

VÄÄNTÖRASITETUN PALKIN SEKUNDAARINEN KÄYRISTYMISSJÄYHYYS

Timo Björk

Rakenteiden mekaniikka Vol. 21

No 4 1989, s. 3...24

TIIVISTELMÄ: Palkkirakenteiden käyristymisjäykkyyden oletetaan muodostuvan profiilin seinämän tangentiaalisen jäykkyyden lisäksi seinämän paksuussuuntaisesta taivutusjäykkyydestä. Tätä ns. sekundaarista käyristymisjäyhyyttä määritettäessä palkin poikkileikkauksen oletetaan kiertyvän vinoutumatta. Tällöin primaarinen käyristymisen estyminen synnyttää profiilin seinämään kalvojännitystilan ja sekundaarinen vastaavasti taivutusjännitystilan. Ilmiön vaikutus vääntökeskiön paikkaan voidaan ottaa huomioon. Sekundaarisella käyristymisjäyhyydellä todetaan olevan varsin vähäinen vaikutus rakenteen jäykkyyteen ja siirtymiin. Sensijaan seinämän paksuussuuntainen käyristyminen tai etenkin sen estyminen vaikuttaa oleellisesti paikallisiin jännityksiin, joten esimerkiksi tarkassa väsymismitoituksessa ilmiö tulisi ottaa huomioon.

JOHDANTO

Perinteisissä valssatuista tai hitsatuista profiileista tehdyissä rakenteissa estettyä vääntöä ei yleensä tarvitse ottaa huomioon, koska primaarista vääntörasitusta esiintyy harvoin ja sekundaarinen vääntö on vähämerkityksellinen. Kylmämuovaamalla valmistettujen avoprofiilien muoto on yleensä sellainen, että niihin syntyy väännössä aivan erilainen rasitustila kuin perinteisillä profiileilla ja estetyn väännön huomiotta jättäminen voi johtaa väärin johtopäätöksiin rakenteen väsymistä tai stabiiliutta arvioitaessa.

Tässä työssä tarkastellaan ns. sekundaarisen käyristymisjäyhyyden merkitystä rakenteissa, joissa estetty vääntö on otettava huomioon. Vlasovin ohutseinämäisiä palkkeja käsittelevässä perusteoksessa profiilin seinämää pidetään kalvomaisena elementtinä, jolla on vain primaarista käyristymisjäyhyyttä [1]. Tämän seinämän tangentiaalisen muuttuvan komponentin lisäksi palkeilla on myös paksuussuuntaisen taivutusjäykkyyden huomioonottava laattaefekti eli sekundaarinen käyristymisjäyhyys (eng. secondary warping tai thickness warping).

Sekundaarisen käyritysmisjäykkyys oli mukana jo Timoshenkon [2] ja Wagnerin [3] yksinkertaisten profiilien nurjadusteorioissa vuosisadan alussa. Kollbrunner ja Hajdin [4] esittivät yleistetyn teorian ohutseinämäisen sauvan vääntökäyttäytymistä 1970-luvulla. Heidän teoriansa lähtökohta on, että profiilin seinämässä vallitsee tasojännitystila ikäänkuin profiili olisi jäykistetty poikiyttaisjäykisteillä hyvin tiuhasti vinoutumisen estämiseksi. Oden ja Rippenberger [5] käsittelevät vain sellaisten profiilien sekundaarista käyritymistä, joilla ei ole primaarista käyritysmisjäyhyyttä lainkaan. Jännitystilan he olettavat kalvomaiseksi. Gelsvik [6] käsittelee sekundaarista käyritysmisjäykkyyttä varsin laajasti, mutta ei eritele estetyn väännön jännityskomponenttien ja venymien välistä yhtettä jännitystilan perusteella.

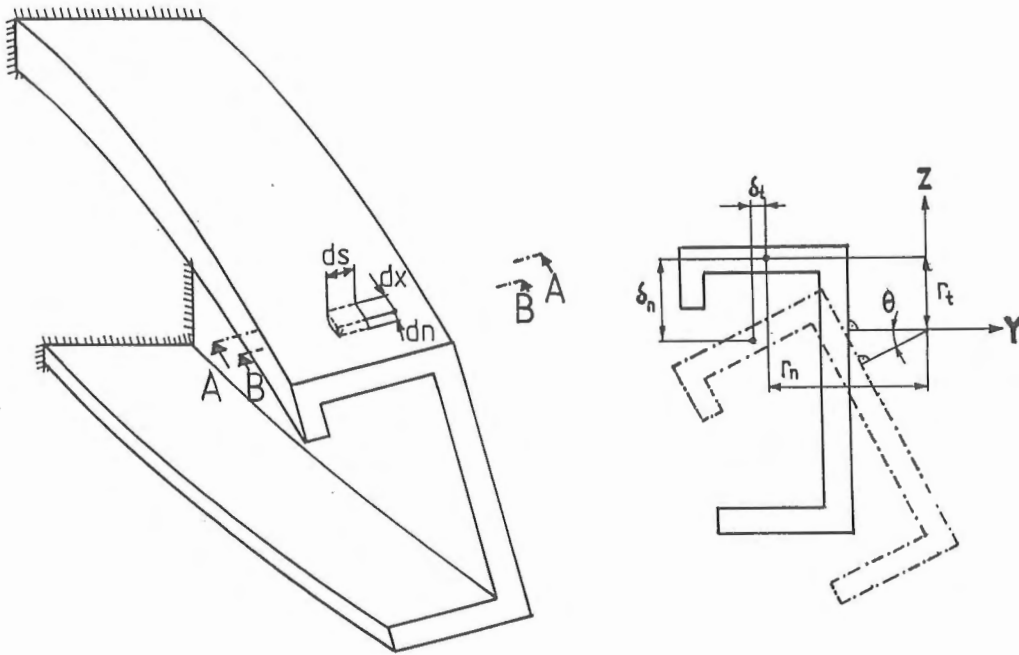
Tässä esityksessä vääntökuormitetun palkin oletetaan kiertyvän taivutustermin mukaan otosta huolimatta vinoutumatta, vaikka profiili on poikittaisjäykisteetön. Vinoutumattomuusoletuksesta seuraava jännitystila otetaan huomioon venymiä jännityksiksi muutettaessa. Lisäksi momenttiparin synnylle esitetään fysikaalinen tulkinta laajentaen Niemen [7] esittämää periaatetta myös sekundaariseen momenttiparin komponenttiin.

