RAKENTEIDEN IDENTIFIOINTI VÄRÄHTELYMITTAUSTEN AVULLA

Ari Vepsäläinen

Rakenteiden Mekaniikka, Vol. 21
No 3 1988, s. 37...63

TIIVISTELMÄ: Artikkelissa esitetään tavallisimmat menetelmät rakenteen parametrien estimoimiseksi. Menetelmät jaetaan kahteen eri luokkaan: Moodianalyysipohjaisiin menetelmiin ja tilamallipohjaisiin menetelmiin. Tilamallin parametrien estimointimenetelmistä käsitellään mm. ennusteen virheen minimoiminen ja pseudolineaarisen regression käyttö. Lisäksi esitetään rekursiivisia estimointimenetelmiä ja käytännön algoritmeja.

JOHDANTO

Rakenteen identifioimiseksi on olemassa lukuisia erilaisia menetelmiä. Useissa eri lähteissä viitataan johonkin menetelmään nimellä, mutta varsinaista menetelmien luokittelua ei ole tehty. Esimerkiksi ITD-, STTD-, Kumaresan-Tuft- ja kompleksieksponenttimenetelmissä oletetaan, että systeemin vastetta voidaan kuvata eksponenttifunktioiden summana. Kaikkien edellämainittujen menetelmien idea on hyvin tarkkaan sama kuin mitä Pronyn menetelmässä käytetään. Parannuksia tulokseen saadaan siirtymällä todellisen mallin estimoinnista estimointiin mittausten avulla muodostetussa aliavaruudessa tai käyttämällä yhden mittaussignaalin sijaan useaa mittausta. Samoin ristiriitaisuutta liittyy ARMA-käsitteeseen. Esimerkiksi "1:st International Modal Analysis Conference":n esipuheessa ARMA-malli rajoitetaan käsittämään vain sellaista tapausta, jossa malli muodostetaan satunnaisherätettä käyttäen. Usein ei myöskään tunneta ARMA-mallin ARX-mallin välistä eroa.

Tässä kirjoituksessa menetelmät jaetaan kahteen eri luokkaan: moodianalyysiin perustuviin menetelmiin ja yleisiin menetelmiin, riippuen siitä, diagonalisoituuko vaimennusmatriisi ominaismuotomatriiseilla kerrottaessa vai ei. Pääasiallinen ero näiden kahden luokan välillä on, että mikäli vaimennusmatriisi diagonalisoituu, voidaan estimoitavina parametreina käyttää ainoastaan ominaismuotomatriiseilla diagonalisoitujen massa-, vaimennus- ja jäykkyysmatriisin diagonaalitermejä, mutta jälkimmäisessä tapauksessa joudutaan käyttämään koko matriiseja. Edellisessä tapauksessa estimoitavien parametrien lukumäärä on verrannollinen vapausasteiden lukumäärään, kun taas jälkimmäisessä se on verrannollinen vapausasteiden lukumäärän neliöön. Jälkimmäisessä tapauksessa käytettävät menetelmät soveltuvat tietysti myös moodianalyysin yhteydessä käytettäviksi.

Artikkelin ensimmäinen luku sisältää kuvauksen rakenteen mallintamisen periaatteista ja erilaisten kuormien luokitteluperusteista.

Toisessa luvussa on kuvattu tiettyjä olennaisia menetelmiä, joita tarvitaan värähtelevän systeemin ominaisuuksia määritettäessä. Aluksi esitetään menetelmiä korrelaatio- ja impulssivastefunktioiden estimoimiseksi mittaustiedoista. Tämän jälkeen esitetään menetelmiä taajuudenfunktioiden estimoimiseksi. Koska dynaaminen analyysi tehdään usein elementtimenetelmää käyttäen, on lisäksi kuvattu, miten elementtimenetelmällä voidaan ratkaista rakenteen dynaaminen käyttäytyminen. Elementtimenetelmän käyttö edellyttää kuitenkin, että rakenteen dynaamiset ominaisuudet tunnetaan. Tarkan mallin tekemiseksi ja kuormien selvittämiseksi tarvitaan värähtelymittauksista saatavaa tietoa. Lisäksi on mahdollista täsmentää elementtimalli värähtelymittausten avulla ja tutkia, miten hieman modifioitu rakenne toimii esimerkiki lisäämällä malliin jousielementtejä.

Kolmannessa luvussa on esitetty aluksi erilaisten moodianalyysiin perustuvien menetelmien käyttö.

Neljännessä luvussa on esitetty, millaisia menetelmiä voidaan käyttää yleisesti eri systeemiparametrien estimoinnissa.

RAKENTEEN MALLINTAMINEN

Ominaismuotoanalyysi

Dynaamisen systeemin käyttäytymistä voidaan kuvata systeemiyhtälöllä

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{f\} \ , \qquad (1)$$

missä [M], [C] ja [K] ovat massa-, vaimennus- ja jäykkyysmatriisi, $\{x\}$ on siirtymävektori ja $\{f\}$ voimavektori. Ottamalla Fourier-muunnos yhtälön molemmilta puolilta, saadaan

$$(-\omega^2[M]+j\omega[C]+[K])\{\hat{x}\}=\{\hat{f}\}, \qquad (2)$$

missä $\{\hat{x}\}$ on $\{x\}$:n ja $\{\hat{f}\}$ on $\{f\}$:n Fourier-muunnos. Yhtälö (2) voidaan saattaa muotoon

$$(-\omega^2[I]+j\omega[\phi]^T[C][\phi]+[\Lambda])[\phi]^T\{\hat{x}\}=[\phi]^T\{\hat{f}\}, \qquad (3)$$

missä $[\Lambda]$ on matriisin $(-\omega^2[M]+[K])$ ominaisarvomatriisi, $[I]$ on yksikkömatriisi ja $[\phi]$ on ominaistaajuuksien muodostama diagonaalimatriisi. Mikäli vaimennusmatriisi diagonalisoituu, voidaan systeemin taajuusvastefunktio saattaa muotoon

$$H_{ik}(\omega)=\sum_{r=1}^{N}\frac{\phi_{ir}\phi_{rk}}{\omega_r^2-\omega^2-2j\zeta_r\omega_r} \qquad (4)$$

ja edelleen muotoon

$$H_{ik}(\omega)=\sum_{r=1}^{N}\frac{\phi_{ir}\phi_{rk}}{a_r(j\omega+\zeta_r\omega_r+j\omega_r\sqrt{(1-\zeta_r^2)}}$$
$$+\sum_{r=1}^{N}\frac{\phi_{ir}\phi_{rk}}{a_r(j\omega+\zeta_r\omega_r+j\omega_r\sqrt{(1-\zeta_r^2)}}, \qquad (5a)$$

tai Laplace tasossa muotoon

$$H_{ik}=\sum_{r=1}^{N}\left(\frac{A_{ik}^r}{(s-s_r)}+\frac{A_{ik}^{r\,*}}{(s-s_r)}\right). \qquad (5b)$$

Edellä ϕ_{ir} on i:nen ominaismuodon r:s alkio, ω_r on r:s ominaiskulmataajuus, ζ_r r:s suhteellinen vaimennuskerroin ja A_{ik}^r on residy navassa s_r.

Yhtälöitä (4) ei kuitenkaan voida käyttää, jos vaimennusmatriisi ei diagonalisoidu.

Rakennemallin tekeminen on kuitenkin usein vaikeaa:

1. Ei tunneta täsmällisesti rakenteen ominaisuuksia (jäykkyys, vaimennus ja massa).

2. Ei tunneta täsmälleen kuormitusta.

3. Rakenne on monimutkainen, jolloin täsmällisen mallin tekeminen on suuritöistä.

Tärinämittauksia voidaan käyttää sekä rakenteen ominaisuuksien että kuormien ominaisuuksien määrittelemiseen.

