpha_{xx} + \bar{Q}_{22} \alpha_{yy} + \bar{Q}_{26} \alpha_{xy} \\ R_3 &= \bar{Q}_{16} \alpha_{xx} + \bar{Q}_{26} \alpha_{yy} + \bar{Q}_{66} \alpha_{xy} \end{aligned} \quad (18)$$

Kaavassa (18) $\bar{Q}_{11}, \bar{Q}_{12}, \bar{Q}_{22}, \bar{Q}_{66}, \alpha_{xx}$ ja α_{yy} ovat kulman θ parillisia funktioita (ks. kaavat (A.1) ja (A.2)). Parittomia θ :n funktioita ovat taas $\bar{Q}_{16}, \bar{Q}_{26}$ ja α_{xy} . Näinollen R_1 ja R_2 ovat θ :n parillisia funktioita ja R_3 on θ :n pariton funktio. Näitä ominaisuuksia hyödynnetään myöhemmin.

Symmetrisen laminaatin lämpölaajenemiskertoimet

Tarkastellaan seuraavassa vain symmetrisiä laminaatteja. Niissä levy- ja laattatila eivät kytkeydy toisiinsa. Otaksutaan edelleen, että kunkin yhden-suuntaiskerroksen termomekaaniset ominaisuudet ovat paksuussuunnassa vakioita, ollen kuitenkin mahdollisesti eri kerroksissa erisuuria.

Integroimalla yhteys (16) puolittain yli koko laminaatin paksuuden, saadaan pituusyksikköä kohti laskettujen normaalivoimien ja (laminaatin tason suuntaisen) leikkausvoiman sekä venymien välille yhteys

$$\{N\} = [A] \{\bar{\epsilon}\} - \{S\} \Delta T, \quad (19)$$

missä

$$[A] = \sum_{k=1}^{2n} [\bar{Q}]_k t_k \quad (20)$$

ja

$$\{S\} = \sum_{k=1}^{2n} \{\bar{R}\}_k t_k \quad (21)$$

joissa alaindeksi k viittaa k :nteen kerrokseen, jonka paksuus on t_k , kulma x -akseliin nähden on θ_k etc. Kerrosten kokonaislukumäärä on $2n$. Kun ulkoisia mekaanisia kuormia ei ole, $\{N\} = \{0\}$, ja kaavasta (19) saadaan laminaatin lämpölaajenemiskertoimet muodossa

$$\{\alpha^0\} = [A]^{-1} \{S\}, \quad (22)$$

missä

$$\begin{Bmatrix} \alpha \\ \alpha \end{Bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{yy} & \alpha_{xy} \end{bmatrix}. \quad (23)$$

Tulos (22) voidaan saattaa vielä yksinkertaisempaan muotoon, kun otaksutaan, että kyseessä on tasapainolaminaatti, ts. jokaista x-akseliin nähden kulman θ verran kierrettyä kerrosta vastaa muutoin identtinen kulman $-\theta$ verran kierretty kerros (tai muutoin samanlaisten $+\theta$:n ja $-\theta$:n verran kierrettyjen kerrosten paksuuksien summa on yhtäsuuri).

R_3 :n parittomuuden vuoksi tällöin $S_3 = 0$. Kaavojen (A.1) ja (20) perusteella tasapainolaminaatissa myös $A_{16} = A_{26} = 0$, jolloin kaavan (22) perusteella $\alpha_{xy}^0 = 0$. Lämpöpitenemiskertoimille saadaan nyt kaavasta (22) lausekkeet

$$\alpha_{xx}^0 = \frac{A_{22}S_1 - A_{12}S_2}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}, \quad (24)$$

ja

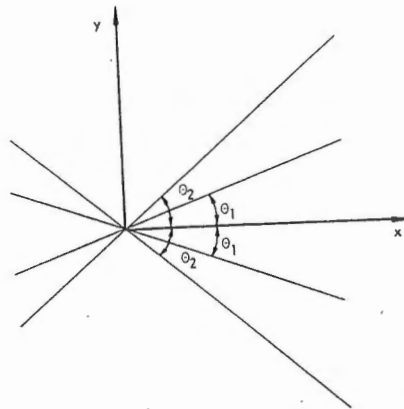
$$\alpha_{yy}^0 = \frac{A_{11}S_2 - A_{12}S_1}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}. \quad (25)$$

Kaavat (24) ja (25) ovat vain näennäisesti yksinkertaisia, sillä kaikki kaavojen oikealla puolella esiintyvät termit riippuvat paitsi yhdensuuntais-kerrosten termomekaanisista ominaisuuksista, myös kaikista laminaatissa esiintyvistä kerrosten ja x-akselin välisistä kulmista. Näinollen kaavoista on mahdotonta päätellä millä kulmayhdistelmillä (ällä), saadaan pienimmät ja suurimmat lämpöpitenemiskertoimet laminaatin pääsuunnissa. Samoin sen päättely, millä kulmayhdistelmillä (ällä) saavutetaan jossakin suunnassa lämpöpitenemiskertoimen arvo nolla, on lähes toivotonta. Eräs keino on tehdä yo. kaavojen pohjalta tietokoneohjelma ja kokeilla useita kymmeniä (tai satoja) kulmayhdistelmiä.