Sekundaarisella käyritysmisjäyhyydellä voisi olettaa olevan eniten käytännön merkitystä melko paksuseinämäisillä profiileilla. Ilmiöllä on ainakin teoreettista merkitystä sellaisten palkkien vääntö- ja nurjahduskäyttäytymisessä, joilla ei ole primaarista käyritysmisjäykkyyttä.

ESTETYN VÄÄNNÖN TEORIAA

Yleistä

Palkilla on Saint Venantin vääntöjäykkyuden lisäksi ns. käyritysmisjäykkyyttä, joista yhdessä palkin kokonaisvääntöjäykkyys muodostuu. Väännettäessä palkin poikki pinta normaalin kiertymisen lisäksi myös käyrityy (kuva 1).

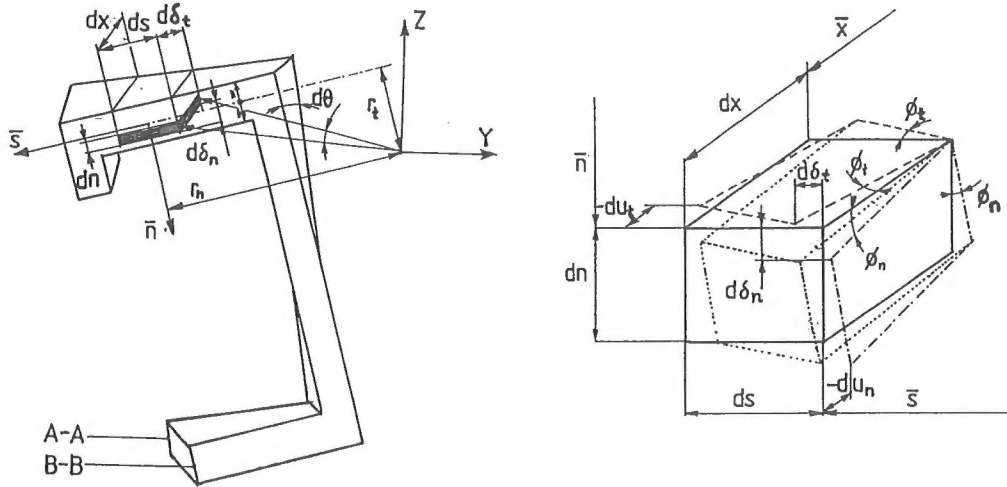


Kuva 1. Vääntökuormitettu palkki

Jos käyristyminen estetään, vääntökuormitus synnyttää palkin pituusakselin suuntaisia normaalijännityksiä ja niihin liittyviä leikkajännityksiä.

Poikkileikkauksen käyristymismekanismi

Tarkastellaan kuvan 1 mukaisen palkin käyttäytymistä. Poikkileikkauksen mittasuhteiden perusteella palkki lukeutuu ohut- ja paksuseinämaisten välialueeseen. Palkin oletetaan kiertyvän siten, että se säilyttää muotonsa poikkileikkaustasossa. Kuvassa 2 on esitetty palkin vääntymisen $d\theta$ aiheuttama muodonmuutos seinämäalkioon $dx \cdot ds \cdot dn$.



Kuva 2. Poikkileikkauksen käyristymisestä aiheutuvat muodonmuutokset

Kuvan 1 mukaisesti kiertymä θ synnyttää tangentiaalisen siirtymän δ_t .

$$\delta_t = r_t \cdot \theta \quad (1)$$

Tiettyä pituusalkiota (dx) vastaavaksi tangentiaaliseksi siirtymäksi saadaan (kuva 2)

$$d\delta_t = r_t \cdot d\theta \quad (2)$$

Seinämaaalkio kiertyy siten omassa seinämätasossaan kulman φ_t

$$\varphi_t = d\delta_t / dx = r_t \cdot d\theta / dx \quad (3)$$

Kun leikkausmuodonmuutokset jätetään lähes merkityksettöminä huomioon ottamatta kuten palkin taivutusteoriassakin, säilyttää seinämäälkio $dx \cdot ds$ suorakulmaisuuutensa, joten

$$\varnothing_t = -du_t/ds \quad (4)$$

Profiilin keskilinjän poikkipintadeplanaatioksi saadaan lausekkeista (3) ja (4)

$$u_t = - \int_s r_t \cdot d\theta/dx \cdot ds \quad (5)$$

Toisaalta kiertymä θ synnyttää tangentiaalisen muodonmuutoksen δ_t kanssa analogisen siirtymän δ_n seinämän normaalisuunnassa (kuva 1).

$$\delta_n = r_n \cdot \theta \quad (6)$$

Siirtymän muutokseksi palkin pituussuunnassa saadaan (kuva 2)

$$d\delta_n = r_n \cdot d\theta \quad (7)$$

Kiertymän muutos synnyttää siten seinämäälkioon sen normaalitasossa kallistuskulman \varnothing_n

$$\varnothing_n = d\delta_n/dx = r_n \cdot d\theta/dx \quad (8)$$

Sama oletus leikkausmuodonmuutoksen merkityksettömyydestä on edelleen voimassa, joten seinämäälkio säilyttää suorakulmaisuuutensa myös normaalitasossa

$$\varnothing_n = -du_n/dn \quad (9)$$

Sekundaarisen taipuman aiheuttamaksi poikkipintapainaumaksi saadaan

$$u_n = - \int_n r_n \cdot d\theta/dx \cdot dn \quad (10)$$

Estetyn väännön normaali­jännityksen synty

Kokonaispoikkipintadeplanaatio on edelläesitettyjen osatekijöiden summa. Käyristymisen aiheuttamaksi pituussuuntaiseksi kokonaisvenymäksi saadaan

$$\epsilon_x = du/dx = du_t/dx + du_n/dx \quad (11)$$

Hooken lain mukaisesti venymistä saadaan estetyn väännön jännityksiksi

$$\sigma_w = -E \cdot \left[\int_s r_t \cdot d^2\theta/dx^2 \cdot ds + \int_n 1/(1-\nu^2) \cdot r_n \cdot d^2\theta/dx^2 \cdot dn \right] \quad (12)$$