Tilamalli

Kertomalla systeemiyhtälö (1) molemmalta puolelta massamatriisin käänteismatriisilla saadaan

$$\{\ddot{x}\}+[J_0]\{\dot{x}\}+[K_0]\{x\}=[L_0]\{f\}\,, \tag{6}$$

josta saadaan sijoittamalla

$$[\xi]=\left[\dot{x}\;x\right]^T, \tag{7a}$$

$$[\phi]=\begin{bmatrix} 0 & I \\ -K_0 & -J_0 \end{bmatrix}, \tag{7b}$$

$$[\Gamma]=\left[0\;L_0\right]^T \tag{7c}$$

tilayhtälöksi

$$[\dot{\xi}]=[\phi][\xi]+[\Gamma][f]\,. \tag{8}$$

Ratkaisemalla saatu differentiaaliyhtälö ajanhetkillä $t=t_i$ ja $t=t_{i+1}$ saadaan yhtälö diskretoitua:

$$[\xi(i+1)]=[A][\xi(i)]+[B][f(i)]\,, \tag{9}$$

missä

$$[A]=e^{([\phi]\Delta t)}, \tag{10a}$$

$$[B]=\int_0^t e^{([\phi]\tau)}d\tau\,. \tag{10b}$$

Saatu yhtälö (9) voidaan edelleen johtaa muotoon (ARX-malli)

$$[Y(i)]=[F_1][Y(i-1)]+[F_2][Y(i-2)]+[G_1][f(i-1)]+[G_1][f(i-2)]+[W(i)]\,, \tag{11}$$

missä

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}[A]\begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & I \\ F_2 & F_1 \end{bmatrix}, \tag{12a}$$

$$\begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I & 0 \\ -F_1 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}[B]\,. \tag{12b}$$

Sijoittamalla

$$[\theta]=\left[-F_1 \text{-} F_2 \; G_1 \; G_2\right]^T, \tag{13a}$$

$$\gamma(t)=\left[-Y(t\text{-}1) \; \text{-}Y(t\text{-}2) \; f(t\text{-}1) \quad f(t\text{-}2)\right] \tag{13b}$$

voidaan ARX-malli johtaa muotoon

$$\{Y(t)\}=[\theta]^T\gamma(t)+\{W(t)\}. \tag{14}$$

Elementtimenetelmä

Perusteet

Vuonna 1956 Turner, Clough, Martin ja Topp kehittivät kehittivät menetelmän tasojännitystilan ratkaisemiseksi käyttäen kolmioelementtejä. Vasta 1960-luvulla alettiin kehittää elementtimenetelmäohjelmistoja. Sen hetkisten tietokoneiden laskentakapasiteetin takia jouduttiin päähuomio kiinnittämään ratkaisualgoritmin nopeuteen. Tällöin kehittyi erilaisia ratkaisijoita, kuten esim. nauharatkaisijat ja erilaisia nauhanleveyden optimointialgoritmeja. Kuitenkin jo keskikokoisten mallien ratkaisu voi kestää useita tunteja. Tietokoneiden tehon kasvaessa alettiin yhä enemmän kiinnittämään huomiota mallin muodostamiseen. Nykyään useassa CAD-ohjelmassa on elementtiverkon generointimahdollisuus. Lisäksi on yhä enemmän kehitetty menetelmiä epälineaaristen ongelmien ratkaisemiseksi.

Elementtimenetelmän avulla voidaan ratkaista osittaisdifferentiaaliyhtälöitä. Alue, jossa ratkaisu halutaan, jaetaan elementtiverkoksi, jossa jokaisen elementin alueella ratkaisua aproksimoidaan muotofunktioiden avulla. Elementit voidaan jakaa erilaisiin ryhmiin mm. niiden dimension suhteen (jana-, taso-, tilaelementit), vapausasteiden lukumäärän suhteen (esim. pinta-, laatta- ja levyelementit) ja muotofunktioiden ominaisuuksien suhteen. Systeemiyhtälö saadaan kokoamalla yhteen jokaisesta elementistä saatavat massan, jäykkyyden, vaimennuksen ja kuormien arvot.

Staattiset ongelmat

Rakenteiden staattisen analyysin avulla pyritään selvittämään erilaisten kuormien (esimerkiksi mekaaniset ja termiset kuormat) aiheuttamien siirtymien ja jännitysten suuruus. Yleisesti syntyvät ongelmat voidaan jakaa kolmeen luokkaan:

1. Tasapainotehtävät.
2. Ominaisarvotehtävät.
3. Etenemistehtävät.

Ensimmäinen tapaus sisältää tavallisimman ongelman: stationääristen siirtymien laskennan. Toinen tapaus tulee statiikassa kyseeseen lähinnä nurjahduksia tutkittaessa ja kolmas tapaus esimerkiksi lämmönsiirtymisongelmissa.

Vaikka värähtelymittauksia käytetään lähinnä dynaamisten parametrien estimoinnissa, voidaan värähtelymittauksista saatavan tiedon avulla täsmentää myös staattista ratkaisua.

Dynaamiset ongelmat

Lineaarisille rakenteille käytetään tavallisimmin moodien superpositioon perustuvia menetelmiä. Ominaismuotojen ja -taajuuksien ratkaisemiseksi on olemassa useita erilaisia menetelmiä (Jacobi, Sturm, Householder, Aliavaruusiteraatio, Lanczos). Näistä kaksi viimeiksimainittua on tehokkaimpia, kun matriisit ovat suuria ja halutaan vain muutama ominaisarvo.

Moodianalyysi ei pysty antamaan tietoa sellaisten rakanteiden värähtelyistä, joissa vaimennusmatriisi ei diagonalisoidu muotomatriisin avulla (engl. nonproportional damping) tai rakenteeseen liittyy epälineaarisia tekijöitä. Tietysti voidaan yrittää linearisoida mallia ja iteroida kohti epälineaarisen rakenteen ratkaisua, mutta voidaan myös käyttää suoraan aikaintegrointiin pohjautuvia menetelmiä. Yleisesti käytettyjä menetelmiä ovat mm. keskeisdifferenssimenetelmä, Wilsonin, Houboultin ja Newmarkin menetelmät /5/ ja Runge-Kutta.

Kokonaissysteemin ominaisuuksien laskenta

Kokonaissysteemiin kuuluu yleensä useita erilaisia komponentteja, joiden ominaisuudet ovat erilaisia. Tällöin ei yleensä kannata yrittää laskea kerralla koko rakenteen käyttäytymistä, vaan käyttäytyminen kannattaa laskea komponentti kerrallaan. Normaali analyysi voi johtaa numeerisiin vaikeuksiin. Yksi usein käytetty menetelmä on alirakenneanalyysi (engl. substructure-analysis).

Alirakenneanalyysiä voidaan käyttää esim. laskettaessa maapohjan ja koneen muodostaman kokonaisuuden käyttäytymistä. Tällöin lasketaan aluksi maaperän värähtelyt ilman rakennetta. Tämän jälkeen lasketaan värähtelyjen koneeseen aiheuttamien kuormien suuruus. Kuormat muutetaan yleistetyiksi jousiksi, jotka liitetään koneen malliin ja lasketaan tällaisen rakenteen käyttäytyminen normaaleja menetelmiä käyttäen.

HERÄTTEET

Iskutesti

Impulssivastefunktio on systeemin vaste yksikköimpulssiin. Iskua voidaan pitää likimain impulssina, jolloin mittaamalla rakenteen värähtelyt, kun rakennetta on isketty esim. vasaralla, saadaan laskettua estimaatti impulssivastefunktiolle. Koska impulssivastefunktion Fourier-muunnos on taajuusvastefunktio, saadaan rakenteen ominaistaajuudet määriteltyä mitatusta vasteen spektristä. Ominaistaajuuksilla vaste saavuttaa likimain maksiminsa.

Ominaismuodon solmuun kohdistuvan iskun energiatiheys ko. ominaismuodon herättämiseksi jää pieneksi. Siksi rakennetta on iskettävä useasta eri kohdasta, jotta kaikki tärkeimmät ominaismuodot saataisiin herätettyä.

Sinipyyhkäisy

Koska usein rakennetta ei voida iskeä kovin lujaa, ettei se särkyisi, iskutestillä saatava energiatiheys on usein riittämätön analyysin tekemiseen. Lisäksi iskun energia jakautuu usealle ominaismuodolle.