Esimerkki

Tarkastellaan esimerkkinä hiilikuitu-epoksi laminaattia $[\theta_1/-\theta_1/\theta_2/-\theta_2]_s$, jossa siis on kahdeksan identtistä kerrosta suunnissa $\pm\theta_1$ ja $\pm\theta_2$, ks. kuva 2. Yhdensuuntais-kerroksen (laminan) ominaisuudet ovat

$$\begin{aligned}
 E_{11} &= 181 \text{ GPa} \\
 E_{22} &= 10.3 \text{ GPa} \\
 \nu_{12} &= 0.28 \\
 G_{12} &= 7.17 \text{ GPa} \\
 t &= 1 \text{ mm} \\
 \alpha_{11} &= 0.02 \cdot 10^{-6}/^{\circ}\text{C} \\
 \alpha_{22} &= 22.5 \cdot 10^{-6}/^{\circ}\text{C}
 \end{aligned}
 \tag{26}$$



Kuva 2. $[\theta_1/-\theta_1/\theta_2/-\theta_2]_s$ laminaatti, merkintöjä.

Taulukko I $[\theta_1/-\theta_1/\theta_2/-\theta_2]_s$ -laminaatin $\alpha_{xx}^{\circ}/(10^{-6}/^{\circ}\text{C})$

		$\theta_1/1^{\circ}$					
		0	10	20	30	40	50
$\theta_2/1^{\circ}$	0	0.02	-0.24	-0.80	-1.03	-0.56	0.19
	10	-0.24	-0.50	-1.07	-1.28	-0.72	0.14
	20	-0.8	-1.07	-1.70	-1.94	-1.14	0.07
	30	-1.03	-1.28	-1.94	-2.37	-1.46	0.25
	40	-0.56	-0.72	-1.14	-1.46	-0.64	1.52
	50	0.19	0.14	0.07	0.25	1.52	4.46

Taulukossa I on esitetty eräillä θ_1, θ_2 - yhdistelmillä laskettuja α_{xx}° :n arvoja. Tuloksista nähdään mm., että α_{xx}° saavuttaa minimiarvon, kun $\theta_1 = \theta_2 = 30^\circ$ ja että α_{xx}° vaihtaa merkkiä välillä $40^\circ < \theta_1 < 50^\circ$ ja $40^\circ < \theta_2 < 50^\circ$. Merkilläpantavaa on se, että α_{xx}° on negatiivinen lähes koko alueella $0 < \theta_1 < 50^\circ$ ja $0 < \theta_2 < 50^\circ$, vaikka käytetyn yhdensuuntaiskerroksen molemmat lämpöpitenemiskertoimet α_{11} ja α_{22} ovat positiivisia.

Edelläesitettyjä tuloksia - minimi ja nollakohdat - on mahdollista hyödyntää monissa teknillisissä sovellutuksissa: antenneissa, optisissa instrumenteissa jne.

Numeeriset kokeilut laminaatilla $[\theta_1/-\theta_1/\theta_2/-\theta_2/\theta_3/-\theta_3]_S$ antavat vastaavan tuloksen: α_{xx}° saavuttaa minimiarvon, kun $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 \approx 30^\circ$. Vielä useamman yhdistelmän käsittely ei ole "analyysiorientoituneella" tietokoneohjelmallakaan mielekäästä.

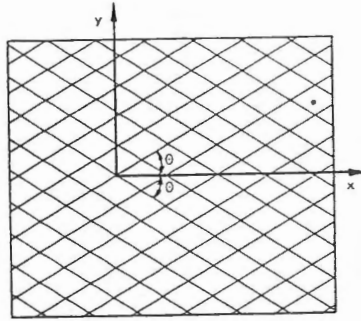
Mutkikkaammissa tapauksissa joudutaan luonnollisesti käyttämään numeerisia minimointialgoritmeja, minimoitavana joko α_{xx}° , $|\alpha_{xx}^\circ|$ tai $(\alpha_{xx}^\circ)^2$ riippuen siitä haetaanko absoluuttista minimiä vai nollakohtaa. Algoritmeja löytyy esimerkiksi IMSL- ja NAG-ohjelmakirjastoista.