Prinaarinen käyristyminen synnyttää aksiaalisen kalvo­jännitystilaa ja kerroin $1/(1-\nu^2)$ ottaa huomioon taivutustermin aiheuttaman taaso­jännitystilaa. Lausekkeen ensimmäinen integraali

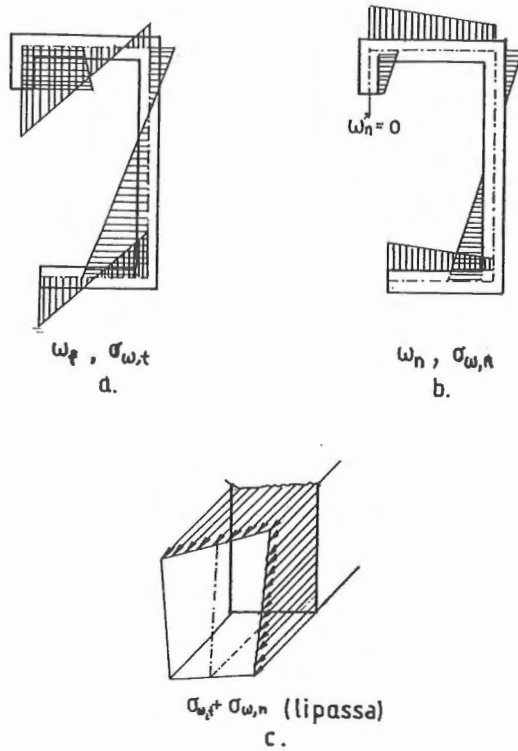
$$\int_s r_t \cdot ds = w_t \quad (13)$$

edustaa profiilin sektorialista koordinaattia poikkileikkauksen keskilinjalla (kuva 3a) ja integraali

$$\int_n r_n \cdot dn = w_n \quad (14)$$

poikkeamaa edellisestä keskilinjalta paksuussuuntaan siirryttäessä (kuva 3b).

Estetyn väännön jännitys on affiinen poikkipintakäyristymistä kuvaavaan sektorialiseen koordinaatin kanssa. Siten lausekkeen ensimmäinen termi edustaa perinteistä ohutseinämäisten profiilien poikkipinnan käyristymisen estymisestä aiheutuvaa kalvo­jännitystä ja jälkimmäinen tähän summautuvaa taivutuskomponenttia. Kuvassa 3c on esitetty yhdistetty jännitys­jakauma profiilin lipassa.

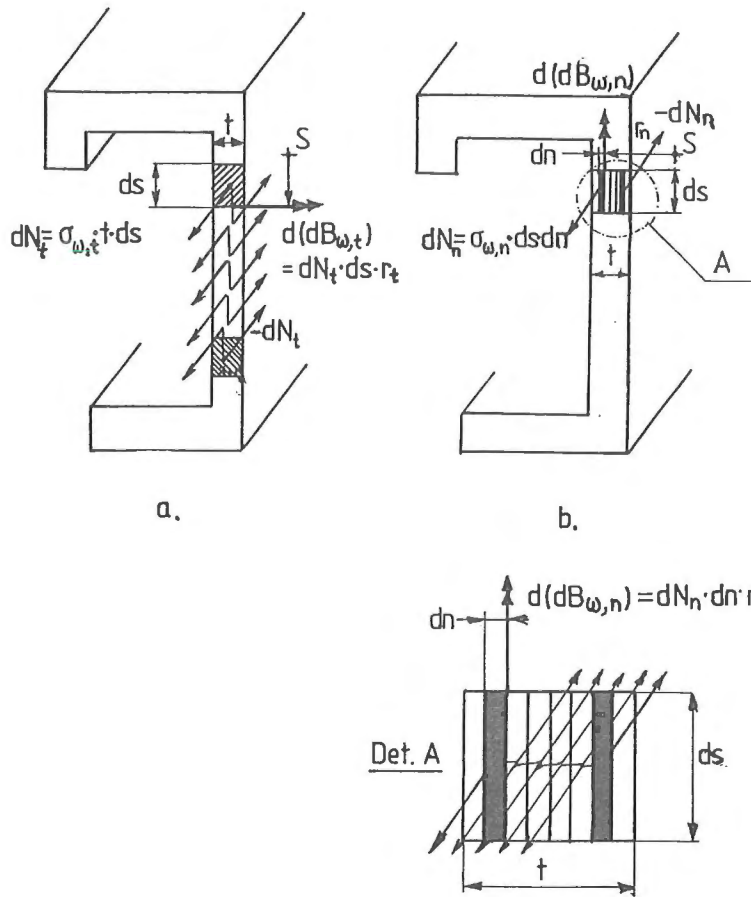


Kuva 3. Paksuhkoseinämäisen profiilin poikkipintapainau-
man ja normaalijännitysten jakaumat.

Momenttiparin synty

Vääntömomentista aiheutuva jännitys σ_w ei synnytä ensimmäisen kertaluvun teorian mukaan poikkileikkaukseen ylimääräistä globaalia taivutusmomenttia tai normaalivoimaa. Kuitenkin estetyn väännön jännitys synnyttää poikkipintaa käyristävän voimasuureen, ns. bimomentin, jota tässä nimitetään momenttipariksi. Niemi on esittänyt periaatteen primaarisen momenttiparin synnylle [7]. Menetelmä perustuu siihen, että kullakin profiilin alkiolla $t \cdot ds$ on tasapainottava vastavoima $-dN_t$ kuvan 4a mukaisesti. Jakamalla voimien välinen alue ds :n levyisiin osiin ja asettamalla niihin toisensa kumoavat dN :n suuruiset voima-alkiot voidaan generoida primaarisen momenttiparin alkio kuvan 4a mukaisesti

$$d(dB_{w,t}) = (\sigma_{w,t} \cdot t \cdot ds) \cdot ds \cdot r_t \quad (15)$$



Kuva 4. Momenttiparin muodostuminen

Ottamalla huomioon primaarisen estetyn väännön jännityksen määrittäminen yhtälöstä (12), saadaan

$$B_{w,t} = -[E \cdot \int_s \left(\int_s r_t \cdot ds \right)^2 \cdot t \cdot ds] \cdot d^2\theta/dx^2 \quad (16)$$

Sijoittamalla tähän sektorialaisen koordinaatin määrittäminen, saadaan tuttu yhteys

$$B_{w,t} = -E \cdot \left(\int_A w_t^2 \cdot dA \right) \cdot d^2\theta/dx^2 \quad (17)$$