Käyttämällä sinimuotoista herätevoimaa voidaan herättää yksi ominaismuoto kerrallaan. Sinimuotoinen heräte saadaan esimerkiksi pyörivästä epäkeskomassan avulla. Muuttamalla pyörimisnopeutta saadaan herätevoima pyyhkäisemään yli koko kiinnostavan taajuusalueen. Koska täristin ottaa osaa rakenteen värähtelyihin, on kuitenkin joko laskettava tai mitattava todellinen rakenteeseen kohdistuva voima, jotta ominaistaajuudet ja -muodot saataisiin määriteltyä. Toisaalta ominaistaajuuden lähellä saattaa rakenteen värähtelyjen amplitudi kasvaa liiankin suureksi ja rikkoa rakenteen.

Kapeakaistainen heräte

Käyttämällä kapeakaistaista herätettä, saadaan rakenteeseen siirtymään riittävä energia haluttujen ominaismuotojen herättämiseksi. Kapeakaistainen heräte saadaan aikaan esim. mittaamalla rakenteen ja täristimen välinen voima ja muuttamalla täristimen värähtelyjä siten, että keskimäärin siirtyvä teho on vakio (tai muuten tunnettu) tietyllä taajuusalueella.Tarvittavan täristimen massan ei tarvitse olla suuri.

Takaisinkytkennän avulla voidaan lisäksi pitää rakenteen värähtelyt sallituissa rajoissa.

Satunnaisheräte

Mikäli satunnaisheräte aikaansaadaan täristimen avulla, tarvitaan riittävän suuret voimat tärkeimpien ominaistaajuuksien herättämiseksi. Tästä syystä voi täristimen massa yleisesti olla suuri. Kuitenkin luonnossa esiintyvät voimat, kuten tuuli, aikaansaavat usein liki satunnaisen herätteen rakenteelle, jolloin täristintä ei tarvita. Toisaalta käyttämällä laajakaistaista herätettä, voidaan mittausaikaa lyhentää ja myös pienentää epäonnistuneen mittauksen todennäköisyyttä, koska vain ne ominaistaajuudet eivät heräty, joiden solmuun täristin asetetaan.

Verrattuna muihin herätetyyppeihin satunnaisherätteen käyttö yksinkertaistaa mm. vasteen varianssin lauseketta paljon /20/. Esimerkiksi moodianalyysissä tehospektriä täytyy yleensä pitää stationäärisestä tilasta mitattuna. Isku- tai sinimuotoinen heräte aiheuttavat transientit komponentit vasteeseen, jolloin tehospektrin estimaatti poikkeaa oikeasta arvosta ja joissakin tapauksissa saattaa johtaa vääriin tuloksiin.

MOODIANALYYSI

Moodianalyysi taajuudenfunktioista

Taajuusvastefunktion ominaisuuksia

Yhden vapausasteen värähtelijän taajuusvastefunktiolla on seuraavat ominaisuudet:

- Magnitudi saa maksiminsa , kun taajuus on likimain ominaistaajuus

- Siirtymä matalilla taajuuksilla on likimain samassa vaiheessa herättävän voiman kanssa

- Ominaistaajuuden kohdalla vaihe-ero on 90^0

- Korkeilla taajuuksilla vaihe-ero on likimain -180^0

- Funktion imaginääriosa saa miniminsä likimain ominaistaajuudella

- Funktion reaaliosa vaihtaa merkkiä ominaistaajuudella

- Suhteellinen vaimennus ominaistaajuudella saadaan likimain jakamalla amplitudista ko. ominaistaajuutta vastaavien puoliarvotaajuuksien erotus 2 x ominaistaajuudella.

Usean vapausasteen värähtelijän parametrien estimointi

Mikäli vaimennusmatriisi diagonalisoituu ominaismuotomatriisien avulla, on usean vapausasteen taajuusvastefunktio on summa monesta yhden vapausasteen värähtelijän taajuusvastefunktiosta. Siksi esimerkiksi taajuusvastefunktion maksimit vastaavat likimain ominaistaajuuksia. Koska rakenteen kaksi ominaistaajuutta voivat kuitenkin olla lähellä toisiaan, ei maksimi enää välttämättä ole riittävän tarkka estimaatti ominaistaajuudelle, eikä vaimennuskertoimen suuruutta saada puoliarvoleveydestä.

Kertomalla yhtälössä (4) nimittäjän termit keskenään, voidaan yhtälö johtaa muotoon

$$|H_{ij}(\omega)|^2 = \frac{A_1\omega^{2n-2} + A_3\omega^{2n-3} + \ldots + A_{2n+1}}{\omega^{2n} + A_2\omega^{2n-1} + \ldots + A_{2n}}. \tag{15}$$

Sovittamalla taajuusvastefunktion mittaukset tietyllä taajuuskaistalla yhtälöön (15),saadaan kertoimat $A_1,\ldots,A_{2n+1}$ estimoitua. Ratkaisemalla nimittäjän nollakohdat esimerkiksi Bairstowin algoritmia [7] käyttäen voidaan edelleen kehittää muoto

$$|H_{ij}(\omega)|^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} B_i\omega^i}{\left[\left(\omega^2-\omega_1^2\right)+4\zeta_1^2\omega^2\omega_1^2\right]\ldots\left[\left(\omega^2-\omega_n^2\right)+4\zeta_n^2\omega^2\omega_n^2\right]}, \tag{16}$$

jossa on ominaistaajuudet ja suhteelliset vaimennuskertoimet saatu estimoitua. Sovitus ei kuitenkaan ole tehokas, jos halutaan selvittää monta ominaismuotoa. Lisäksi tietokoneen laskentatarkkuus asettaa rajoituksia juurien ratkaisulle ja mittausvirheet voivat aiheuttaa pahojakin virheitä estimaatteihin. Menetelmä vastaa Pronyn menetelmää muuten, mutta estimointi tehdään taajuuden- eikä ajanfunktiolle.

Yhtälössä (5b) olevat termit muodostavat Nyquist-tasossa ympyrän näköisiä kuvioita /3/. Koska lähellä jotakin ominaistaajuutta voidaan muiden termien vaikutusta pitää likimain vakiona (edellyttäen, että ominaistaajuudet erottuvat toisistaan selvästi), voidaan mitattuun taajuusvastefunktioon sovittaa ympyrä lähelle haluttuja ominaistaajuuksia. Ympyrän ominaisuuksien avulla voidaan helposti laskea estimaatit ominaistaajuudelle, suhteelliselle vaimennuskertoimella ja ominaismuodon painoarvolle. Lähellä ominaistaajuutta askel ympyrän kehällä on suurimmillaan, joten ominaistaajuuden estimaattia voidaan parantaa tutkimalla askelen suuruutta lähellä arvioitua ominaistaajuutta. Tarkka kuvaus menetelmästä löytyy mm. lähteestä /3/.

Kumaresan-Tufts -menetelmässä taajuusvastefunktio korvataan M:stä pääkomponentista lasketulla funktiolla: Olkoon mitattu taajuusvastefunktio N -alkioinen. Tavoitteena on etsiä M:ää alinta ominaistaajuutta vastaavat parametrit, missä M on paljon pienempi kuin N. Aluksi muodostetaan matriisi A:

$$[A]=\begin{bmatrix} y_2 & y_3 & \cdots & y_{L+1} \\ y_3 & y_4 & & y_{L+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{N-L+1} & & \cdots & y_N \end{bmatrix}. \qquad (17)$$

Sitten muodostetaan matriisin singulaariarvohajotelma

$$[A] = [U][\lambda][V]^T , \qquad (18a)$$

ja asetetaan hajotelmassa [λ]:sta M:ää suuremmat ominaisarvot nolliksi ja lasketaan matriisi

$$[A'] = [U][\lambda'][V]^T \qquad (18b)$$

singulaariarvohajotelmasta. Saatujen arvojen avulla lasketaan sitten taajuusvastefunktio, josta parametrit ratkaistaan etsimällä nimittäjän nollakohdat yhtälön (16) mukaisesti.

