

PAALUN ANALYSOINTI KOTIMIKROLLA

Markku Heinisuo

TIIVISTELMÄ

Rakenteiden mekaniikka Vol. 22

No 2 1989, s. 23 - 41

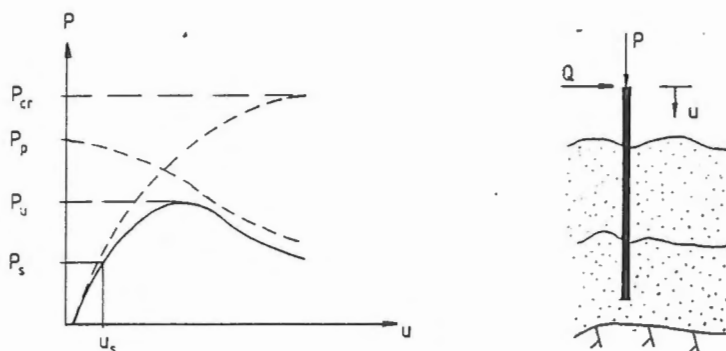
Artikkelissa esitetään tarkka elementtimenetelmä puristetulle paalulle, kun Winkler-tyyppisen alustan alustaparametrit ja normaalivoima ovat elementteittäin vakioita. Paalun oletetaan olevan elementteittäin tasajäykkä kimmainen Bernoulli-Euler-tyyppinen sauva ja geometrinen epälineaarisuus otetaan huomioon. Esimerkeillä näytetään millaisia parametriseja tarkasteluja laaditulla ohjelmalla voidaan suorittaa. Joitakin ohjelman laajennusmahdollisuuksia esitetään. Teorian perusteella on laadittu laskentaohjelma kotimikrolle ja ohjelma on tarkastettu vertaamalla ohjelman antamia tuloksia kirjallisuudesta löytyviin vertailuarvoihin.

LÄHTÖKOHTA

Paalujen ja paaluryhmien analysointiin löytyy tänä päivänä kaupallisesti saatavia ohjelmistopaketteja, jotka soveltuvat sekä materiaaliltaan että geometrialtaan epälineaaristen statiikan ja dynamiikan tehtävien ratkaisuun. Toistaiseksi nämä paketit vaativat suurehkon tietokoneen ja lisäksi ne ovat kalliita. Lukumäärältään enin osa maamme insinööritoimistoista on pieniä, muutaman hengen yksiköitä, joille isojen pakettien hankinta on mahdotonta. Laajat elementtimenetelmäohjelmistot ovatkin nykyisin lähinnä tutkimuslaitosten ja suurten firmojen käytössä. Sen sijaan mikroluokan tietokoneet (tässä kotimikrolla tarkoitetaan hintaluokan 5000 - 15000 mk:n konetta) kuuluvat tänä päivänä usean pienenkin toimiston varustukseen. Näiden käyttö on pääasiassa taloudellis-hallinnollisia sovellutuksia, koska näihin löytyy markkinoilta halpoja sovellutuksia. Vähän järeämpiin mikrotietokonei-

siin on saatavilla elementtipaketteja hintaan noin \$1000. Nämä ovat usein suljettuja paketteja, jolloin niiden kytkennässä CAD-järjestelmiin ja taloudellis-hallinnollisiin paketteihin joudutaan usein tekemään paljon räätälöintityötä. Avoimen järjestelmän etuna on se, että ohjelmallisesti voidaan järjestää kytkennät eri tietokantojen välille esimerkiksi maan päällä olevan rakennuksen ja maan alla olevien perustusten (esim. paalujen) tietokoneavusteinen rakennesuunnittelu. Toisaalta avoin järjestelmä mahdollistaa sen, että ohjelmointitaitoinen insinööri voi muokata ohjelmaa omien tottumustensa ja mitoitusrutiiniensa mukaiseksi. Eriytyisen ilahduttavaa on se, että joissakin viime aikoina julkaistuissa kirjoissa on mukana "lerppu" tai "korppu", jossa on ohjelmoituna kirjan oleellisimmat tulokset.

Rakenteen suunnittelussa on tarkastettava ainakin kaksi asiaa: rakenteen kantokyky ja siirtymätila. Paaluille, kuten muillekin rakenteille voidaan laskea kuvan 1 mukainen voima-siirtymä-kuvaaja, kun käytössä on materiaaliltaan ja geometrialtaan epälineaarisen rakenteen analysointiin sopiva ohjelma. Kuvassa 1 P on paalua puristava staattinen kuormitus ja u on kuormituskohdan painuma. Koekuormituksessa päädytään samankaltaiseen käyrään. Suunnittelutilanteessa tarvitaan äärimmäinen arvo P, josta tietyllä varmuusfilosofialla päätellään sallittu kuormitus P. Tätä vastaava siirtymä u tarvitaan siirtymätilan arviointiin. Tänä päivänä tämä ei ole rakennesuunnittelijan rutiinia, mutta ehkä tulevaisuudessa teorian ratkaisualgoritmien ja tietokoneiden kehittyessä.



Kuva 1. Paalun voima-siirtymä-kuvaaja.