Laajentamalla primaarisen momenttiparin syntymekanismia myös sekundaariseen momenttipariin (kuva 4b), saadaan

$$d(dB_{w,n}) = (\sigma_{w,n} \cdot ds \cdot dn) \cdot dn \cdot r_n \quad (18)$$

Ottamalla huomioon sekundaarisen estetyn väännön jännityksen määrittäminen yhtälöistä (12), saadaan

$$B_{w,n} = -E/(1-\nu^2) \cdot \left[\iint_{sn} (r_n \cdot dn)^2 \cdot dn \cdot ds \right] \cdot d^2\theta/dx^2 \quad (19)$$

Koska sekundaarinen poikkipintadeplanaatio ja siten myös sekundaarinen jännitys ovat nollia profiilin keskilinjalla, saadaan

$$B_{w,n} = -E \cdot \int_s^{t/2} (2 \cdot r_n^2 \cdot n^3 / 3) \cdot ds \cdot d^2\theta/dx^2 \quad (20)$$

$$B_{w,n} = -E/[12 \cdot (1-\nu^2)] \cdot \int_s (r_n^2 \cdot t^3 \cdot ds) \cdot d^2\theta/dx^2 \quad (21)$$

Kokonaismomenttipariksi saadaan osamomenttiparien summa, eli

$$B_w = -\left\{ E \cdot \int_s w_t^2 \cdot t \cdot ds + E/(1-\nu^2) \cdot \int_s 1/12 \cdot r_n^2 \cdot t^3 \cdot ds \right\} \cdot d^2\theta/dx^2 \quad (22)$$

Ensimmäinen integraali edustaa perinteistä kalvoseinämäisen palkin käyrästymisjäyhyysmomenttia ja jälkimmäinen integraali seinämän taivutusjäykkyydestä aiheutuvaa sekundaarista käyrästymisjäyhyysmomenttia. Kokonaiskäyrästymisjäyhyysmomentiksi I_w saadaan

$$I_w = I_{w,t} + I_{w,n} = \int_s [w_t^2 \cdot t + 1/12 \cdot r_n^2 \cdot t^3] ds \quad (23)$$

Sekundäärinen termi saadaan siis kertomalla profiilin oma paksuus-suuntainen jäyhyysmomentti $(ds \cdot t^3/12)$ vääntökeskiön etäisyyden normaalikomponentin neliöllä.

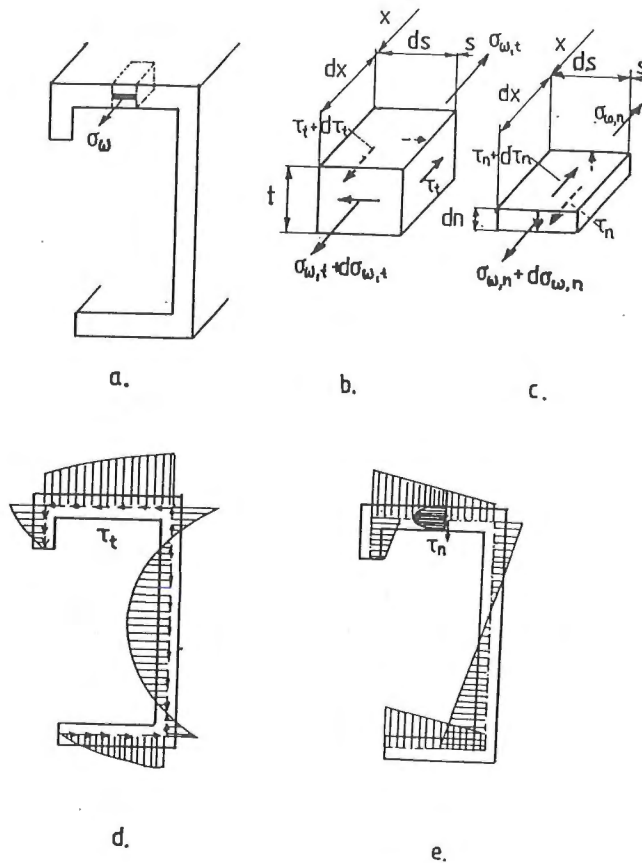
Momenttipari on verrannollinen palkin kiertymän toiseen derivaattaan eli vääntymän muutokseen

$$B_w = -E \cdot [I_{w,t} + I_{w,n} / (1 - \nu^2)] \cdot d^2\theta / dx^2 = -E \cdot (I_{w,t} + I'_{w,n}) \cdot d^2\theta / dx^2 \quad (24)$$

Tulo $E \cdot (I_{w,t} + I'_{w,n})$ on palkin käyritymisjäykkyys $E \cdot I_w$

Estetyn väännön leikkausjännitysten synty

Jos tarkastellaan kuvan 2 profiilin seinämästä irrotetun alkion tasapainoa (kuva 5), todetaan, että tasapainon syntyminen edellyttää leikkausjännitysten olemassaoloa



Kuva 5. Seinämäalkion leikkausjännitykset

Ensinnäkin koko seinämänpaksuisen alkion täytyy olla tasapainossa. Kuvan 5a mukaisesti pituusakselin suuntaisesta voimatasapainosta saadaan

$$d\sigma_{w,t} \cdot t \cdot ds = -d\tau_t \cdot t \cdot dx \quad (25)$$

josta

$$\tau_t = - \int_s d\sigma_{w,t} / dx \cdot ds + \tau_0 \quad (26)$$

Ottamalla huomioon edellä johdettu estetyn väännön jännityksen riippuvuus kiertymästä saadaan yhtälöstä (12).

$$\tau_t = \int_s \left\{ \int_s [d(E \cdot r_t \cdot d^2\theta / dx^2) / dx] ds \right\} ds + \tau_0 \quad (27)$$

Leikkausjännitys τ_t häviää profiilin reunalla, jossa $s = 0$, joten $\tau_0 = 0$ ja yhtälön (13) merkintöjä käyttäen

$$\tau_t = E \cdot d^3\theta / dx^3 \int_s w_t \cdot ds \quad (28)$$

Nimittämällä integraalia

$$S_w = \int_s w_t \cdot t \cdot ds \quad (29)$$

poikkipinnan sektoriaaliseksi staattiseksi momentiksi, saadaan

$$\tau_t = E \cdot S_w / t \cdot d^3\theta / dx^3 \quad (30)$$

Tämä leikkausjännitys jakauma on esitetty kuvassa 5c.