Singulaariarvohajotelman avulla voidaan poistaa muiden kuin alimpien ominaistaajuuksien vaikutus. Menettelemällä vastaavalla tavalla myös ympyrän sovituksen yhteydessä voidaan saavuttaa huomattava parannus sovitukseen. Menetelmä parantaa myös mittauksista tulevan kohinan vaikutusten eliminointia. Menetelmä on esitetty mm. artikkelissa /16/. Artikkelissa /15/ menetelmää on verrattu Total Least Squares -algoritmiin (TLS).

Moodianalyysi ajanfunktioista

Mikäli rakenteen värähtelyt herätetään iskun avulla, alkaa rakenne värähdellä mittauspisteissä likimain yhtälön

$$h(t) = \sum_n a_n e^{-\zeta_n \omega_n t} \sin(\sqrt{1-\zeta_n^2}\,\omega_n t + \phi_n) \qquad (19)$$

mukaisesti. Suuretta h(t) kutsutaan impulssivastefunktioksi. Mikäli ominaistaajuudet eroavat toisistaan riittävästi, saadaan tiettyä ominaistaajuutta vastaavat a_n ja ζ_n esimerkiksi seuraavalla tavalla:

1. Suodatetaan impulssivastefunktiosta pois muut kuin tutkittavan taajuuden ympäristö.

2. Muunnetaan amplitudiasteikko logaritmiseksi.

3. Piirretään maksimien kautta suora.

4. Suhteellinen vaimennuskerroin saadaan kaavasta

$$k = -\zeta_n \omega_n . \tag{20}$$

Pronyn-menetelmä

Pronyn -menetelmässä sovitetaan funktioon f(x) muotoa

$$f(x) = C_1 e^{a_1 x} + C_2 e^{a_2 x} + \ldots + C_n e^{a_n x} \tag{21}$$

oleva esitys /7, s. 378/. Koska määritettävät vakiot voivat olla kompleksilukuja, sanotaan menetelmää myös kompleksieksponenttimenetelmäksi.

Merkitään $f_m = f(x_m)$ ja $b_m = e^{a_m x_m}$. Tällöin suureet b_m toteuttavat yhtälöryhmän

$$\begin{array}{lllll}
C_1 & + C_2 & + \ldots & + C_n & = f_0 \\
C_1 b_1 + & C_2 b_2 + & \ldots & + C_n b_n & = f_1 \\
C_1 b_1^2 + & C_2 b_2^2 + & \ldots & + C_n b_n^2 & = f_2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
C_1 b_1^{N-1} & + C_2 b_2^{N-1} & + \ldots & + C_n b_n^{N-1} & = f_{N-1}
\end{array} . \tag{22}$$

Olkoot $b_1, b_2, \ldots, b_n$ yhtälön

$$b^n - c_1 b^{n-1} - \ldots - c_n = 0 \tag{23}$$

juuret, jossa kertoimet $c_1, c_2, \ldots, c_n$ saadaan ratkaisemalla yhtälöryhmä

$$\begin{array}{llll}
f_{n-1} c_1 & + f_{n-2} c_2 + \ldots + & f_0 c_n & = f_n \\
f_n c_1 & + f_{n-1} c_2 + \ldots + & f_1 c_n & = f_{n+1} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \\
f_{N-2} c_1 & + f_{N-3} c_2 + \ldots + & f_{N-n-1} c_n & = f_{N-1}
\end{array} \tag{24}$$

Yhtälön (23) juuret voidaan ratkaista mm. käyttäen Bairstowin algoritmia /7/. Kun juuret b_1, $b_2, \ldots, b_n$ on ratkaistu, muuttuu yhtälöryhmä (22) lineaariseksi, josta voidaan ratkaista loput tuntemattomat kertoimet.

Koska menetelmä on herkkä ulkoiselle kohinalle ja voi antaa virheellisiä tuloksia tietokoneen laskentatarkkuuden puitteissa, voidaan menetelmän luotettavuutta parantaa suodattamalla näytteistä päämatriisiesityksen avulla pois korkeat taajuudet samoin kuin Kumaresan-Tuft-menetelmässä.

Ibrahim Time-Domain-menetelmä

Ibrahim Time-Domain-menetelmässä (ITD) käytetään rakenteesta useasta eri paikasta ja peräkkäisinä ajanhetkinä tehtyjen mittauksien mittausten avulla muodostettua "systeemimatriisia", josta ratkaistaan ominaisarvot ja -muodot /3/. Systeemimatriisi liittää peräkkäisinä ajanhetkinä tehdyt mittaukset toisiinsa:

$$[A][x(t)] = [x(t+\Delta t)] \tag{25}$$

Matriisi [A] saadaan ratkaisemalla yhtälö (25) esimerkiksi pienimmän neliön sovituksella (pseudoinversio). Mikäli alkuperäisen systeemin toimintaa voidaan kuvata yhtälön (21) mukaisella sarjalla, voidaan helposti osoittaa, että matriisi [A] toteuttaa yhtälön

$$[A]\{\psi_r\} = e^{s_r \Delta t}\{\psi_r\}. \tag{26}$$

Yhtälöstä saadut ominaisarvot λ_r liittyvät alkuperäisen systeemin ominaistaajuuksiin yhtälön

$$\omega_r \sqrt{1-\zeta_r^2} = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(\lambda_r)}{\mathrm{Re}(\lambda_r)}\right) / \Delta\tau \tag{27}$$

missä Im ja Re ovat reaali- ja imaginääriosat.

Menetelmä suodattaa näytteistä pois osan satunnaisesta kohinasta, ja on siinä suhteessa parempi kuin Pronyn -menetelmä.

Zaghoolin Single-station menetelmä

Zaghloolin Single-Station -menetelmässä (STTD) sovitetaan yhdestä pisteestä mitattuun tietoon muotoa

$$f(t) = \sum_{k=1}^{2N} C_k e^{a_k t} u(t) \tag{28}$$

oleva funktio, missä u(t) on Heavisiden porrasfunktio. Samoin kuin ITD -menetelmässä muodostetaan aika-askeleita yhdistävä matriisi. Mitataan vasteet peräkkäisillä aika-askeleilla:

$$f_n(t) = f(t + nT)\, u(t) \tag{29}$$

ja muodostetaan aikasarjat

$$f_n(t) = f(t + nT + \Delta t)\, u(t) \;, \tag{30a}$$

$$f_n(t) = f(t + nT + 2\Delta t)\, u(t) \;. \tag{30b}$$

Systeemimatriisi [A] yhdistää muodostetut aikasarjat toisiinsa

$$[A][B] = [B] \;, \tag{31}$$

missä [B] on yhtälöitä (30a) ja (30b) vastaavien muotoa (29) olevien kertoimien C_k ja $\tilde{C}_k$ muodostama matriisi ja [B] on vastaava matriisi Δt:n verran myöhemmin. Ominaistaajuudet saadaan ITD -menetelmää vastaavalla tavalla.

SYSTEEMIN IDENTIFIOIMINEN TILAMALLISTA

Moodianalyysin käyttö edellyttää, että systeemimalli (1) kuvaa tarkasti rakenteen käyttäytymistä ja vaimennusmatriisi diagonalisoituu ominaismuotomatriisien avulla. Malli ei myöskään sovellu transientin tilan tutkimiseen, mikäli heräte ei ole deterministinen. Herätettä on pidettävä joko deterministisenä tai laajassa mielessä stationäärisenä, jotta esim. vastetta voitaisiin kuvata eksponenttifunktioiden avulla. Tosin esim. ITD - ja STTD -menetelmissä satunnaisuus pyritään poistamaan yhdistämällä useita eri mittauksia.