Käytännössä kuormitus P pidetään usein niin pienenä, että rakennusmateriaali (tässä paalu + maa) säilyy kimmoisena. Äärimmäistä kuormitusta voidaan usein arvioida konservatiivisella Rankine-Merchant-kaavalla, jolla voi yhdistellä erilaisia kriittisiä tiloja (Heinisuo, 1983). Dynamiikan ominaisarvottehtävässä tästä käytetään nimeä Dunkerleyn likikaava. Kyseisessä paalutehtävässä yhdistetään usein kimmainen nurjahduskuormitus P ja jäykkä-plastisella materiaaalimallilla laskettu myötökuorma P . Tuloksena saadaan varmallalla puolella oleva arvio äärimmäiselle kuormitukselle P , josta käytetään myös nimitystä ei-elastinen (tai kimmo-plastinen) nurjahduskuormitus

$$\frac{P_u}{P_{cr}} + \frac{P_u}{P_p} = 1 \rightarrow P_u = \frac{P_p P_{cr}}{P_{cr} + P_p} \quad (1)$$

Myötökuorma P lasketaan plastisuusteorian mukaan (usein käsin) ja siihen ei tässä puututa (ks. esim. Greimann,

Wolde-Tinsae, 1988). Jatkossa keskitytään kimmoisen tasonurjahduskuormituksen P laskentaan sekä paalun siirtymien määritykseen.

Maan sisässä olevan paalun nurjahduskuormituksen määrittäminen tekee normaalia pilarin nurjahduskuormituksen laskentaa hankalammaksi paalua ympäröivän maan epämääräiset mekaaniset parametrit. Kitka maan ja paalun välillä aiheuttaa sen, että normaalivoima ei ole vakio paalun matkalla, vaan muuttuu jatkuvasti mentäessä syvemmälle maan sisään. Tätä ilmiötä kuvataan parametrilla k . Paalun taipuessa maa vastustaa paalun sivusiirtymää ja tätä ilmiötä kuvataan parametrilla k_v . Seuraavassa on esitetty siirtymämenetelmään perustuva tarkka elementtimenetelmä, jossa oletetaan, että elementin matkalla normaalivoima on vakio (eli parametri $k = 0$) ja lisäksi parametria k arvioidaan Winklerin mukaan eli se on vakio ja $p = k v$, missä p on maan paine paalua vastaan ja v on paalun taipuma. Paalun oletetaan olevan Bernoulli-Euler-tyyppinen sauva. Kohtuullinen geometrinen epälineaarisuus otetaan huomioon tavalliseen tapaan laskemalla normaalivoiman aiheuttama lisävaakavoima paaluun sen taipuessa. Tehtävää on näin menetellen idealisoitu niin paljon, että suhteellisen yksinkertainen tarkka analyttinen ratkaisu voidaan johtaa, vaikka maan ominaisuudet muuttuisivatkin (paloittain vakiona) paalun matkalla. Esitetty menetelmä sopii mikrotietokoneympäristöön, koska laskennassa voidaan käyttää ns. luonnollisia elementtejä, mikä pienentää tarpeellisten matriisien kokoa.

Menetelmän laajentamista materiaaliltaan epälineaariseen tehtävään tutkitaan parhaillaan (Nieminen, 1989) toisen sovellutuksen yhteydessä. Menetelmää voisi myös ajatella laajennettavaksi paaluryhmän analysointiin. Tällöin paaluun kohdistuva kuormitus (mm. normaalivoima) ei ole tunnettu vaan ratkaistava suure. Muissa sovellutuksissa menetelmä on toiminut hyvin dynamiikan

tehtävissä (Malmi, 1987, Malmi, 1988). Pienillä muutoksilla teoria (ja ohjelma) on laajennettavissa tukiseinien laskentaan. Kääntämällä paalu vaakasuoraan ja vaihtamalla parametrin k arvoksi k_v , voidaan menetelmää käyttää maanvaraisten (tai osittain maanvaraisten) lattiapalkkien laskentaan. Toisaalta tuntemalla vallitsevat differentiaaliyhtälöt ja reunaehdot, voidaan analogiaa hyväksi käyttäen samalla ohjelmalla analysoida väännettyjä palkkeja Vlasovin teorialla tai sylinterikuoria pyörähdyssymmetrisessä kuormituksessa tai päinvastoin sylinterikuori-ohjelmalla (Outinen, 1988) voidaan analysoida paaluja tarkasti. Jatkossa pitäydytään kuitenkin edellä mainittuun paalutehtävään eli Bernoulli-Euler-tyyppisen paalun siirtymien ja nurjahduskuormituksen määrittämiseen, kun paalun normaalivoima ja parametri k ovat paloittain vakioita.

TEHTÄVÄN RATKAISU

Kyseessä oleva tehtävä on ratkaistavissa analyttisesti, tarkasti, ratkaisemalla tietyt neljän kerrallisen differentiaaliyhtälöt. Käytännön suunnittelutyössä tämän ratkaisumallin käyttö rajoittuu tapaukseen, jossa maan ominaisuudet eivät muutu paalun matkalla. Muissa tapauksissa ratkaisuun kuluva aika on liian iso ja lisäksi virhemahdollisuus kaavojen johtamisessa on suuri kaavojen monimutkisuuden vuoksi.