Toisaalta myös paksuussuuntaisen alkion täytyy olla tasapainossa, joten kuvan 5b mukaisesti pituus-suuntaiseksi tasapainoehdoksi saadaan

$$d\sigma_{w,n} \cdot dn \cdot ds = d\tau_n \cdot ds \cdot dx \quad (31)$$

josta

$$\tau_n = \int_n d\sigma_{w,n}/dx \cdot dn + \tau_0 \quad (32)$$

Ottamalla huomioon edellä johdetun sekundaarisen estetyn väännön jännityksen riippuvuus kiertymästä saadaan yhtälöstä (12)

$$\tau_n = - \int_n \left\{ \int_n [d(E/(1-\nu^2)) \cdot r_n \cdot d^2\theta/dx^2]/dx \right\} dn + \tau_0 \quad (33)$$

josta yhtälön (14) merkintöjä käyttäen

$$\tau_n = -E/(1-\nu^2) \cdot d^3\theta/dx^3 \int_n r_n \cdot n \cdot dn + \tau_0 \quad (34)$$

Koska sekundaarinen estetyn väännön leikkausjännitys häviää levyn pinnalla ($n = \pm t/2$), saadaan

$$\tau_n(t/2) = -E/(1-\nu^2) \cdot d^3\theta/dx^3 \cdot r_n \cdot t^2/8 + \tau_0 = 0 \quad (35)$$

josta

$$\tau_0 = E/(1-\nu^2) \cdot d^3\theta/dx^3 \cdot r_n \cdot t^2/8 \quad (36)$$

joten

$$\tau_n = E/(1-\nu^2) \cdot d^3\theta/dx^3 \cdot r_n \cdot (t^2/8 - n^2/2) \quad (37)$$

Sekundaarinen leikkausjännitys jakaantuu siten levyn paksuussuunnassa parabolisesti, kuten kuvassa 5d on esitetty.

Leikkausjännitysten synnyttämä vääntömomentti

Estetystä väännöstä syntyvien leikkausjännitysten aiheuttamaksi vääntömomentiksi saadaan

$$T_w = \int_s \tau_t \cdot r_t \cdot t \cdot ds + \iint_{sn} \tau_n \cdot r_n \cdot dn \cdot ds \quad (38)$$

Ottamalla huomioon edelläesitetyt leikkausjännitysten lausekkeet (28) ja (37), saadaan

Estetyn väännön vääntömomentti muodostuu kahdesta komponentista.

$$T_w = T_{w,t} + T_{w,n} \quad (39)$$

$$T_w = E \cdot d^3 \theta / dx^3 \left\{ \int_s w_t^2 \cdot ds + 1/(1-\nu^2) \cdot \int_s \int_n r_n^2 (t^2/8 - n^2/2) \cdot dn \cdot ds \right\} \quad (40)$$

Aaltosulkulausekkeen ensimmäinen tekijä edustaa aiemmin määritettyä profiilin käyristymisjäyhyysmomenttia $I_{w,t}$ ja kun jälkimmäinen lauseke integroidaan paksuuden suhteen, saadaan $I_{w,n}$, joten

$$T_w = E \cdot [I_{w,t} + 1/(1-\nu^2) \cdot I_{w,n}] \cdot d^3 \theta / dx^3 = E \cdot I_w \cdot d^3 \theta / dx^3 \quad (41)$$

Palkin estetyn väännön leikkausjännityksistä aiheutuva vääntömomentti on siten momenttiparin derivaatta (vrt. yhtälö 24) ja kuvaa momenttiparin muuttumista palkin pituussuunnassa.

$$T_w = -d(B_w)/dx \quad (42)$$

Vääntökeskiön paikka

Sekundaarinen käyristymisjäyhyys synnyttää poikkileikkauksen tasossa leikkausjännityksen τ_n , josta aiheutuva vääntömomentti $T_{w,n}$ on otettava huomioon tarkkaa vääntökeskiön (S) paikkaa laskettaessa. Tarkka vääntökeskiön paikka voidaan määrittää vastaavalla tavalla kuin jos sekundaarista käyristymisjäyhyyttä ei otettaisi lainkaan huomioon [4].

Paikka (S) määräytyy ehdosta, että sen suhteen määritetyt poikki-pintaintegraalien sekatulot häviävät pääjäyhyyskoordinaatistossa, eli

$$I_{xw,S} = I_{yw,S} = \int_S w \cdot x \cdot t \cdot ds + \int_S w \cdot y \cdot t \cdot ds = 0 \quad (43)$$

Tarkennetussa laskelmassa w-termi pitää sisällään myös seinämän paksuusuntaisen jakauman.

Pääjäyhyyskoordinaatiston määrittämisen jälkeen lasketaan pintaintegraalien sekatulot $I_{xw,Q}$ ja $I_{yw,Q}$ pääjäyhyyskoordinaatistossa mielivaltaisesti valitun poolin (Q) suhteen. Tallaiseksi lähtöpooliksi kannattaa valita profiilin mahdollisimman monen seinämätahkon leikkauspiste. Tarkaksi vääntökeskiön paikaksi saadaan pääjäyhyyskoordinaatistossa lähtöpoolista (Q) mitattuina

$$x_S = I_{xw,Q} / I_{xx} \quad (44)$$

$$y_S = I_{yw,Q} / I_{yy} \quad (45)$$

Lausekkeissa (44) ja (45) I_{xx} ja I_{yy} ovat profiilin pääjäyhyksiä. Tarkempi esitys vääntökeskiön määrittämisestä esimerkkeineen löytyy lähteestä [4].