Tilamallin käyttö ei aseta vastaavia rajoituksia mittaustiedolle eikä vaimennusmatriisille. Tällöin kuitenkin mittauksien täytyy yleensä olla täydellisempiä: niiden avulla pitää kyetä estimoimaan koko systeemin toiminta. Estimointia voidaan nopeuttaa esim. käyttämällä hyväksi etukäteistuntemusta rakenteesta tai arvioimalla iteraation alkuarvot esim. moodianalyysin avulla. Kaikissa menetelmissä ei tarvitse etukäteen tuntea mallin rakennetta, (esimerkiksi vapausasteiden lukumäärää), vaan mittauksiin parhaiten sopiva malli muodostetaan estimoinnin yhteydessä. Yleensä sovitusmenetelmät eivät ole herkkiä kohinalle. Kuitenkin signaalikohinasuhteen ollessa pieni, ei esimerkisi pienimmän neliön sovitus toimi kovin hyvin. Eräs mielenkiintoinen tapa käsitellä voimakkaasti kohinaista signaalia on esitetty artikkelissa /19/.

Esitetyssä algoritmissa tehospektristä muodostetaan pienimmän vaiheen signaali, josta estimoidaan vaihe. Estimoituun vaiheeseen sovitetaan esim. iteratiivisesti pienimmän neliön mielessä nolla -malli (engl. all-zero model), joka muunnetaan systeemiä kuvaavaksi AR - malliksi.

Kirjoituksessa käsitellään vain ARX-mallin parametrien estimointia. Myös ARMAX-mallien parametrien estimoimiseksi on olemassa lukuisia erilaisia tapoja. Osassa näistä käytetään hyväksi tietoa herätteen todennäköisyysjakaumasta, yleensä tutkitaan laajassa mielessä stationäärisen, Gaussin-jakauman tavoin jakautuneen herätteen avulla tapahtuvaa tunnistusta. Yleensä myös MA-osa sisältää vähemmän parametreja kuin AR-osa. Esimerkkeinä ARMAX - sovitusmenetelmistä mainittakoon Morf, Sidhu ja Kailath -algoritmi (MSK) /15/, Li-Dickinson - algoritmi /17/ ja Fast RLS -algoritmi /18/.

Estimaattien luokittelu

Ennusteen virheen minimointi (PEM)

PEM-menetelmiksi (engl. prediction-error identification method) nimitetään menetelmiä, joissa minimoidaan lauseke

$$V_N(\theta,Z_N) = (1/N)\sum_{t=1}^{N} l\,(L(q)e(t,\theta))\,, \qquad (32)$$

missä l on skalaariarvoinen funktio ja L on stabiili, lineaarinen suodatin.

Mm. pienimmän neliön ja suurimman uskottavuuden -estimaatit kuuluvat tähän luokkaan.

Ns. pienimmän neliön -estimaatti (LS) saadaan minimoimalla lauseke

$$\{e(t,\theta)\} = \{y(t)\} - \{\varphi(t)\}[\theta]\,. \qquad (33)$$

Estimaatiksi [θ]:lle saadaan

$$[\theta]_N^{LS} = [R(N)]^{-1}[f(N)]\,, \qquad (34)$$

missä

$$[R(N)] = (1/N)\sum_{t=1}^{N}\{\varphi(t)\}\{\varphi(t)\}^T \text{ (autokorrelaatio)} \qquad (35a)$$

ja

$$[f(N)] = (1/N)\sum_{t=1}^{N}\{\varphi(t)\}\{y(t)\}^T \text{(ristikorrelaatio)} . \tag{35b}$$

Dynaamisen systeemin vasteen ennuste on yleisesti muotoa

$$\hat{y}(t|\theta) = g(t,Z^{t-1};\theta) , \tag{36}$$

missä $Z^t = [y(1),u(1),...,y(t),u(t)]$. Ennusteen virheen

$$e(t,\theta) = y(t) - \hat{y}(t|\theta) \tag{37}$$

todennäköisyystiheysfunktio on $f_e(x,t;\theta)$.

Suurimman uskottavuuden menetelmässä (engl. maximum likelihood, MLE) pyritään maksimoimaan havaintoja y(i) vastaava uskottavuusfunktio

$$f_y(\theta,y^N) = \sum_{t=1}^{N} f_e(e(t,\theta),t;\theta) . \tag{38}$$

Merkitään

$$l(e,\theta,t) = -\log f_e(e(t,\theta),t;\theta) . \tag{39}$$

Uskottavuusfunktio maksimoituu θ:lla, joka saadaan lausekkeesta

$$\theta_N^{ML} = \arg\min (1/N)\sum_{t=1}^{N} l(e,\theta,t) . \tag{40}$$

Kun vaste mitataan useasta pisteestä yhtäaikaa, voidaan estimaatti johtaa muotoon

$$\theta_N^{ML} = \arg\min_{\theta} \det\left[(1/N)\sum_{t=1}^{N} l(e,\theta,t)\right] . \tag{41}$$

Mikäli estimaatin todennäköisyysjakauma tunnetaan, voidaan havaintojen avulla muodostaa Bayesilainen estimaatti, joka parhaiten yhdistää havainnot vasteista ja herätteistä (Maximum a posterio estimaatit, MAP)

Mikäli jakauma on $g_{(\theta)}(\theta)$, niin estimaatille saadaan

$$\theta_N^{MAP} = \arg\max f_y(\theta;y^N).g_\theta(\theta) . \tag{42}$$

Yleensä estimaatin todennäköisyysjakaumaa ei kuitenkaan tunneta, joten Bayesilaista estimaattia ei voida muodostaa.

Akaiken informaatioteoreettinen kriteeri mallille (AIC)

Rakennemallin muodostaminen on yleensä varsin työlästä, eikä mallia useimmiten tarvitsekaan tehdä siten, että se sisältäisi täsmällisen kuvauksen kaikista yksityiskohdista. Useimmiten todellisessa systeemissä on paljon enemmän vapausasteita kuin mallinnetussa. Kuitenkin mittaus saattaa liittyä juuri sellaiseen yksityiskohtaan, jota ei ole mallinnettu, jolloin mallin estimointi ei liitykään todelliseen malliin ja tuloksien tulkitseminen väärin voi johtaa vakaviin seurauksiin. Useimmiten mittaukset suunnitellaan tarkoin ottaen huomioon mallistruktuuri. Aina ei mallin vapausasteiden lukumäärää kuitenkaan pystytä arvioimaan. Tällöin voidaan mittauksien avulla pyrkiä selvittämään mittauksiin parhaiten sopiva malli. Yksi mahdollinen tapa on estimoida parametrit useasta eri mallista ja tutkia, mikä malleista minimoi parhaiten virheen.

Akaiken informaatioteoreettisen kriteerin mukainen estimaatti on

$$\theta_N^{AIC} = \arg\min\left\{ (1/N)\sum_{t=1}^{N}[\ l(e(t,\theta),\theta,t)+\mathrm{Dim}\ \theta] \right\}. \tag{43}$$

Minimoimalla θ_N^{AIC} mallin suhteen

$$\{\theta,m\} = \arg\min_{m\in\mathcal{M}} \min_{\theta^m\in D_m} \left\{ (1/N)\sum_{t=1}^{N}[\ l(e(t,\theta),\theta,t)+\mathrm{Dim}\ \theta] \right\} \tag{44}$$

saadaan estimaatti mallille ja mallin parametreille. Mallin dimension määräämiseksi on olemassa myös monia muita menetelmiä, kuten esim. erilaisia dimensiomääritelmiä (Korrelaatio- ja Hausdorff -dimensiot).

Simuloimalla mallin käyttäytymistä ja vertaamalla todellisiin mittauksiin voidaan myös pyrkiä estimoimaan mallin hyvyyttä. Tosin mikäli mallintamistapa on oikea, ei mallin dimension vaihtaminen yhdellä juurikaan vaikuta suuren mallin globaaliin toimintaan, vaan virheellinen toiminta on lähinnä lokaalia, pienissä yksityiskohdissa havaittavaa. Systeemin toiminnan kannalta taas yksityiskohtien toiminta voi olla oleellista. Tämän takia mallintaminen kannattaa suorittaa pienille toiminnallisesti selkeille osakokonaisuuksille erikseen, ja vasta tämän jälkeen muodostaa koko systeemiä kuvaava malli.