Tehtävä on ratkaistavissa myöskin likimäärin esimerkiksi elementtimenetelmällä käyttäen kehäohjelmaa ja mallintamalla maa kimmoisilla veto- tai puristussauvoilla (jousilla). Jousia on asetettava riittävän tiheään, jotta jatkuvan maan diskreetissä mallintamisessa ei tehdä turhaa virhettä, mikä aiheuttaa hankaluuksia tulosten käyttökelpoisuutta arvioitaessa. Tässä likimenetelmässä laskentamallin geometrian luominen on melko työlästä, jos käytössä ei ole tehokasta generointiohjelmaa, mikä ei yleensä sisälly halpuihin mikrosovellutuksiin. Lisäksi laskentamallissa tulee voida käsitellä melko suuria

(mikroympäristössä) matriiseja, mikä hidastaa laskentaa. Toisaalta siirtymämenetelmään perustuva elementtimenetelmä mahdollistaa joustavien, suhteellisen yleisten ohjelmien kirjoittamisen. Merkittävin hyvä puoli kuvatussa likimenetelmässä on sen saatavuus: kehäohjelma löytyy kai jo kaikista toimistoista.

Edellä on kuvattu kahta ehkä eniten käytettyä menetelmää kyseisen tehtävän ratkaisussa. Yhdistämällä menetelmien hyvät puolet: analyttisen ratkaisun tarkkuus ja elementtimenetelmän joustavuus, saadaan tarkka elementtimenetelmä. Ideana on tällöin se, että differentiaaliyhtälö ratkaistaan vain kerran (elämän aikana) ja ratkaisu kirjoitetaan sopivassa muodossa tietokoneen muistiin uutta käyttökertaa varten. Siirtymämenetelmään perustuva elementtimenetelmä on osoittautunut sopivasti proseduuriksi tallentamista varten. Tarkan elementtimenetelmän kiistaton etu verrattuna likimääräiseen elementtimenetelmään on se, että tarpeellisten matriisien koko pienenee oleellisesti, mikä on taloudellista laskennan kannalta ja erityisesti silloin, kun on kyse mikrosovellutuksesta. Matriisien koko pienenee, koska tarkassa elementtimenetelmässä käytetään luonnollisia elementtejä, eli elementtejä on vain epäjatkuvuuskohtien välillä (esim. maakerrokset), kun likimenetelmässä on syytä käyttää tiheämpää elementtijakoa. Tästä saavutetaan myös se hyöty, että geometria- ja laskentamallin välillä on helppo kommunikoida.

Seuraavassa on esitetty tarkka elementtimenetelmä (tässä tapauksessa tarkat jäykkyyismatriisit) paalun siirtymäsuureiden ja tasonurjahduskuormituksen laskentaa varten. Kirjallisuudesta löytyy kahden perustapauksen jäykkyyismatriisit (paalu ilman alustaa ja "lyhyen" paalun kaavat), kolmas perustapaus ("pitkä" paalu) saadaan raja-arvona "lyhyen" paalun kaavoista. Lopuksi on esitetty numeeroesimerkkejä.

TARKAT JÄYKKYYSMATRIISIT

Tavoitteena on esittää kuvan 2 palkkielementille tarkka kuvaus voimavektorin $\underline{F} = (F_1 \ F_2 \ F_3 \ F_4)^T$ ja siirtymävektorin $\underline{X} = (X_1 \ X_2 \ X_3 \ X_4)^T$ välillä, kun käytetään kuvan 2 koordinaatistoa.



Kuva 2. Merkinnot.

Elementin taivutusjäykkyys on EI , pituus L ja alustaluku k ($=k$), kun käytetään Winklerin alustamallia. Puristava normaaliavoima on P ja kaikki em. suureet oletetaan vakioiksi elementin matkalla. Jako elementteihin suoritetaan siten, että oletus toteutuu riittävän tarkasti. Etsitty kuvaus on muotoa

$$\underline{F} = [K] \underline{X} , \quad (2)$$

missä K on symmetrinen 4×4 jäykkyysmatriisi.

Osa paalusta voi olla ilmassa, vedessä tai niin löysässä maassa, että alustan tukevaa vaikutusta ei oteta huomioon. Tällöin on voimassa yhtälö $k = 0$ ja tarkastellaan aluksi tätä tilannetta. Tarkan jäykkyysmatriisin tähän tapaukseen on johtanut Przemieniecki (Przemieniecki, 1968, ks. myös Allen, Bulson, 1980). Kun käytetään apumuuttujia

$$P_E = \frac{\pi^2 EI}{L^2} ,$$

$$\theta = \pi \sqrt{P/P_E} ,$$

$$D_1 = \tan(\theta/2) - (\theta/2) ,$$

(3)

niin tulokseksi saadaan

$$\begin{aligned}
 K_{11} &= -K_{13} = K_{33} = \frac{EI\theta^3}{2L^3 D_1}, \\
 K_{12} &= K_{14} = -K_{23} = -K_{34} = \frac{EI\theta^2}{2L^2} \left[\frac{\tan(\theta/2)}{D_1} \right], \\
 K_{22} &= K_{44} = \frac{EI\theta}{2L} \left[\frac{1 - \theta/\tan\theta}{D_1} \right], \\
 K_{24} &= \frac{EI\theta}{2L} \left[\frac{\theta/\sin\theta - 1}{D_1} \right].
 \end{aligned} \tag{4}$$