Vääntökuormitetun palkin tasapainoyhtälöt

Poikkipinnan käyristyminen riippuu profiilin muodon lisäksi palkin tuennasta ja pituudesta. Nämä kaikki vaikuttavat siihen, millaisia rasiuksia ulkoinen vääntömomentti synnyttää palkkiin. Edellä totesimme, että ulkoisen vääntömomentin synnyttämä momenttipari tasapainottaa sisäisesti itsensä. Toisaalta ulkoinen vääntömomentti synnyttää Saint Venantin leikkausjännityksen τ_{sv} , josta aiheutuva vääntömomentti T_{sv} yhdessä estetyn väännön leikkausjännitysten aiheuttaman vääntömomentin T_w kanssa pitävät ulkoisen vääntökuorman T tasapainossa.

$$T = T_w + T_{sv} \quad (46)$$

Ottamalla huomioon, että

$$T_{sv} = G \cdot I_t \cdot \theta' \quad (47)$$

jossa G on liukumoduuli ja I_t Saint Venantin vääntöjäyhyys
saadaan väännön differentiaaliyhtälöksi

$$T = E \cdot I_w \cdot \theta'''' + G \cdot I_t \cdot \theta' \quad (48)$$

Yhtälön (48) yleinen ratkaisu on muotoa

$$\theta = A \cdot \sinh kx + B \cdot \cosh kx + C \cdot kx + D \quad (49)$$

jossa poikkileikkauksen vääntökarakteristika

$$k = \sqrt{[G \cdot I_t / (E \cdot I_w)]} \quad (50)$$

Yhtälön (49) vakiot voidaan määrittää palkin reunaehdoista.

Kuten aiemmin todettiin, pyörähdyssymmetrisiä profiileja lukuunottamatta kaikilla profiileilla on ainakin sekundaarista käyristymisjäyhyysmomenttia. Kun tämä otetaan huomioon palkin poikkipinta-arvoja määritettäessä, ei vääntökarakteristikan määrittäminen tuota ongelmia ja kaikenlaisia profiileja voidaan käsitellä samoilla lausekkeilla.

Poikkipintakäyristymisen estymisestä aiheutuva estetyn väännön jännitys jakaantuu palkin pituussunnassa hyperbolisten funktioiden määräämällä tavalla. Poikkileikkauksessa jännitykset jakaantuvat kuvassa 3 esitetyllä tavalla ja yhdistämällä lausekkeet (12) ja (22) saadaan

$$\sigma_{w,t} = B_w \cdot w_t / I_w \quad (51)$$

$$\sigma_{w,n} = B_w \cdot r_n \cdot n / I_w \quad (52)$$

Perinteisesti estetyn väännön normaali-jännityksillä on tarkoitettu vain $\sigma_{w,t}$:n arvoa.

Siirtymäohjatussa kuormituksessa sekundaarisen käyritymisjäyhyyden mukaan ottaminen ei vaikuta primaarisen komponentin arvoon, lisätermi vain kasvattaa jännityksiä profiilin seinämän äärikerroksissa. Voimaohjatussa kuormituksessa lisäjäykkyyden huomioonottaminen pienentää siirtymiä ja primaarisen estetyn väännön jännityksiä.

Ulkoinen vääntömomentti eriytyy palkin pitusakselin suunnassa kahteen hyperbolisten funktioiden mukaan muuttuvaan komponenttiin, joiden synnyttämät leikkausjännitykset voidaan jaotella Saint Venantin osuudeksi

$$\tau_{sv} = G \cdot \theta' \cdot t \quad (53)$$

ja estetyn väännön leikkausjännityksiksi yhtälöistä (30), (37) ja (41)

$$\tau_t = E \cdot S_w / t \cdot d^3 \theta / dx^3 = T_w \cdot S_w / (I_w \cdot t) \quad (54)$$

$$\tau_n = E / (1 - \nu^2) \cdot r_n \cdot (t^2 / 8 - n^2 / 2) \cdot d^3 \theta / dx^3 = T_w \cdot r_n \cdot (t^2 / 8 - n^2 / 2) / I_w \quad (55)$$

Estetyn väännön leikkausjännitysjakaumat on esitetty kuvassa 5.

Sekundaarisen käyritymisjäykkyyden mukaanotto kasvattaa estetyllä väännöllä kantavan vääntömomentin osuutta ja vaikuttaa siten leikkausvoimien keskinäiseen suuruuteen.

SEKUNDAARISEN KÄYRITYMISJÄYHYDEN MERKITYS

Yleinen vääntösauva

Sekundaarisen käyritymisjäyhyyden huomioonottaminen ei monimutkaista estetyn väännön analysointia. Kun perinteisen käyritymisjäyhyyden arvoa täydennetään taivutusjäykkyyskäyritymisjäyhyydellä $I_{w,n}$, voidaan laskelmat suorittaa perinteiseen malliin.

Profiileilla, joilla $I_{w,t} = 0$, sekundaarisen käyristymisjäykkyyden merkitystä rakenteen siirtymiin voidaan havainnollistaa vertaamalla esim. \perp -profiilin muotoisen ulokesauvan pään kiertymää θ vapaan väännön kiertymään θ_0 . Kiertymien suhteeksi saadaan

$$\theta/\theta_0 = 1/\{1 - b \cdot \tanh[L/b \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{(1-\nu)}]/[L \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{(1-\nu)}]\} \quad (56)$$

Tarkan ratkaisun vaikutus vääntökuormitetun ulokepalkin jäykkyyteen on esitetty palkin pituuden ja laipan leveyden suhteen (L/b) funktiona kuvassa 6, käyrä 1.

Päistään nivelellisesti tuetun \perp -profiilin vääntönurjahduksessa sekundaarinen käyristymisjäykkyyden huomioonottaminen vaikuttaa kestävyteen suhteessa

$$N/N_0 = 1 + \pi^2 \cdot b^2/[6 \cdot (1-\nu) \cdot L^2] \quad (57)$$

Lausekeessa termi N_0 edustaa Saint Venantin vääntöjäykkyyden edellyttämää nurjahduskestävyyttä. Kestävyyksien vertailukäyrä on esitetty kuvassa 6, käyrä 2.