Tehtävän luonteen vuoksi (epälineaarisuus, ks. kaavat (A.1), (A.2), (18) ja (24); minimi saavutetaan usealla yhdistelmällä, ks. taulukko I) ei ole luultavaa, että mikä tahansa algoritmi sopii tehtävän ratkaisuun. Rationaalinen valinta voisi perustua esimerkiksi yksinkertaiseen testiin, jolle löytyy mieluiten analyttinen ratkaisu.

Taulukossa I esitetyt tulokset viittaavat siihen, että sopiva testiprobleema voisi olla nimenomaan $[\theta_1/-\theta_1/\theta_2/-\theta_2]_S$ - laminaatti, jonka α_{xx}° saavuttaa minimiarvon, kun $\theta_1 = \theta_2 \approx 30^\circ$. Tarkan minimiarvon - ja nollakohdan - selvittämiseksi seuraavassa kehitetään α_{xx}° :n ja α_{yy}° :n lausekkeet θ :n suhteen eksplisittiseen asuun $[\theta/-\theta]_S$ -laminaatille.

$[\theta/-\theta]_S$ - LAMINAATIN LÄMPÖPITENEMISKERTOIMET

Koska $R_1, R_2, \bar{Q}_{11}, \bar{Q}_{12}, \bar{Q}_{22}$ ja $\bar{Q}_{66}$ ovat θ :n suhteen parillisia (ks. kaavat (A.1), (A.2) ja (18)) saadaan kaavoista (20) ja (21) $[\theta/-\theta]_S$ -laminaatille (kuva 3) tulokset



Kuva 3. $[\theta/\theta]_s$ laminaatti, merkintöjä.

$$\begin{aligned} S_1 &= 2n R_1 t, & S_2 &= 2n R_2 t, \\ A_{11} &= 2n \bar{Q}_{11} t, & A_{12} &= 2n \bar{Q}_{12} t \\ A_{22} &= 2n \bar{Q}_{22} t \end{aligned} \quad (27)$$

kun yhdensuuntaiskerrokset ovat yhtä paksuja (näin on oltava, jotta laminaatti olisi tasapainolaminaatti). Kun tulokset (27) sijoitetaan kaavoihin (24) ja (25) saadaan lämpöpitenemiskertoimet esitetyiksi yhdensuuntaiskerroksen x, y - koordinaatistossa lausuttujen ominaisuuksien avulla seuraavasti

$$\alpha_{xx}^0 = \frac{\bar{Q}_{22} R_1 - \bar{Q}_{12} R_2}{\bar{Q}_{11} \bar{Q}_{22} - \bar{Q}_{12}^2}, \quad (28)$$

$$\alpha_{yy}^0 = \frac{\bar{Q}_{11} R_2 - \bar{Q}_{12} R_1}{\bar{Q}_{11} \bar{Q}_{22} - \bar{Q}_{12}^2}. \quad (29)$$

Kun nyt näihin sijoitettaisiin $\bar{Q}_{11}$, $\bar{Q}_{12}$ ja $\bar{Q}_{22}$ kaavoista (A.1) sekä R_1 ja R_2 kaavoista (18) ja vielä näihin α_{xx} , α_{yy} ja α_{xy} kaavoista (A.2), saataisiin α_{xx}^0 ja α_{yy}^0 lausutuiksi kulman θ ja yhdensuuntaiskerroksen termomekaanisten ominaisuuksien (Q_{11} , Q_{12} , Q_{22} , Q_{66} , α_{11} ja α_{22}) avulla. Tämän jälkeen esimerkiksi α_{xx}^0 :n nollakohdan ja minimin löytäminen olisi periaatteessa yksinkertaista. Etenkään kaavojen (A.1) ulkomuoto ei kuitenkaan houkuttele näin suoraviivaiseen menettelyyn.

Laminaatin x,y - koordinaatistossa lausutun tyypillisen yhdensuuntaiskerroksen (laminan) kimmomatriisiin $[\bar{Q}]$:n seuraavassa tarvittaville alkioille saadaan trigonometristen funktioiden välisiä yhteyksiä käyttäen suhteellisen yksinkertaiset lausekkeet (ks. esim [3])

$$\begin{aligned}\bar{Q}_{11} &= U_1 + U_2 \cos 2\theta + U_3 \cos 4\theta \\ \bar{Q}_{12} &= \bar{Q}_{21} = U_4 - U_3 \cos 4\theta \\ \bar{Q}_{22} &= U_1 - U_2 \cos 2\theta + U_3 \cos 4\theta \\ \bar{Q}_{16} &= \frac{1}{2} U_2 \sin 2\theta + U_3 \sin 4\theta \\ \bar{Q}_{26} &= \frac{1}{2} U_2 \sin 2\theta - U_3 \sin 4\theta\end{aligned}\quad (30)$$

joissa $U_1, \dots, U_4$ ovat yhdensuuntaiskerroksen materiaalkoordinaatistossa esitetyn kimmomatriisin alkioista riippuvia (kulmasta θ riippumattomia) apusuureita. Ne saadaan kaavoista

$$\begin{aligned}U_1 &= \frac{1}{8} (3Q_{11} + 3Q_{22} + 2Q_{12} + 4Q_{66}) \\ U_2 &= \frac{1}{2} (Q_{11} - Q_{22}) \\ U_3 &= \frac{1}{8} (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 4Q_{66}) \\ U_4 &= \frac{1}{8} (Q_{11} + Q_{22} + 6Q_{12} - 4Q_{66})\end{aligned}\quad (31)$$