Normaalivoiman ollessa pieni ($P < 0.4 P_c$), matriisi K voidaan jakaa kahteen osaan $K = K_E + K_G$ kehittämällä trigonometriset funktiot sarjoiksi muuttujan suhteen. Osoitetaan, että matriisi K_E on taivutustapauksen (paalu ilman normaalivoimaa) tarkka jäykkyyismatriisi, jolloin paalun taipumaa solmujen välillä kuvaa kolmannen asteen polynomi. Matriisi K_G on geometrinen jäykkyyismatriisi, jolla otetaan likimääräisesti huomioon normaalivoiman vaikutusta poikittaissiirtymiin. Jatkossa käytetään tarkkoja funktioita (4) ja kun elementin vasemman pää siirtymä ja voimasuureet on laskettu, niin elementin kohdan x siirtymä on

$$v(x) = X_1 + \frac{\sin(\gamma x)}{\gamma} \cdot X_2 + \frac{\gamma x - \sin(\gamma x)}{\gamma P} \cdot F_1 + \frac{\cos(\gamma x) - 1}{P} \cdot F_2, \tag{5}$$

missä on käytetty merkintää $\gamma = \sqrt{P/EI}$.

Tarkastellaan seuraavaksi tilannetta, jossa maan tukeva vaikutus paalun poikittaissiirteeseen otetaan huomioon eli $k > 0$. Tarkka jäykkyyismatriisi myös tähän tapaukseen löytyy kirjallisuudesta (Heinisuo, 1984, ks. myös Yankelevsky) Eisenberger, 1986). Tapausta, jossa paalun leik-

kausmuodonmuutos otetaan huomioon, on tarkasteltu äskettäin (Cheng ja muut, 1988). Käytännön sovellutuksia rajoittamatta voidaan olettaa, että $P < 2 \sqrt{kEI}$. Käytetään apumuuttujia

$$\lambda = \sqrt[4]{k/4EI}, \quad \varepsilon = P/4EI, \quad \alpha = \sqrt{\lambda^2 + \varepsilon}, \quad \beta = \sqrt{\lambda^2 - \varepsilon},$$

$$D_2 = \alpha^2 \sinh^2(\beta L) - \beta^2 \sin^2(\alpha L), \quad (6)$$

jolloin tulos on

$$K_{11} = K_{33} = \frac{4\alpha\beta\lambda^2 EI}{D_2} [\alpha \sinh(\beta L) \cosh(\beta L) + \beta \sin(\alpha L) \cos(\alpha L)],$$

$$K_{12} = -K_{43} = K_{21} = -K_{34} = \frac{2\lambda^2 EI}{D_2} [\beta^2 \sin^2(\alpha L) + \alpha^2 \sinh^2(\beta L)],$$

$$K_{23} = K_{32} = -K_{14} = -K_{41} = -\frac{4\alpha\beta\lambda^2 EI}{D_2} \sin(\alpha L) \sinh(\beta L),$$

$$K_{13} = K_{31} = -\frac{4\alpha\beta\lambda^2 EI}{D_2} [\beta \sin(\alpha L) \cosh(\beta L) + \alpha \cos(\alpha L) \sinh(\beta L)],$$

$$K_{22} = K_{44} = \frac{2\alpha\beta EI}{D_2} [\alpha \sinh(\beta L) \cosh(\beta L) - \beta \sin(\alpha L) \cos(\alpha L)],$$

$$K_{24} = K_{42} = -\frac{2\alpha\beta EI}{D_2} [\alpha \sinh(\beta L) \cos(\alpha L) - \beta \sin(\alpha L) \cosh(\beta L)], \quad (7)$$

Interpolaatiokaava elementin matkalla on

$$\begin{aligned}
 v(x) = & \left[\cos(\alpha x) \cosh(\beta x) - \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2\alpha\beta} \sin(\alpha x) \sinh(\beta x) \right] \cdot X_1 \\
 & + \frac{1}{2(\alpha^2 + \beta^2)} \left[\frac{3\alpha^2 - \beta^2}{\alpha} \sin(\alpha x) \cosh(\beta x) + \frac{3\beta^2 - \alpha^2}{\beta} \cos(\alpha x) \sinh(\beta x) \right] \cdot X_2 \\
 & + \frac{1}{2(\alpha^2 + \beta^2)EI} \left[\frac{1}{\alpha} \sin(\alpha x) \cosh(\beta x) - \frac{1}{\beta} \cos(\alpha x) \sinh(\beta x) \right] \cdot F_1 \\
 & - \frac{1}{2\alpha\beta EI} \sin(\alpha x) \sinh(\beta x) \cdot F_2 .
 \end{aligned} \tag{8}$$

Jos paalu on vedetty, niin termien α ja β paikkaa on vaihdettava kaavoissa.

Havaitaan, että jäykkyyismatriisin alkioissa on eksponenttifunktioita. Näiden laskenta onnistuu vaivatta tietokoneella, mutta tähän liittyy eräs vaara: tietokone ei anna mitään virheilmoitusta, jos se käsittelee niin suuria tai pieniä lukuja, että laskentatarkkuus katoaa. Ainoastaan tuloksista voi nähdä, että ne ovat väärin. Suurten lukujen vaara vaanii, jos paalu on "pitkä" eli kuten Timoshenko määritteli $\lambda L > 5$. Toisaalta hyvin pieni normaali-voiman arvo voi myöskin kaataa laskennan (Oliveto, Cuomo, 1986). Laskutarkkuuden säilyminen tai katoaminen on luonnollisesti konekohtainen asia. Kokeilut numeroarvoilla osoittavat, että Timoshenkoa mukaillen "pitkän" paalun raja $\beta L > 5$ on riittävä ja asymptoottisia matriiseja tapaukseen $P \rightarrow 0$ ei tarvita. "Pitkälle" paalulle elementin tarkka jäykkyyismatriisi saadaan rajakäynnillä edellisistä. Tulos on