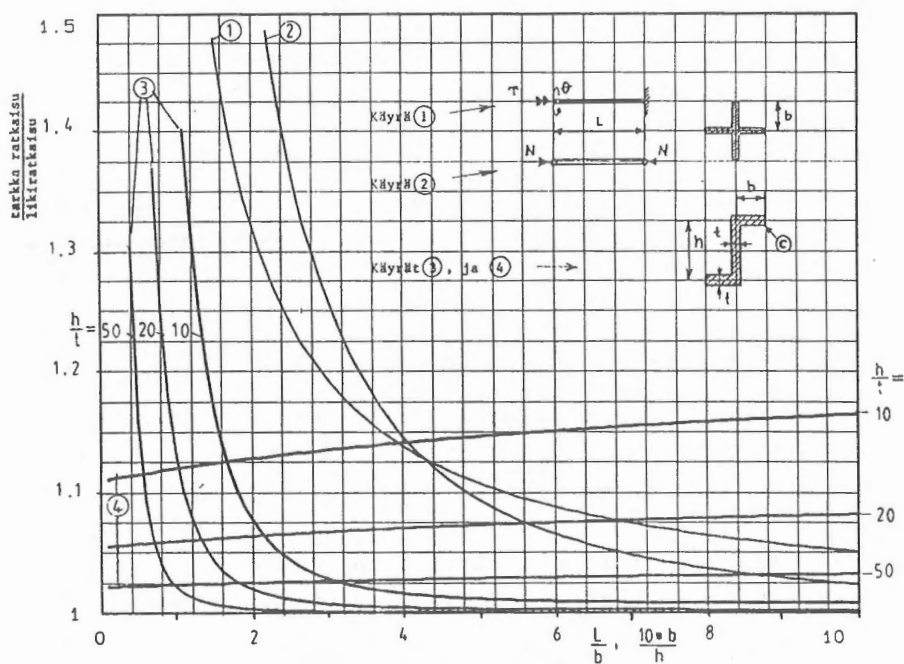
Toisaalta profiileilla, joilla on molempia käyristymisjäyhyyden komponentteja, jäykkyyssuhteet määräytyvät seuraavasti

$$\frac{I_{w,n}}{I_{w,t}} = \frac{1/[12 \cdot (1-\nu^2)] \cdot \int_0^5 r_n^2 \cdot t^3 \cdot ds}{\int_0^5 (\int_0^5 r_t \cdot ds)^2 \cdot t \cdot ds} \quad (58)$$

Jäykkyyksien suhde on karkeasti verrannollinen palkin seinämänpaksuuden ja päämittojen (leveyden) suhteen neliöön. Siten sekundaarisella käyristymisjäyhysmomentilla on pieni vaikutus kokonaiskäyristymisjäyhyyteen, koska seinämänpaksuus on aina pieni profiilin muihin poikkileikkausmittoihin verrattuna. Erikoisen paksuseinäisillä profiileilla puolestaan Saint Venantin osuus kokonaisvääntöjäykkyydestä vähentää estetyn väännön ja siten myös sekundaarisen käyristymisjäykkyyden merkitystä.

Kuvassa 6 käyräparvi 3 esittää Z-profiilin sekundaarisen jäykkyyden vaikutusta käyristymisjäykkyyteen. Vaaka-akseli edustaa laipan leveyden suhdetta palkin korkeuteen kymmenkertaisena ($10 \cdot b/h$).

Käyrästymisjäykkyysuhteet on piirretty kolmella eri uuman hoikuksuhteella h/t . Käyräparvi 4 esittää saman palkin sekundaarisen jäykkyyden vaikutusta palkin kriittiseen normaali-jännitykseen laipan ääriurkassa, pisteessä C.

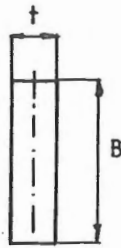


Kuva 6. Sekundaarisen käyrästymisjäykkyyden huomioonottamisen vaikutus:

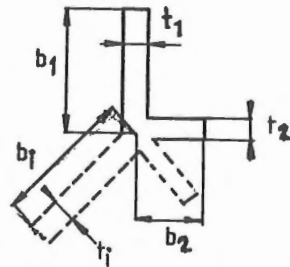
- kiertymään θ/θ_0 , käyrä 1
- vääntönurjahdukseen N/N_0 , käyrä 2
- käyrästymisjäykkyyteen $I'_w/I_{w,t}$, käyrät 3
- jännitykseen $\sigma_w/\sigma_{w,t}$, käyrät 4

Sekundaarisella käyrästymisjäykkyydellä on käytännön merkitystä lähinnä hitsattujen rakenteiden väsymisilmiössä. Yli kymmenen prosentin jännityslisällä on selvä vaikutus liitoksen elinikään. Jännityskeskittymä tulee palkin seinämän pintaan, jossa hitsin paikallinen epäjatkuvuus sijaitsee. Alustavat vertailut elementtimenetelmällä tukevat sekundaarisen käyrästymisjäykkyyden merkitystä paikallisten jännityshuippujen muodostumisessa.

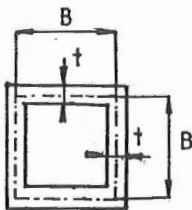
Sekundaarisen käyristymisen mukaan otolla saatetaan koko vääntöteoria yhtenäiseksi, millä seikalla on merkitystä mm. numeerisissa ratkaisumenetelmissä. Täysin symmetristä putkea lukuunottamatta kaikkien sauvojen vääntöjäykkyys muodostuu sekä estetyin väännön käyristymisjäykkyydestä että ns. puhtaan Saint Venantin vääntöjäykkyyden yhteisvaikutuksesta. Niinpä X, T, L ja □-profiileilla-kin on hieman käyristymisjäyhyyttä. Lausekkeen (21) mukaisesti saadaan johdettua kuvassa 7 esitetyt sekundaarisen käyristymisjäyhyyden momentit.



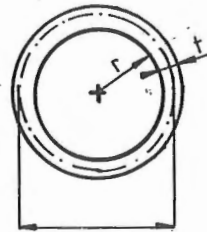
$$I_w = B^3 \cdot t^3 / 144$$



$$I_w = \Sigma (b_i^3 \cdot t_i^3 / 36)$$



$$I_w = B^3 \cdot t^3 / 36$$



$$I_w = 0$$

Kuva 7. Sekundaarisen käyristymisjäyhyyden arvoja muutamilla profiileilla, joilla $I_{w,t} = 0$

Sekundaarisen käyristymisjäyhyyden huomioonottaminen palkkirakenteen analyyttisessä ratkaisussa tekee tuloksesta vertailukelpoisen FE-menetelmällä ohutkuorielementtejä (tai tila-elementtejä) käytämällä saatuun tulokseen, jossa käyristymisjäyhyyttä tulee kuoren taivutusjäykkyydestä automaattisesti mukaan.