Sijoittamalla nyt kaavoista (18) saatavat R_1 :n ja R_2 :n lausekkeet kaavoihin (28) ja (29), saadaan α_{xx}^0 :lle ja α_{yy}^0 :lle lausekkeet, joissa esiintyy vain $[\bar{Q}]$:n ja $(\bar{\alpha})$:n alkioita. Kun käytetään hyväksi kaavoja (30) ja (A.2) saadaan lämpöpitenemiskertoimet esitetyiksi kuuden perussuureen avulla ($\alpha_{11}, \alpha_{22}, U_1, \dots, U_4$), mutta lausekkeet ovat melko pitkiä. Käyttämällä vielä kaavoja (31) ja (6), saadaan lämpöpitenemiskertoimille lopulta suhteellisen yksinkertaiset lausekkeet, joista eksplisiittisesti näkyy, kuinka ne riippuvat laminointikulmasta θ . Kaavat ovat

$$\begin{aligned}\alpha_{xx}^0 &= \frac{(\alpha_{11} - \alpha_{22}) \sin 2\theta (C_1 \sin 4\theta + C_2 \sin 2\theta)}{2(C_1 \cos 4\theta + C_3)} + \\ &+ \frac{(\alpha_{11} - \alpha_{22}) \cos 2\theta}{2} + \frac{\alpha_{11} + \alpha_{22}}{2}\end{aligned}\quad (32)$$

$$\alpha_{yy}^0 = \frac{(\alpha_{22} - \alpha_{11}) \sin 2\theta (C_1 \sin 4\theta - C_2 \sin 2\theta)}{2(C_1 \cos 4\theta + C_3)} + \frac{(\alpha_{22} - \alpha_{11}) \cos 2\theta}{2} + \frac{\alpha_{11} + \alpha_{22}}{2} \quad (33)$$

missä

$$C_1 = E_{11}(E_{22} - G_{12}) - E_{22}G_{12}(2\nu_{12} + 1), \quad (34)$$

$$C_2 = 2G_{12}(E_{11} - E_{22}) \quad (35)$$

ja

$$C_3 = E_{11}(E_{22} + G_{12}) + E_{22}G_{12}(2\nu_{12} + 1) \quad (36)$$

Kaavojen (32) ja (33) oikeellisuus on testattu usealla eri tavalla. Kaavoista nähdään ensinnäkin, että ne antavat rajatapauksissa $\theta = 0^\circ, 90^\circ$ oikeat arvot, eli α_{11} ja α_{22} , riippumatta kimmovakioiden arvoista. Samoin niistä nähdään, että kimmovakioiden arvoista riippumatta $\alpha_{xx}^0 = \alpha_{yy}^0$, kun $\theta = 45^\circ$, kuten tulee ollakin. Kaavojen antamia numeerisia tuloksia on lisäksi verrattu useilla kimmovakioyhdistelmillä ja useilla välillä $[0^\circ, 90^\circ]$ olevilla kulmilla peruskaavojen (mm. (24) ja (25)) pohjalta tehtyjen ja laajasti käytössä olevien ohjelmistojen GENLAM ja COMPCAL antamiin tuloksiin. Vertailussa ei ole löytynyt eroja. Kohdan 2.4 lopussa esitetyillä materiaaliarvoilla saadaan, kun $\theta = 40^\circ$, GENLAM-ohjelmalla $\alpha_{xx}^0 = -0.6431 \cdot 10^{-6}/^\circ\text{C}$ ja kaavasta (32) $\alpha_{xx}^0 = -0.6431 \cdot 10^{-6}/^\circ\text{C}$.