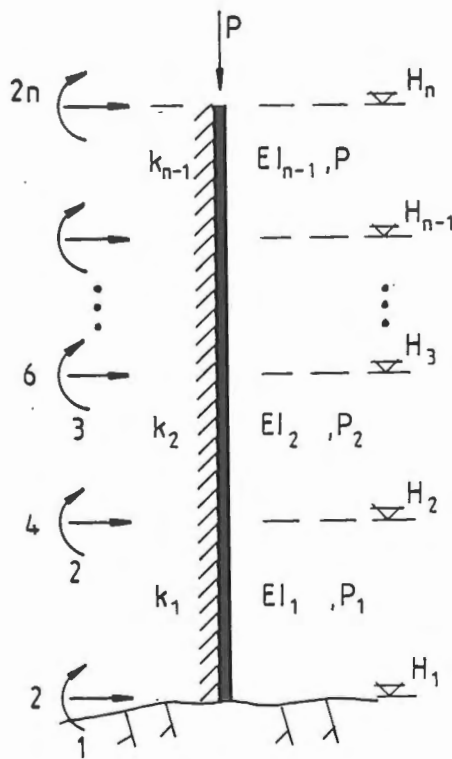
$$\begin{aligned}
 K_{11} = K_{33} &= 4\beta\lambda^2 EI , \\
 K_{12} = K_{21} &= -K_{43} = -K_{34} = 2\lambda^2 EI , \\
 K_{22} = K_{44} &= 2\beta EI ,
 \end{aligned} \tag{9}$$

ja muut ovat nollija. Havaitaan, että "pitkällä" paalulla ei ole kytkentää eri päiden välillä eli toinen pää ei

tiedä, mitä toisessa tapahtuu. Interpol'aatiota pään lähellä voidaan laskea kaavasta (8) niin pitkälle kuin koneen tarkkuus riittää. "Hyvin lyhyttä" paalua eli tapaus- ta, missä paalu voi saada vain jäykän kappaleen liikkeen, ei käsitellä erikseen. Laskelmat jäävät lukijalle koti- laskuksi. Tulokset on annettu esimerkin yhteydessä.

LASKENTARUTIINIT

Kuvassa 3 on esitetty laskentaan tarvittavat lähtötiedot.



Kuva 3. Lähtötiedot.

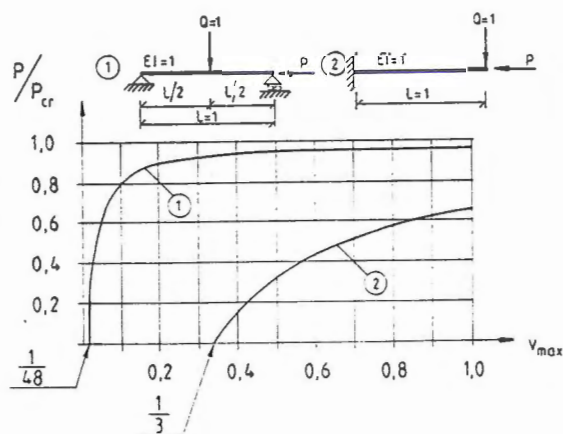
Kuvaan on merkitty myös globaalikoordinaatisto, johon kytkevätön koko paalun jäykkyysmatriisi voidaan koota sijoittelusummauksella elementtien jäykkyysmatriiseista normaaliin tapaan. Laskentaohjelmassa käytetään ns. suoraa elementtimenetelmää, jossa ensin kootaan em. kokonaisjäykkyysmatriisi, josta tuetut koordinaatit "pyyhitään" yli. Tämä menetelmä on nyt käyttökelpoinen vaikka se tuhlaa tietokoneen muistia, koska $2n \times 4$ matriisi (nauhan leveys on tässä tapauksessa 4) sijoitetaan keskusmuistiin kokonaan. Tämä menettely on nyt perusteltua, koska kyseessä olevassa tehtävässä tuentapistet ovat vain paalun päissä ja joskus ei niissäkään, joten tuhlaus ei ole kovin vakavaa. Lineaarinen yhtälöryhmä voidaan ratkaista standardimenetelmällä. Laaditussa ohjelmassa käytetään Gaussin eliminointia perusmuodossaan.

Jos lopullinen jäykkyysmatriisi ei käännä eli se on singulaarinen, niin normaalivoima P on nurjahduskuormituksen arvossa. Yksi tapa etsiä nurjahduskuormitus onkin kasvattaa normaalivoimaa P ja kun determinantin merkki vaihtuu, niin nurjahduskuormitus on löytynyt. Laaditulla ohjelmalla haetaan nurjahduskuormitus laskemalla paalun vaakasiirtymää ja tarkkailemalla sen muutosta normaalivoiman muuttuessa. Jos jonkun pisteen siirtymä kasvaa paljon normaalivoiman kasvaessa vain vähän, niin nurjahduskuormitus on löytynyt. Edellä esitetyt kokeilumetodit eivät sovellu systemaattiseen tietokonelaskentaan, vaikka ne ovatkin havainnollisia käytössä (vrt. esimerkit). Tarkan elementtimenetelmän ominaisarvotehtävään (lue nurjahdustehtävään) on kehitetty käyttökelpoinen algoritmi (Williams, Wittrick, 1974) ja itse asiassa on esitetty, että tarkan elementtimenetelmän käytön ominaisarvotehtävässä teki käyttökelpoiseksi vasta kyseisen algoritmin keksiminen (Friberg, 1986).