Korrelaation käyttö

Korreloimalla ennusteen virhe edeltävän tiedon kanssa saadaan estimaatti [θ]:lle ratkaisemalla yhtälöt

$$f_N(\theta, Z_N) = 0 \quad (45)$$

missä

$$f_N(\theta, Z_N) = (1/N)\sum_{t=1}^{N}\{\psi(t,\theta)\}\, a(L(q)e(t,\theta)) . \quad (46)$$

Ψ on edeltävästä tiedosta ja mahdollisesti [θ]:sta muodostettu instrumentointivektori, L(q) on viiveoperaattori ja a(e) on transformaatiovektori (tyypillisesti valitaan a(e) = e).

Instrumentointivektori voidaan muodostaa esim. pienimmän neliln estimaatin avulla. Merkitsemällä

$$\{\Psi(t)\} = \{\varphi(t)\}^T [\theta]_N^{LS} \quad (47)$$

saadaan uusi konsistentti estimaatti θ:lle (Instrumentointimuuttuja -estimaatti, IV) /1, s. 193/,

$$[\theta]_N^{IV} = [R(N)]^{-1}[f(N)] , \quad (48)$$

missä

$$[R(N)] = (1/N)\sum_{t=1}^{N}\{\Psi(t)\}\{\Psi(t)\}^T \text{ (autokorrelaatio)} \quad (49a)$$

ja

$$[f(N)] = (1/N)\sum_{t=1}^{N}\{\Psi(t)\}\{y(t)\}^T \text{ (ristikorrelaatio)} . \quad (50b)$$

Jatkamalla estimointia kunnes virhe ei enää pienene saadaan parempi estimaatti mallin kertoimille. Instrumenttivektorin valinta voidaan tietysti tehdä muullakin tavalla /1, s. 402/.

Estimaatin ratkaisu

Yleiset periaatteet

Pienimmän neliön estimaatti

$$[\theta]_N^{LS} = [R(N)]^{-1}[f(N)] \,. \tag{51}$$

Voidaan ratkaista kääntämällä matriisi $R^{-1}(N)$, mutta paljon tehokkampi tapa on ratkaista muotoa

$$[R(N)]\,[\theta]_N^{LS} = [f(N)] \tag{52}$$

olevat yhtälöt. Ratkaisussa voidaan edetä mm. seuraavasti: Muodostetaan matriisinmatriisin R(N) Choleskyn hajotelma, singulaariarvohajotelma tai Householderin QR -hajotelma. Choleskyn hajotelma muodostetaan seuraavalla tavalla. Ratkaistaan Q yhtälöstä

$$[Q]^T[Q] = [R] \,, \tag{53}$$

missä [Q] on yläkolmiomatriisi. Kun [Q] on ratkaistu, saadaan yhtälö muotoon

$$[Q]^T[P] = [f] \,, \tag{54}$$

josta saadaan ratkaistua P:n arvot. Ratkaisemalla yhtälöt

$$[Q][\theta]^{LS} = [P] \tag{55}$$

saadaan arvot estimaateille. Erilaisten hajotelmien ratkaisemiseksi on olemassa nopeita ja numeerisesti hyviä algoritmeja monessa eri kaupallisessa matemaattisessa aliohjelmakirjstossa.

Levinson algoritmi

Käyttämällä toisen asteen statistisia ominaisuuksia voidaan helposti johtaa seuraavat yhtälöt:

$$\begin{bmatrix} R_0 & R_1 & \cdots & R_{n-1} \\ R_1 & R_0 & \cdots & R_{n-2} \\ \cdots & & & \cdots \\ R_{n-1} & R_{n-2} & \cdots & R_0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1^n \\ a_2^n \\ \cdots \\ a_n^n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -R_1 \\ -R_2 \\ \cdots \\ -R_n \end{Bmatrix}, \tag{56}$$

missä R on korrelaatiofunktio ja a:t ARX-mallin kertoimet.

Kertoimet a_n saadaan määritettyä yhtälöistä seuraavalla tavalla:

$$\hat{a}_k^{n+1} = \hat{a}_k^n + \hat{\rho}_n \hat{a}_{n-k+1}^n \,, k=1,\dots,n \tag{57a}$$

$$\hat{a}_{n+1}^{n+1} = \hat{\rho}_n \,, \tag{57b}$$

$$V_{n+1} = V_n + \hat{\rho}_n a_n \,, \tag{57c}$$

$$\hat{\rho}_n = (-a_n)/V_n \,, \tag{57d}$$

$$a_n = R_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \hat{a}_k^n R_{n-k+1} \,. \tag{57e}$$

Lattice -suodatus

AR-mallissa y:n ennusteelle saadaan

$$\hat{y}_n(t|\hat{\theta}^n) = -\hat{a}_1^n y(t-1) - \dots - \hat{a}_n^n y(t-n) \tag{58}$$

ja vastaavasti ennusteelle asteella (n+1) saadaan

$$\hat{y}_{n+1}(t|\hat{\theta}^{n+1}) = -\hat{a}_1^{n+1} y(t-1) - \dots - \hat{a}_{n+1}^{n+1} y(t-n-1) \,. \tag{59}$$

Käyttämällä Levinsonin algoritmissa johdettua yhteyttä

$$\hat{a}_k^{n+1} = \hat{a}_k^n + \hat{\rho}_n \hat{a}_{n-k+1}^n, \; k=1,\dots,n \tag{60}$$

saadaan yhtälöistä (58) ja (59) yhtälö

$$\hat{y}_{n+1}(t|\hat{\theta}^{n+1}) = \hat{y}_n(t|\hat{\theta}^n) - \hat{\rho}_n \hat{r}_n(t-1) \,, \tag{61}$$

missä

$$\hat{r}_n(t-1) = y(t-n-1) + \hat{a}_1^n y(t-n) - \dots - \hat{a}_n^n y(t-1) \,. \tag{62}$$

Koska ennusteen virhe on

$$\hat{e}_n = y(t) - \hat{y}_n(t\,|\hat{\theta}^n), \qquad (63)$$

saadaan yhtälöt

$$\hat{\theta}^{n+1}(t) = \hat{\theta}^n(t) + \hat{\rho}_n\hat{r}_n(t-1), \qquad (64a)$$

$$\hat{r}_{n+1}(t) = \hat{r}_n(t-1) + \hat{\rho}_n\hat{e}_n(t), \qquad (64b)$$

$$\hat{e}_0(t) = \hat{r}_0(t) = y(t). \qquad (64c)$$

Lisäksi seuraavat orthogonaalisuusehdot ovat voimassa:

$$(1/N)\sum_{t=1}^{N}\hat{e}_n(t)\hat{e}_{n-k}(t-k) = V_n\delta(k), \qquad (65a)$$

$$(1/N)\sum_{t=1}^{N}\hat{r}_n(t)\hat{r}_k(k) = V_n\delta(n-k), \qquad (65b)$$

$$(1/N)\sum_{t=1}^{N}\hat{e}_n(t)\hat{r}_k(t-1) = \begin{cases} -\alpha_n & ,n<=k \\ 0 & ,n>k \end{cases} \qquad (65c)$$

missä $\delta(k)$ on deltafunktio. Kertoimet $\hat{\rho}_n$ saadaan lausekkeesta

$$\hat{\rho}_n = \frac{\sum_{t=1}^{N}\hat{e}_n(t)\hat{r}_n(t-1)}{\sum_{t=1}^{N}\hat{e}_n^2(t)}. \qquad (66)$$

Lattice -suodattimia käytetään paljon signaalinkäsittelyssä.