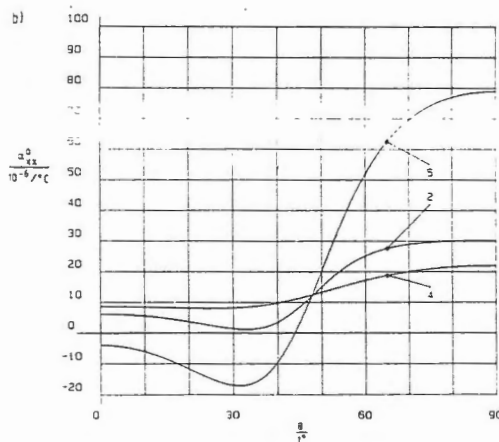
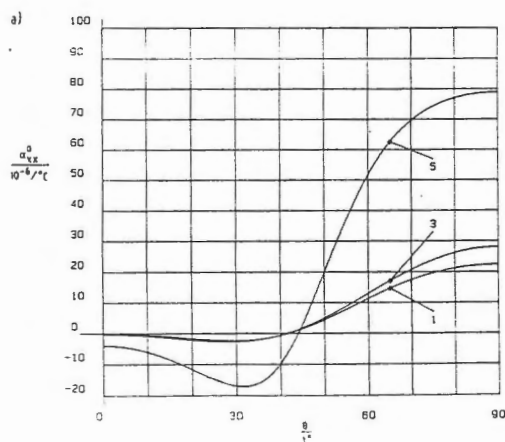
Esimerkkejä

Kaavoja (32) ja (33) voidaan käyttää laminaatin kannalta tiettyjä toivottuja erikoisominaisuuksia antavien kulmien etsintään - esim. lämpöpitene-miskertoimien minimiarvot ja nollakohdat. Em. valmisohjelmistojen käyttö tällaisiin tarkoituksiin on hankalaa, koska sekä lämpöpitene-miskertoimet että niiden θ :n suhteen otetut derivaatat muuttuvat hyvin nopeasti nollakoh-tiensa läheisyydessä.

Taulukossa II on esitetty eräiden yhdensuuntaiskerrosten termomekaanisia ominaisuuksia, [3]. Kuvaan 4 on piirretty niistä muodostettujen $[\theta/-\theta]_s$ laminaattien α_{xx}^0 :t kulman θ funktiona. Kuvasta nähdään, että minimiarvo saavutetaan, kun kulma $\theta = 25^\circ \dots 35^\circ$. Tarkastelun kohteena olevien laminaattien α_{xx}^0 :llä on joko 2, 1 tai ei yhtään nollakohtaa.

Taulukko II Yhdensuuntaiskerrosten termoelastiset ominaisuudet

Nro	Kuitu/Matriisi	E_{11} GPa	E_{22} GPa	G_{12} GPa	ν_{12}	α_{11} $10^{-6}/^\circ\text{C}$	α_{22} $10^{-6}/^\circ\text{C}$
1	T300/N5208	181	10.3	7.17	0.28	0.02	22.5
2	B (4)/N5505	204	18.5	5.59	0.23	6.1	30.3
3	AS/3501	138	8.96	7.10	0.3	-0.3	28.1
4	E-lasi/epoksi	38.6	8.27	4.14	0.26	8.6	22.1
5	Kev.49/epoksi	76.0	5.50	2.30	0.34	-4.0	79.0



Kuva 4. Taulukon I yhdensuuntaiskerroksista muodostettujen $[\theta/-\theta]_s$ laminaattien $\alpha_{xx}^0(\theta)$.

Lämpöpitenemiskertoimen α_{yy}° kuvaajat ovat (vrt. kaavat (32) ja (33)) α_{xx}° :n kuvaajiin nähden symmetriset, symmetriatason ollessa kohdassa $\theta = 45^{\circ}$. Niitä ei ole selvyuden vuoksi piirretty näkyviin.

TARKAT NOLLAKOHDAT JA ÄÄRIARVOT

Laminaatin pituussuuntaisen lämpöpitenemiskertoimen tarkan nollakohdan selvittämiseksi saatetaan lausekkeessa (32) ensiksi kaikki termit samannimisiksi. Kaavojen (32), (34) ja (36) perusteella nimittäjä on aina positiivinen. Osoittajaan tulevien θ :n monikertojen sinien ja kosinien tulojen kehittäminen trigonometristen muunnoskaavojen avulla johtaa lopulta muotoon

$$f(\theta) = 2a_2 \sin^4 \theta + a_1 \sin^2 \theta + a_0, \quad (37)$$

Osoittajan $f(\theta)$ lausekkeessa esiintyvät vakiot ovat

$$a_2 = E_{11} [E_{22}(\alpha_{11} + \alpha_{22}) - 2G_{12}\alpha_{11}] + \\ - 2 E_{22} G_{12} [v_{12}(\alpha_{11} + \alpha_{22}) + \alpha_{22}], \quad (38)$$

$$a_1 = - E_{11}[E_{22}(3\alpha_{11} + \alpha_{22}) - 4G_{12}\alpha_{11}] + \\ - 4 E_{22} G_{12}[v_{12}(\alpha_{11} + \alpha_{22}) + \alpha_{22}] \quad (39)$$