ESIMERKKEJÄ

Laaditun ohjelman testaus aloitettiin yksinkertaisilla tapauksilla, joille löytyi analyttiset ratkaisut kirjallisuudesta. Kuvassa 5 on piirrettynä voima-siirtymäkäyriä

kahdelle Eulerin tapaukselle laskettuna kuvan ykkösarvoilla. Siirtymät kasvavat voimakkaasti puristavien voimien lähestyessä arvoja π^2 ja $\pi^2/4$. Kuvan ykkösarvoilla tehtiin myös kokeiluja laskutarkkuuden säilymisestä, kun puristava voima lähenee arvoa 0. Osoittautui, että käytetyt mikrot laskivat luotettavia tuloksia (siirtymä pieneni voiman pienetessä) vielä arvolla $P/1000$ näissä tapauksissa. Kokeiluja suoritettiin^{er} seuraavilla mikroilla: MIKROMIKKO, TANDY JA HP-VECTRA. Paaluproblemaa ajatellen tämä raja ei haitanne teorian soveltamista käytäntöön, koska paalussa on aina tuon verran kuormitusta. Maksimi poikittaissiirtymän arvo rajalla oli noin 0.1 % tarkan poikittaissiirtymän arvosta, joka on laskettu siten, että normaalivoima on nolla (vrt. kuva 4). Tarkka jäykkyyssmatriisi tapaukseen, jossa normaalivoima on nolla, löytyy kaikista alan oppikirjoista palkille ilman alustaa (ks. esim. Bulson, Allen, 1980) ja kimmoisella alustalla olevalle palkille se on myös johdettu (esim. Heinisuo, 1984, Eisenberger et al, 1986). Kokeilut numeroarvoilla toisessa tarkan elementtimenetelmän sovellutuksessa ovat osoittaneet, että rajaa on kasvatettava, kun analysoidaan vedettyjä sauvoja (Möttönen, 1987).



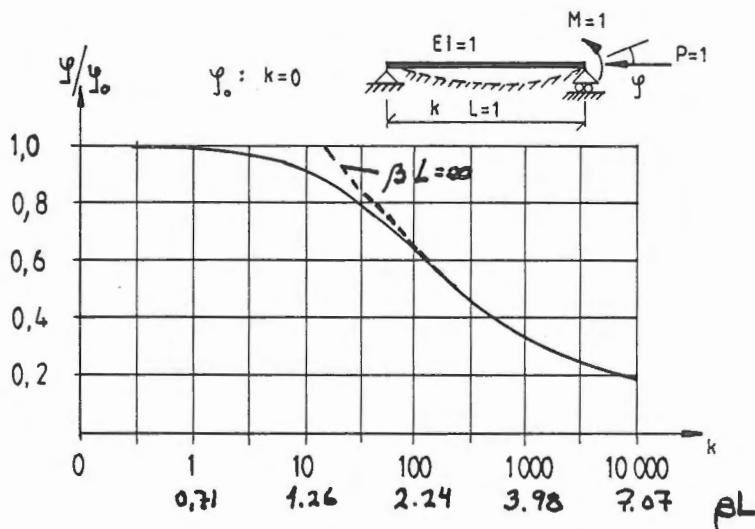
Kuva 4. Eulerin tapauksia.

Kuvassa 5 on piirrettyä paalun kiertymän arvoja, kun alustaparametri muuttuu. Vertailuarvona on käytetty kiertymän arvoa paalulle ilman alustaa, mikä lasketaan tunnetusta Berryn funktiosta

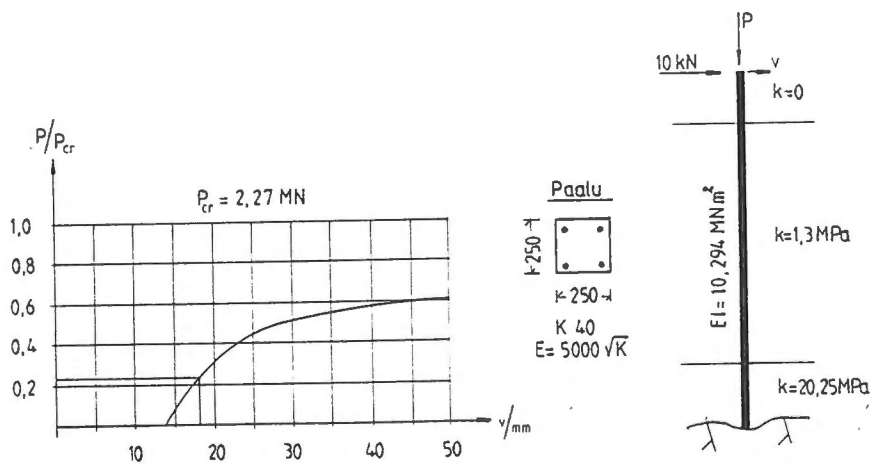
$$\varphi_0 = \frac{ML}{3EI} f(\gamma L), \quad f(\gamma L) = \frac{3}{\gamma L} \left(\frac{1}{\gamma L} - \frac{1}{\tan(\gamma L)} \right) \quad (10)$$

Kuvasta 5 nähdään, että alustan jäykistyessä paalun pään kiertymä voidaan laskea suhteellisen tarkasti "pitkän" paalun kaavoilla, kun $\lambda L > 5$.