Iteratiiviset menetelmät

Quasi-Newton

Virhefunktion minimointiin voidaan hyvin käyttää iteratiivisia menetelmiä. Tavoitteena on minimoida lauseke

$$\{e(t,\theta)\} = \sum\{e_n(t,\theta)\}^2 = \sum(\{y_n(t)\}-\{\varphi_n(t)\}[\theta])^2 . \qquad (67)$$

Minimi löydetään, kun $\partial e(t,\theta)/\partial\theta_j = 0$. Merkitään $\{g(\theta)\} = \{\partial e(t,\theta)/\partial\theta_1 ... \partial e(t,\theta)/\partial\theta_n\}^T$ (Jacobin matriisi). Jos $\{g(\theta)\}$ on differentioituva pisteessä θ, niin

$$\{g(\theta+h)\} = \{g(\theta)\} + [J]^T\{h\} + \{h\}\,\varepsilon(h) , \qquad (68)$$

missä $[J]$ on $e(t,\theta)$:n Hessin matriisi. Minimissä $[J]\{h\} = -\{g(\theta)\}$, joten $\{h\} = -[J]^{-1}\{g(\theta)\}$. Tällöin iteraatioksi saadaan

$$[\theta]_{i+1} = [\theta]_i - [J]_i^{-1}\{g(\theta_i)\} . \qquad (69)$$

Quasi-Newton -menetelmässä ei lasketa Hessin matriisin tarkkaa arvoa, vaan aproksimoidaan sitä siten, että $[J]_i$ lähenee Hessin matriisin tarkkaa arvoa i:n kasvaessa.

Marquardtin -menetelmä

Merkitään $\{f(\theta)\} = \{e_1(t,\theta),...,e_n(t,\theta)\}$. Tällöin minimissä $e(t,\theta) = [J_f(\theta)]^T\{f(\theta)\}$, missä$[J_f(\theta)]^T = [\partial f(\theta)/\partial\theta_1 ... \partial f(\theta)/\partial\theta_n]$. Marquartin -menetelmässä iteroidaan kaavan

$$[\theta]_{i+1} = \left([\theta]_i - [J_f(\theta_i)]^T\{f(\theta_i)\}\right)\left([J_f(\theta_i)]^T[J_f(\theta_i)] - b[I]\right)^{-1} \qquad (70)$$

mukaisesti. Parametria b pienennetään iteraation kuluessa. Koska matriisi $\left([J_f(\theta_i)]^T[J_f(\theta_i)] - b[I]\right)$ on säännöllinen, on käänteismatriisi aina olemassa. Käänteismatriisia ei tarvitse laskea, vaan riittää yhtälöryhmän ratkaisu jokaisella iteraatiokierroksella.

Rekursiivinen estimointi

Ennusteen virheen minimointi rekursiivisesti (RPEM)

Rekursiivisissa menetelmissä painotetaan havaittua aineistoa siten, että myöhempänä ajankohtana mitattu tieto vaikuttaa estimaatin arvoon enemmän kuin aikaisemmin mitattu. Painotetussa pienimmän neliön -estimoinnissa minimoidaan virhefunktio

$$e(t,k) = b(t,k)\left(\{y(k)\} - \{\varphi(k)\}^T[\theta]\right)^2 . \qquad (71)$$

Jos käytetyltä painofunktiolta vaaditaan

$$\begin{aligned} &\beta(t,k) = \lambda(t)\beta(t-1,k), \quad 1 \le k \le t-1 , \\ &\beta(t,k) = 1 , \end{aligned} \qquad (72)$$

niin saadaan seuraava yhteys peräkkäisille estimaateille /1/:

$$\left\{\theta_t\right\} = \left\{\theta_{t-1}\right\} + [R(t)]^{-1}\left\{\varphi(t)\right\}\left(\{y(k)\} - \{\varphi(k)\}^T[\theta]\right), \qquad (73)$$

$$[R(t)] = \lambda(t)[R(t-1)] + \{\varphi(k)\}\{\varphi(k)\}^T . \qquad (74)$$

Käyttämällä matriisin kääntölemmaa, voidaan lauseke johtaa muotoon

$$\left\{\theta_t\right\} = \left\{\theta_{t-1}\right\} + [L(t)]\left(\{y(k)\} - \{\varphi(k)\}^T[\theta]\right), \qquad (75)$$

missä

$$[L(t)] = \left([P(t-1)]\left\{\varphi(t)\right\}\right)/D(t) , \qquad (76a)$$

$$[P(t)] = \left([P(t-1)] - [Q(t)]/D(t)\right)/\lambda(t) , \qquad (76b)$$

$$D(t) = \lambda(t) + \left\{\varphi(t)\right\}^T [P(t-1)]\left\{\varphi(t)\right\} , \qquad (76c)$$

$$[Q(t)] = [P(t-1)]\left\{\varphi(\tau)\right\}\left\{\varphi(t)\right\}[P(t-1)] . \qquad (76d)$$

Jos λ on vakio, niin saadaan

$$\beta(t,k) = \lambda^{t-k} . \qquad (77)$$

Vakiota kutsutaan unohdustermiksi. Unohdustermin arvoksi valitaan tyypillisesti arvo väliltä 0.98 - 0.995. Lausekkeen (77) käyttö yksinkertaistaa rekursiokaavaa /1/.

Rekursiivinen pseudolineaarinen regressio (RPLR)

Jos vektori $\{T(t,\theta)\}$ ei riipu θ:sta, niin se on lineaarinen regressiovektori. Mikäli vektori $\{T(t,\theta)\}$ riippuu θ:sta, joka taas voidaan muodostaa vanhasta tiedosta, niin puhutaan pseudolineaarisesta regressiovektorista. Tällöin voidaan johtaa rekursiivinen menetelmä parametrivektorin (ajasta riippuva) muodostamiseksi /1/ :

$$\{\hat{y}(t)\} = \{\varphi(k)\}^T[\hat{\theta}], \tag{78a}$$

$$\{\varepsilon(t)\} = \{y(t)\} - \{\hat{y}(t)\}, \tag{78b}$$

$$\{\hat{\theta}_t\} = \{\hat{\theta}_{t-1}\} + \gamma(t)[R(t)]^{-1}\{\varphi(t)\}\{\varepsilon(t)\}, \tag{78c}$$

$$[R(t)] = [R(t-1)] + \gamma(t)\left(\{\varphi(k)\}\{\varphi(k)\}^T - [R(t-1)]\right). \tag{78d}$$

Rekursiivinen instrumentointimuuttujan menetelmä (RIV)

Rekursiivisessa instrumentointimuuttujan -menetelmässä voidaan johtaa lausekkeita (73) ja (74) vastaavasti lausekkeet

$$\{\theta_t\} = \{\theta_{t-1}\} + [L(t)]\left(\{y(k)\} - \{\psi(k)\}^T[\theta]\right), \tag{79}$$

missä

$$[L(t)] = ([P(t-1)]\{\psi(t)\})/D(t), \tag{80a}$$

$$[P(t)] = ([P(t-1)] - [Q(t)]/D(t))/\lambda(t), \tag{80b}$$

$$D(t) = \lambda(t) + \{\psi(t)\}^T[P(t-1)]\{\psi(t)\}, \tag{80c}$$

$$[Q(t)] = [P(t-1)]\{\psi(\tau)\}\{\psi(t)\}[P(t-1)], \tag{80d}$$

on edeltävästä tiedosta ja mahdollisesti θ:sta muodostettu instrumentointivektori.

Laskentamenetelmät rekursiiviseen estimointiin

Rekursiivinen Gauss-Newton -menetelmä

Lausekkeen

$$V_N(\theta,Z^N) = (1/2N)\sum^{N}\{\varepsilon(t,\theta)\}^2 \tag{81}$$

gradientti on

$$\left[V'_N(\theta,Z^N)\right] = (1/N)\sum^{N}\{\psi(t,\theta)\}\{\varepsilon(t,\theta)\}. \tag{82}$$

Valitaan

$$[R(t)] = \gamma(t)\sum^{N}\beta(t,k)\{\psi(t,\theta)\}\{\psi(t,\theta)\}^T, \tag{83}$$

jolloin rekursiiviseksi estimaatiksi saadaan lauseke /1/

$$\{\varepsilon(t)\} = \{y(t)\} - \{\hat{y}(t)\}, \tag{84a}$$

$$\{\hat{\theta}_t\} = \{\hat{\theta}_{t-1}\} + \gamma(t)[R(t)]^{-1}\{\psi(t)\}\{\varepsilon(t)\}, \tag{84b}$$

$$[R(t)] = [R(t-1)] + \gamma(t)\left(\{\psi(k)\}\{\psi(k)\}^T - [R(t-1)]\right). \tag{84c}$$

Lauseke (84c) voidaan helposti johtaa muotoon

$$[R(t)]\left(\{\hat{\theta}_t\} - \{\hat{\theta}_{t-1}\}\right)/\gamma(t) = \{\psi(t)\}\{\varepsilon(t)\}, \tag{85}$$

minkä ratkaisussa voidaan käyttää esimerkiksi Choleskyn hajotelmaa, ilman että matriisia R(t) tarvitsee kääntää. Lisäksi yleisesti R(t):tä voidaan pitää symmetrisenä matriisina. Yhtälöryhmän ratkaisemista varten löytyy useita valmiita ohjelmia lukuisista eri ohjelmakirjastoista.