ja

$$a_0 = E_{11} E_{22} \alpha_{11}. \quad (40)$$

Kun merkitään

$$x = \sin^2 \theta, \quad (41)$$

saadaan ehdosta $\alpha_{xx}^{\circ} = 0$ toisen asteen yhtälö

$$2a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0, \quad (42)$$

jolla on joko 2, 1 tai ei yhtään reaaliuurta riippuen termoelastisten vakioiden E_{11} , E_{22} , G_{12} , ν_{12} , α_{11} ja α_{22} arvoista. Mikäli molemmat reaaliuureet ovat välillä $[0,1]$ saadaan α_{xx}° :lle arvon nolla antavat kaksi kulmaa kaavasta

$$\theta_{1,2} = \arcsin \sqrt{x_{1,2}} \quad (43)$$

Jos vain toinen (esim. x_1) on ko. välillä, saadaan kulma vastaavasta kaavasta. Mikäli kumpikaan juurista ei ole ko. välillä, α_{xx}° :llä ei ole nollakohtaa. Kuvassa 4 näitä päävaihtoehtoja edustavat materiaalit: 1; 3 ja 5; 2 ja 4.

Taulukossa III on esitetty kulmat, joilla taulukon II yhdensuuntaiskerroksista saadaan $[\theta/\theta]_g$ laminaatti, jonka α_{xx}° on nolla.

Taulukko III Taulukon II yhdensuuntaiskerroksista tehdyn $[\theta/\theta]_g$ -laminaatin α_{xx}° :n nollakohdat

Nro	θ_1, θ_2
1	1.9158°, 41.7109°
2	-
3	41.2695°
4	-
5	43.9370°

Kaavoista (32) ja (33) nähdään, että lämpöpiteneimiskertoimien lausekkeissa kaikkien θ :sta riippuvien termien kertoimena on $(\alpha_{11} - \alpha_{22})$. Tästä on seurauksena se, että kulmat, joilla α_{xx}° ja α_{yy}° saavuttavat ääriarvonsa, riippuvat vain kimmovakioista E_{11} , E_{22} , G_{12} ja ν_{12} .

Lämpöpiteneimiskertoimelle α_{xx}° ääriarvot antavat kulmat saadaan asettamalla sen derivaatta θ :n suhteen nolaksi. Kun lausekkeen (32) oikea puoli derivoidaan θ :n suhteen, saadaan jälleen trigonometristen funktioiden välisiä muunnoskaavoja käyttäen lopulta suhteellisen miellyttävä tulos: derivaatan osoittaja voidaan kirjoittaa muotoon

$$g(\theta) = \sin\theta \cos\theta (b_2 \cos^4\theta + b_1 \cos^2\theta + b_0), \quad (44)$$

missä

$$b_2 = 4[E_{11}(E_{22} - G_{12}) - E_{22} G_{12}(2\nu_{12} + 1)], \quad (45)$$

$$b_1 = -4[E_{11}(E_{22} - 2G_{12}) - 2E_{22} G_{12} \nu_{12}] \quad (46)$$

ja

$$b_0 = E_{11}(E_{22} - 4G_{12}) - 4E_{22} G_{12} \nu_{12}. \quad (47)$$

Kaavan (44) perusteella derivaatalla on (triviaalit) nollakohtat, kun $\theta = 0^\circ$ ja $\theta = 90^\circ$. Muiden nollakohtien löytyminen riippuu tulon tekijänä olevan sulkulausekkeen käyttäytymisestä. Kaavojen (45), (46) ja (47) perusteella $b_2 \rightarrow 4E_{11}E_{22}$, $b_1 \rightarrow -4E_{11}E_{22}$ ja $b_0 \rightarrow E_{11}E_{22}$, kun $G_{12} \rightarrow 0$. Tässä rajatapauksessa lausekkeen (44) oikealla puolella oleva sulkulauseke saa arvon nolla välillä $(0, 90^\circ)$ vain kun $\theta = 45^\circ$.

Kun $G_{12} \neq 0$ on α_{xx}° :n välillä $(0, 90^\circ)$ olevia nollakohtia haettaessa ratkaistavana toisen asteen yhtälö

$$b_2 x^2 + b_1 x + b_0 = 0 \quad (48)$$

missä $x = \cos^2 \theta$. Yhtälöllä on kaksi reaaliuurta, kun diskriminantti

$$(b_1^2 - 4b_2 b_0)$$

on positiivinen. Kaavojen (45) ... (47) perusteella näin on, kun

$$0 < G_{12} < \frac{E_{11}[E_{11} + E_{22}(2\nu_{12} + 1)]}{4[E_{11} + E_{22}\nu_{12}](1 + \nu_{12})}. \quad (49)$$

Tämä ei kuitenkaan takaa α_{xx}° :n derivaatalle kahta nollakohtaa välillä $(0^\circ, 90^\circ)$, sillä juuret (tai toinen niistä) voivat olla ykköistä suurempia tai negatiivisia. Suurin G_{12} :n arvo, jolla yhtälöllä (48) on kaksi nollakohtaa välillä $(0, 1)$ antaa myös kaksi θ :n arvoa, joilla α_{xx}° :n derivaatta saavuttaa arvon nolla.