Vääntönurjahtava sauva

Jos vääntönurjahduksen johdossa esitetty pienten siirtymien teorian mukainen puristusjännitysten tasainen jakauma koko poikkipinnalla oletetaan olevan voimassa, pätee kuvan 8a mukaisen \perp -profiilin ideaaliselle nurjahdusjännitykselle lauseke

$$\sigma_{tx} = (G \cdot I_t + \pi^2 \cdot E \cdot I_w / L^2) / I_p \quad (59)$$

Kun otetaan huomioon, että

$$G = E / (2 + 2\nu) \quad (60)$$

$$I_t = 4 \cdot b \cdot t^3 / 3 \quad (61)$$

$$I_w = b^3 \cdot t^3 / [9 \cdot (1 - \nu^2)] \quad (62)$$

$$I_p = 4 \cdot b^3 \cdot t / 3 \quad (63)$$

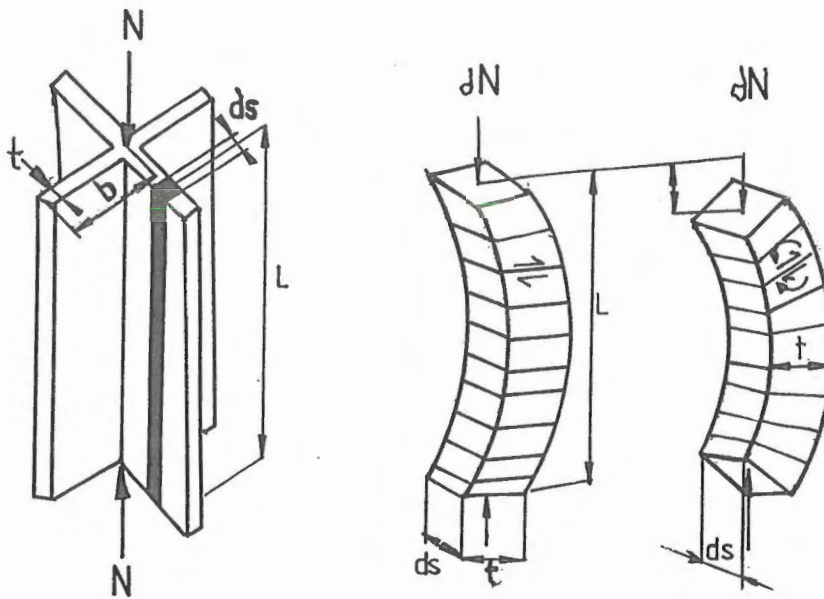
saadaan vääntönurjahdusjännitykselle lauseke

$$\sigma_{tx} = \pi^2 \cdot E \cdot t^2 / [12 \cdot (1 - \nu^2) \cdot b^2] \cdot [6 \cdot (1 - \nu) / \pi^2 + b^2 / L^2] \quad (64)$$

Poissonin vakion arvolla $\nu = 0.3$ vääntönurjahdukselle saadaan sama lauseke kuin sellaisen levykentän lommahdukselle, jonka toinen kuormittamaton reuna on nivelellisesti tuettu ja toinen vapaa (vrt. [8] ja [9]), eli

$$\sigma_b = \pi^2 \cdot E \cdot t^2 / [12(1 - \nu^2) \cdot b^2] \cdot (0.425 + b^2 / L^2) \quad (65)$$

Sekundaarisen käyritymisjäyhyyden huomioon ottaminen johtaa tarkkaan ratkaisuun ja se selittää vääntönurjahtaneen palkin ominaismuodon. Mikäli sekundaarista käyritymisjäyhyyttä ei oteta huomioon, muodostuu vääntönurjahtavan \perp -sauvan sisäinen muodonmuutostyö pelkästään Saint Venantin vääntöjäykkyyden määräämästä leikkausmuodonmuutoksesta (kuva 8b). Tällöin palkki ei vääntönurjahtaessaan lyhenisi aksiaalisesti lainkaan eikä ominaismuodon tarvitsisi olla sinipuoliaalto. Todellisuudessa sekundaarinen käyrityminen taivuttaa seinämäalkiota, jolloin palkki myös lyhenee samalla kun kuorma hakeutuu vääntökeskiötä kohti (kuva 8c).



Kuva 8. Vääntönurjahtavan sauvan muodonmuutokset

YHTEENVETO

Palkkirakenteiden seinämän paksuussuuntainen jäykkyys kasvattaa palkin käyritysjäykkyyttä. Tämä ns. sekundaarinen käyritysjäykkyys aiheuttaa vääntökuormitetussa palkissa estetyn väännön kalvojännitykseen superponoituvan taivutuskomponentin ja siihen liittyvän leikkausjännityksen. Sekundaarisen käyritysjäykkyyden mukaan ottaminen ei monimutkaista laskelmia, mutta toisaalta ilmiöllä ei ole oleellista vaikutusta siirtymiin eikä rasitusten jakautumiseen rakenteessa. Kuitenkin tarkassa väsytyksimitoituksessa sekundaarinen käyrityminen tulisi ottaa huomioon. Lisäksi seinämän paksuussuuntaisen taivutusjäykkyyden huomioon ottaminen auttaa ymmärtämään sellaisten rakenteiden käyttäytymistä, joilla ei ole primaarista käyritysjäykkyyttä. Lisäselvitykset sekundaarisen käyrityksen merkityksestä ja suhteesta mm. poikkipinnan vinoutumiseen ovat tarpeen esim. FE-menetelmää käyttäen.

VIITTEET

1. Vlasov V., Thin-walled elastic beams. Jerusalem 1961
2. Timoshenko S., Strength of materials. D. Van Nostrand Company. 1958
3. Wagner H. & Pretschner W., Verdrehung und Knickung von offenen Profilen. Luftfahrtforschung, Vol. 11, 1934
4. Kollbrunner C. & Hajdin N., Dünnwandige Stäbe, Band 1. Springer-Verlag. 1972
5. Oden J. & Ripperger E., Mechanics of elastic structures. McGraw-Hill Book Company. 1981
6. Gjelsvik A., The theory of thin walled bars. John Wiley & Sons. 1981
7. Niemi E., Segmenttiluukun vääntörasitusten laskemisesta estetyin väännön teoriaa soveltaen. Diplomityö, Teknillinen korkeakoulu, koneinsinööriosasto. Helsinki 1963
8. Allen H. & Bulson P., Background to buckling. McGraw-Hill Book Company. 1980
9. Leko T., Secondary warping of thin-walled beams. Journal of engineering mechanics, Vol. 109, No2, April 1983

Timo Björk, dipl.ins., Lappeenrannan teknillinen korkeakoulu, konetekniikan osasto