Epälineaariset mallit

Coulomb-vaimennus ja jousen jäykistyminen tai löystyminen ovat kaksi tyypillistä rakenteen epälineaarisuuden muotoa. Lokaali epälineaarisuus voidaan havaita esim. taajuusvastefunktion käyttäytymisestä lähellä vastaavaa ominaistaajuutta. Epälineaarisuuden suuruus voidaan arvioida esimerkiksi ominaistaajuutta vastaavan piikin leveydestä.

Mikäli lineaariseen malliin sovitetaan epälineaarisesta systeemistä saadut mittaussignaalit, voi tulos olla käyttökelvoton. Siksi jo estimointivaiheessa on pyrittävä käyttämään mahdollisimman tarkoin todellista systeemiä kuvaavaa mallia. Kuitenkin on huomattava, että epälineaarisen mallin sovitus mittauksiin voi johtaa huonosti käyttäytyvään estimointiongelmaan, jolloin pienikin mittaussignaalin muutos voi aiheuttaa suuren muutoksen estimoinnin tulokseen. Ongelmaa voidaan yrittää kiertää asettamalla reunaehtoja epälineaarisuudelle verrattuna lineaariseen käyttäytymiseen. Epälineaarisen mallin parametrien estimoinnissa voidaan myös muodostaa muita havainnointimuuttujia kuin mitä saadaan Kalman suodattimella (tilamalli). Eräs tällainen on esitetty artikkelissa /21/. Itse asiassa tilamallin muodostaminen useimmille epälineaarisille systeemeille lienee hyvin vaikeaa ellei mahdotonta.

Yksi suurimpia ongelmia epälineaarisia malleja käsiteltäessä on mahdollisten epälineaaristen tekijöiden suuri lukumäärä. On vaikea tutkia, miten jokin systeemi on epälineaarinen, ellei rakenteesta ole riittävää etukäteistietoutta.

Linearisoiminen

Jousen jäykistymistä voidaan kuvata lineaarisella mallilla (14), jossa $\varphi(t)$ on muotoa /1, s. 132/

$$[\varphi]^T = \begin{bmatrix} -y(t-1) & \ldots & -y(t-n_a) & u(t-1) & \ldots & u(t-n) & u^2(t-1) & \ldots & u^m(t-n) \end{bmatrix}. \quad (86)$$

Tällöin ratkaisu voidaan etsiä vastaavia lineaarisia estimointimenetelmiä käyttäen. Kuitenkin on huomattava, että korkeamman asteen termien käsittely voi johtaa numeerisiin vaikeuksiin, kun malli on monimutkainen.

Toinen mahdollinen lähestymistapa on kokeilla eri suuria epälineaarisuutta kuvaavia parametreja ja tutkia esimerkiksi Akaiken kriteerin avulla mallin sopimista mittaussignaaliin. Epälineaariseksi termiksi valitaan se, joka parhaiten kuvaa rakenteen käyttäytymistä /4/.

Rekursion käyttö ratkaisussa

Toinen mahdollinen lähestymistapa on estimoida vastaavan lineaarisen mallin parametreja rekursiivisesti. Mikäli unohdustermi on suuri ja mittaukset on tehty epälineaarisuuden aiheuttamaan vaihteluun nähden suurella taajuudella, niin parametrien koko heilahtelee epälineaarisuuden mukana. Vertaamalla estimoidun parametrin heilahtelua vastaavaan mittausarvoon, voidaan pyrkiä lokaalista määräämään epälineaarisuuden luonne ja suuruus. Menetelmä vastaa ekvivalenttia linearisoimista /20/ tietyn aika-askeleen sisällä. Mikäli epälineaarisuutta kuvaava funktio ei ole jatkuva, epälineaarisuuden vaikutus "suodattuu" edellisten estimaattien vaikutuksesta.

TÄRKEIMMÄT KÄYTETYT MENETELMÄT

[ ] -Matriisi
{ } - Vektori
{φ} - Mittausvektori

$[\ ]^T$ - Transpoosi
ω^* - Kompleksikonjugaatti
q - Yksikköviive
h - Impulssivaste
H - Taajuusvaste
$P(\omega)$ -Tehospektri
$\{\theta\}$ - Parametrivektori
$\{\varepsilon\}$ - Ennusteen virhe
$[R]$ - Korrelaatio
V_N - Virhefunktio
$[J_f]$ - Jakobin matriisi
λ - Unohdustermi
$\{y\}$ - Vaste
$\{u\}$ - Heräte
$[I]$ - Yksikkömatriisi

KIRJALLISUUSLUETTELO

[1] L. Ljung,System Identification, Prentice-Hall

[2] L. Ljung, Regler Theorie, Prentice-Hall

[3] D. J. Ewins, Modal Testing: Theory and Practice, John Wiley&Sons Inc.

[4] M. B. Priestley, Spectral Analysis and Time Series, London Academic Press, 1981

[5] S. Hayking, Adaptive Filter Theory, Prentice-Hall

[6] C.J. Bathe, Finite Element Method in Engineerin Analysis, Prentice-Hall

[7] F. B. Hildebrand, Introduction to Numerical Analysis, McGraw-Hill

[8] W. T. Thomson, Theory of Vibration With Applications, George Allen

[9] V. V. Bolotin, Random Vibrations of Elastic Systems, Martinus Nijhoff Publisher

[10] D. E. Newland, An Introduction to Random Vibrations and Spectral Analysis, Longman

[11] T. Kohonen, Self-Organization and Associative Memory, Springer-Verlag

[12] Zienkiewicz, The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics, McGraw-Hill

[13] W. K. Pratt, Digital Image Processing

[14] S. Mitra, M. Ekstrlm, Two-Dimensional Digital Signal Processing

[15] Dugre, Scharf, Gueguen, Exact Likelihood for Stationary VectorAutoregressive Moving Average Processes, Eurasip, Signal Processing 11, 1986

[16] Porat, Friedlander, On Accuracy of the Kumaresan-Tuft Method for Estimating Complex Damped Exponentials, IEEE Transaction on Acoustic, Speech, and Signal Processing, Vol. ASSP-35, No. 2, February 1987

[17] Alengring, Zerubia, A Method to Estimate the Parameters of an ARMA Model, IEEE Trans. on Automatic Control,Vol. AC-32, No. 12, Dec. 87

[18] Karlsson, Hayes, Least Squares ARMA Modeling of Linear Time Varying Systems: Lattice Filter Structures and Fast RLS Algorithms, IEEE Trans. on Acoustic, speech, and signal Proc., Vol. ASSP-35, No. 7, July 87

[19] Kanai, Abe, Accurate Autoregressive Spectrum Estimation at Low Signal-to_Noise Ratio Using a Phase Matching Technique, IEEE Trans. on Acoustic, speech, and signal Proc., Vol. ASSP-35, No.9, Sept. 87

[20] T. T. Soong,Random Differential Equations in Science and Engineering, Academic Press, 1973

[21] Bastin, Gevers, Stable Adaptive Observers for Nonlinear Time-Varying Systems, IEEE Transaction on Automatic control, Vol. 33, no. 7, July 1988

[22] Sorensen, Parameter Estimation, Prinsiples and Problems, Marcel Decker, Inc., 1980

Ari Vepsäläinen, dipl.ins., Valtion Teknillinen Tutkimuskeskus, Tietojenkäsittelytekniikan laboratorio