Kaavojen (45) ... (47) perusteella yhtälöllä (48) on juuri $x_1 = 1$, kun

$$G_{12} = \frac{E_{11}}{4(\nu_{12} + 1)}, \quad (50)$$

jolloin toinen juuri on

$$x_2 = \frac{E_{11} - E_{22}}{E_{11} - E_{22}(2\nu_{12} + 3)} \quad (51)$$

Tämä ei voi saada arvoja välillä (0,1), kun $E_{11} > E_{22}$ ja $\nu_{12} > 0$. Yhtälöllä (48) on kaavojen (45) ... (47) perusteella juuri $x_1 = 0$, kun

$$G_{12} = \frac{E_{11}}{4\left(\frac{E_{11}}{E_{22}} + \nu_{12}\right)}, \quad (52)$$

jolloin toinen juuri on

$$x_2 = \frac{2(E_{11} + E_{22}\nu_{12})}{3E_{11} + E_{22}(2\nu_{12} - 1)} \quad (53)$$

Tämä on aina välillä (0,1), kun $E_{11} > E_{22}$ ja $\nu_{12} > 0$.

Lämpöpitenemiskertoimella α_{xx}° on siten välillä (0,90°) 2,1 tai ei yhtään ääriarvoa G_{12} :sta riippuen seuraavasti:

$$\begin{aligned} 0 < G_{12} < \frac{E_{11}}{4\left(\frac{E_{11}}{E_{22}} + \nu_{12}\right)}, & \text{ 2 ääriarvoa} \\ \frac{E_{11}}{4\left(\frac{E_{11}}{E_{22}} + \nu_{12}\right)} \leq G_{12} < \frac{E_{11}}{4(1 + \nu_{12})}, & \text{ 1 ääriarvo} \\ G_{12} \geq \frac{E_{11}}{4(1 + \nu_{12})}, & \text{ ei ääriarvoja} \end{aligned} \quad (54)$$

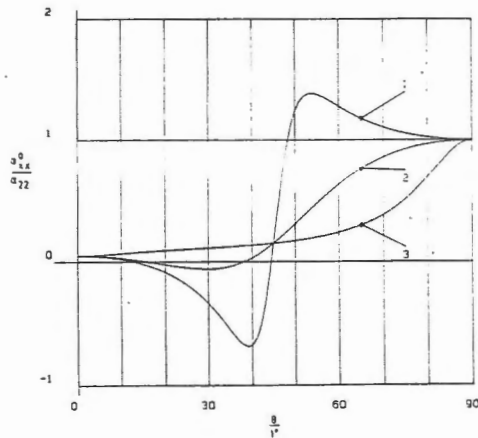
Taulukossa II esitetyt materiaalit kuuluvat kaavan (54) keskimmäiseen ryhmään. Jos esimerkiksi taulukon ensimmäisen materiaalin G_{12} pieneni kolmannekseen, kuuluisi se jo ensimmäiseen ryhmään, jolloin $\alpha_{xx}^\circ > \alpha_{22}^\circ > \alpha_{11}^\circ$ tietyillä lähellä 90° olevilla kulmilla.

Kaavoja (44) ... (48) käyttäen on taulukkoon IV laskettu kullekin taulukon II yhdensuuntaiskerrokselle $[\theta/-\theta]_s$ - laminaatin kulma, jolla α_{xx}° saavuttaa minimin sekä kaavasta (32) kyseinen minimiarvo.

Taulukko IV Taulukon II yhdensuuntaiskerroksista tehdyn $[\theta/\theta]_S$ laminaatin α_{xx}° :n minimikohdat

Nro	$\bar{\theta}/1^\circ$	$\alpha_{xxmin}^\circ/(10^{-6}^\circ\text{C})$
1	29.13	-2.38
2	32.72	1.13
3	27.85	-2.70
4	24.42	8.00
5	31.31	-17.17

Kuvassa 5 on esitetty dimensiottomassa muodossa kaavan (54) kuhunkin ryhmään kuuluvan materiaalin tyypillinen $\alpha_{xx}^\circ(\theta)$ kuvaaja.