Tarkastellaan seuraavaksi kuvan 6 tapausta, missä paalu on osittain ilmassa, osittain savessa ja osittain sorassa. Kuvassa 6 on piirrettyä paalun voima-siirtymä-kuvaa ja nurjahduskuormaksi saadaan 2.27 MN, kun alustaluku on oletettu paloittain vakioksi kuvan mukaan ja kitkavoimat on jätetty ottamatta huomioon. Tarkastellaan lähemmin tilannetta, kun $P = 500$ kN.



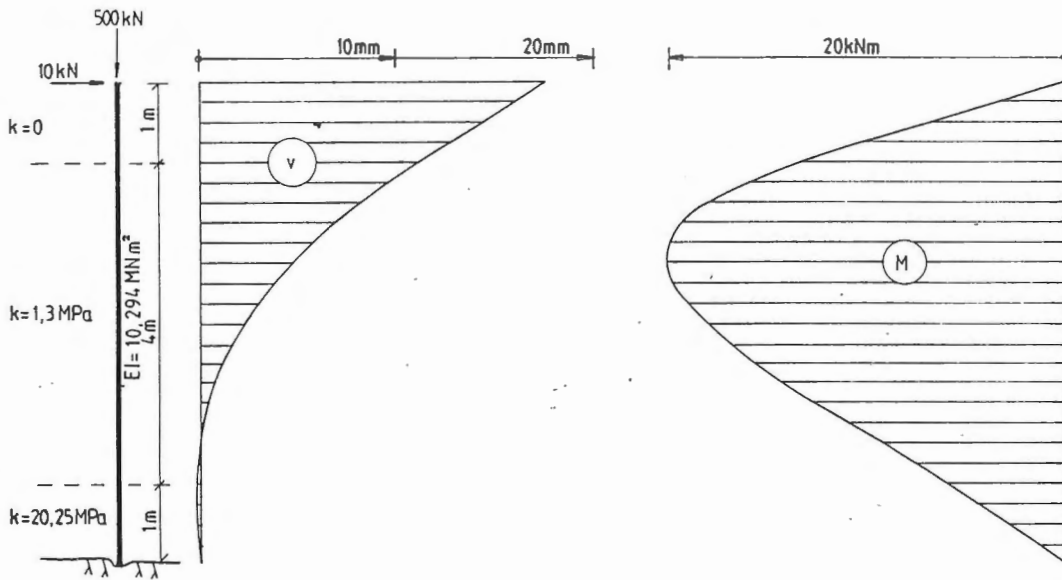
Kuva 5. Alustaparametrin vaikutus paalunpään kiertymään.



Kuva 6. Paaluesimerkki.

Kuvassa 7 on piirrettyä paalun taipuman ja momentin kuvaajat. Maksimi taivutusmomentti on noin 20,4 kNm ja tällä kohdalla paalun teräsbetonipoikkileikkaus on kokonaan puristettu, joten se säilyy halkeamattomana. Paalun yläpäähän vaakasiirtymä on 17,64 mm ja vaakatukivoima alapäässä on 5,49 kN. Jos kitka alapäässä ei riitä siirtämään (vaadittu kitkakerroin $5,49/500=0,011$) tätä vaakavoimaa, niin alapäähän ei anneta lähtötietona tukea. Paalun yläpäähän vaakasiirtymä on näin laskien 17,92 mm ja alapää siirtyy 0,23 mm vasempaan. Jos sorakerros jaetaan 10 elementtiin ja alustaparametria muutetaan lineaarisesti arvosta 18 MPa arvoon 22,5 MPa, niin yläpäähän vaakasiirtymäksi saadaan 17,64 mm, kun alapää on oletettu tueksi vaakasuunnassa. Jos savikerros jaetaan 20 element-

tiin ja paalun normaalivoiman oletetaan muuttuvan lineaarisesti arvosta P arvoon $P/20$ (sorassa), niin yläpään vaakasiirtymä arvolla $P=500$ kN on 17,20 mm. Vaakatukivoima alapäässä on tällöin 5,29 kN ja vaadittu kitkakerroin on 0,21, jotta paalun alapää pysyisi paikallaan.



Kuva 7. Paalun taipuma ja momentti.

Lopuksi on vielä tarkastettu "hyvin lyhyen" paalun tapaus eli se, nurjahtaako paalu jäykkänä kappaleena (kuva 8). Laskelmat voidaan suorittaa esimerkiksi potentiaalienergian minimiperiaatteen mukaan. Tulokset ovat seuraavat:

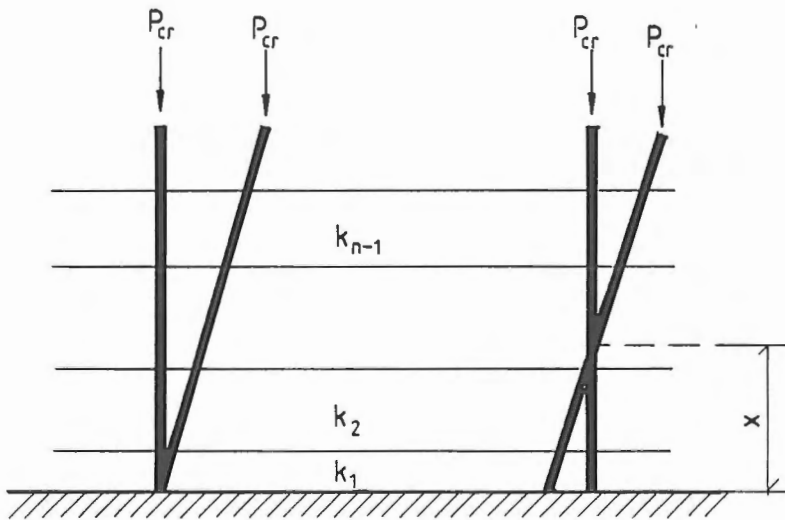
$$P_{cr} = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} k_i (H_{i+1}^3 - H_i^3)}{3H_n}, H_1=0, \text{ (alapää tuettu) },$$

$$P_{cr} = \frac{\frac{1}{3}[\sum k_i (H_{i+1} - H_i)] [\sum k_i (H_{i+1}^3 - H_i^3)] - \frac{1}{4}[\sum k_i (H_{i+1}^2 - H_i^2)]^2}{H_n \sum k_i (H_{i+1} - H_i)}, \text{ (alapää tukematon) }$$

$$x = \frac{\sum k_i (H_{i+1}^2 - H_i^2)}{2 \sum k_i (H_{i+1} - H_i)}, \text{ (kiertokeskiö tukemattomassa tapauksessa) } . \quad (11)$$

Kuvan 6 tapauksessa saadaan numeroarvot

$$\begin{aligned} \sum k_i (H_{i+1} - H_i) &= 25.450 \text{ MN/m} , \\ \frac{1}{2} \sum k_i (H_{i+1}^2 - H_i^2) &= 25.725 \text{ MN} , \\ \frac{1}{3} \sum k_i (H_{i+1}^3 - H_i^3) &= 60.483 \text{ MNm} , \\ P_{cr} &= 10.081 \text{ MN (tuettu) } , \\ + P_{cr} &= 5.747 \text{ MN (tukematon) } , \\ x &= 1.011 \text{ m} . \end{aligned} \quad (12)$$



Kuva 8. Paalun nurjahdus jäykkänä kappaleena.

LÄHDEKIRJALLISUUS

Heinisuo M., Rajakuormitusta koskeva alarajalause ja sen soveltaminen, Rakenteiden mekaniikka, Vol. 14, No 2, 1981, 17-37.

Greimann L., Wolde-Tinsae A., Design model for piles in jointless bridges, Journal of Structural Engineering, Vol. 114, No 6, June, 1988, pp. 1354-1371.

Nieminen A., Materiaaliltaan epälineaarisen kerrospalkin analyysi elementtimenetelmällä, Tampereen teknillinen korkeakoulu, Rakennustekniikan osasto, Diplomityö, Tampere, 1989, (valmisteilla).

Malmi S. Kaksipaarteisen Sandwich-palkin tarkka dynaaminen analyysi elementtimenetelmällä, Tampereen teknillinen korkeakoulu, Rakennustekniikan osasto, Diplomityö, Tampere, 1987.

Malmi S., Sandwich-palkin vapaa värähtely, Rakenteiden mekaniikka, Vol. 21, No 3, 1988, 14-36.

Outinen H., Application of exact finite element method to analysis of statics of thin elastic shells of revolution with axisymmetric loading, Tampere, 1988.

Przemieniecki J., Theory of Matrix Structural Analysis, New York, McGraw-Hill Book Company, 1968.

Allen, H.G., Bulson P.S., Background to Buckling. McGraw Hill Company (UK) Ltd, 1980.

Heinisuo M., Kimmoisella alustalla olevan palkin ratkaisusta, Tampereen teknillinen korkeakoulu, Rakennustieteikka, Raportti 7, Tampere, 1984.

Yankelesky D., Eisenberger M., Analysis of beam column on elastic foundation, Computers & Structures 23 (1986) 3 pp. 351-356.

Cheng F., Pantelides C., Static Timoshenko beam-column on elastic media, Journal of Structural Engineering, Vol. 114, No5, May, 1988, pp. 1152-1172.

Oliveto G., Cuomo M., The tangent stiffness matrix of elastic frame members for vanishingly small values of the axial force, Meccanica 21 (1986), pp. 144-150.

Williams F., Wittrick W., An automatic computational procedure for calculating natural frequencies of skeletal structures, Int. J. Mech. Sci. 12 (1970), pp. 781-791.

Friberg P., Beam element matrices derived from Vlasovs theory of open thin-walled elastic beams, Int. Journal for Numerical Methods in Engineering 21 (1985), pp. 1205-1228.

Eisenberger M., Yankelevsky D., Clastornik J., Stability of beams on elastic foundation, Computers & Structures 24 (1986) 1, pp. 135-139.

Möttönen A., Kaksipaarteisen Sandwich-palkin tarkka elementtimenetelmä taivutuspuristuksessa ja lämpökuormituksessa, Tampereen teknillinen korkeakoulu, Rakennustekniikan osasto, Diplomityö, Tampere, 1987.

Markku Heinisuo, Tekn.tri., Insinööritoimisto KPM-suunnittelu Oy, Tampere.