Kuva 5. Laminaatin pituussuuntainen lämpöpiteneiskerroin:

$$E_{11}/E_{22} = 10, \nu_{12} = 1/4, \alpha_{11}/\alpha_{22} = 1/0 \text{ ja } 1^\circ G_{12}/E_{22} = 1/20, 2^\circ$$

$$G_{12}/E_{22} = 1/2 \text{ sekä } 3^\circ G_{12}/E_{22} = 4$$

LOPPUHUOMAUTUKSIA

Artikkelissa on tarkasteltu symmetristen tasapainolaminaattien lämpöpitenemiskertoimien muuttumista laminointikulman funktiona. Kirjallisuudesta löytyviä peruskaavoja (ks. esim. [1], [2] ja [3]) käyttäen on tutkittu aluksi $[\theta_1/-\theta_1/\theta_2/-\theta_2/\theta_3/-\theta_3]_S$, $[\theta_1/-\theta_1/\theta_2/-\theta_2]_S$ ja $[\theta/-\theta]_S$ -laminaattien lämpöpitenemiskertoimia.

Numeeristen laskelmien perusteella on päätelty, että tiettyä yhdensuuntais-kerrosta käytettäessä saavutetaan esimerkiksi $[\theta_1/-\theta_1/\theta_2/-\theta_2/\theta_3/-\theta_3]_S$ -laminaatin lämpöpitenemiskertoimen minimiarvo, kun $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \bar{\theta}$. $\bar{\theta}$ on kulma, joka antaa minimiarvon $[\theta/-\theta]_S$ laminaatin lämpöpitenemiskertoimelle.

Viimeksimainittua laminaattia on sen em. erikoisaseman vuoksi tarkasteltu yksityiskohtaisemmin.

$[\theta/-\theta]_S$ -laminaatille on johdettu lämpöpitenemiskertoimien lausekkeet (32) ja (33), joista näkyy niiden θ -riippuvuus eksplisiittisesti. Lämpöpitenemiskertoimien lausekkeitä ei ole kirjallisuudessa tiettävästi aiemmin kehitetty näin pitkälle. Saatua lausekkeitä käyttäen on mm. osoitettu, että kulmat, joilla laminaatin lämpöpitenemiskertoimet saavuttavat ääriarvonsa, ovat riippumattomia käytetyn yhdensuuntais-kerroksen lämpöpitenemiskertoimista, ts. riippuvat vain tämän kimmo-ominaisuuksista (E_{11} , E_{22} , G_{12} ja ν_{12}).

Edelleen kirjoituksessa on johdettu ehdot, joiden vallitessa laminaatin lämpöpitenemiskertoimet saavat ääriarvoja "triviaaleista" kohdista - $\theta = 0^\circ$ ja 90° - poikkeavissa kohdin. Avoimella välillä $(0, 90^\circ)$ voi olla vielä 2,1 tai ei yhtään ääriarvokohtaa riippuen G_{12} :n suhteellisesta arvosta.

LIITE A

Muunnoskaavasta (12) saadaan [Q] matriisin alkioille lausekkeet

$$\begin{aligned}
 \bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta \\
 \bar{Q}_{12} &= Q_{12} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) + (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\
 \bar{Q}_{22} &= Q_{11} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta \\
 \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta \\
 \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta \\
 \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta)
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

Kaavan (14) perusteella

$$\begin{aligned}
 \alpha_{xx} &= \alpha_{11} \cos^2 \theta + \alpha_{22} \sin^2 \theta \\
 \alpha_{yy} &= \alpha_{11} \sin^2 \theta + \alpha_{22} \cos^2 \theta \\
 \alpha_{xy} &= 2(\alpha_{11} - \alpha_{22}) \sin \theta \cos \theta
 \end{aligned} \tag{A.2}$$

LÄHTEET

1. R.M. Jones, Mechanics of Composite Materials, Scripta Book Company, Washington D.C. 1975.
2. J.C. Halpin, Primer on Composite Materials: Analysis, Technomic Publishing Co., Inc., Lancaster 1984.
3. S.W. Tsai, Composites Design, Think Composites, Dayton 1987.
4. P.K. Mallick, Fiber-Reinforced Composites - Materials, Manufacturing and Design, Marcel Dekker, Inc., New York 1988.
5. A.A. Fahmy and A.N. Ragai, Thermal Expansion of Graphite-Epoxy Composites. Journal of Applied Physics, 1970, Vol. 41, No. 13, s. 5112 - 5115.
6. J.C. Halpin and N.J. Pagano, Consequences of Environmentally Induced Dilatation in Solids. Proceedings of 6th Annual Meeting of the Society of Engineering Science, Princeton University, Nov. 1968, s. 33 - 45.
7. N.J. Pagano, Exact Moduli of Anisotropic Laminates. Teoksessa: G.P. Sendeckyj, toim., Mechanics of Composite Materials, V2, Academic Press, New York 1974, s. 23 - 44.

Antti Pramila, professori, Oulun Yliopisto, Konetekniikan osasto, Teknillinen mekaniikka.