

SANDWICH-PALKIN VAPAA VÄRÄHTELY

Simo Malmi

Rakenteiden Mekaniikka, Vol. 21
No 3 1988, s. 14...36

TIIVISTELMÄ

Artikkelissa johdetaan sandwich-palkin vapaan värähtelyn yhtälöt, kun otetaan huomioon paarteiden taivutusjäykkyys, ytimen leikkausjäykkyys, pitkittäiset- ja poikittaiset hitausvoimat ja rotaatiohitaus, ja esitetään kerrospalkin ominaistuuksien ja -muotojen ratkaisemista elementtimenetelmällä tarkkoja muotofunktioita käyttäen. Teoria on tarkasti voimassa kaksipaarteiselle ja symmetriselle kolmipaarteiselle sandwich-palkille ja likimäärin myös useampi paarteisille symmetrisille palkeille.

YLEISTÄ

Viskoelastisella ytimellä ja kimmoisilla paarteilla varustettujen kerrospalkkien (sandwich-palkkien) tutkimus lähti liikkelle halusta vähentää rakenteisiin kohdistuvan värähtelyn vaikutusta. Whittier (Whittier, 1959) osoitti ensimmäisenä, että rakentamalla palkit taivutusjäykistä paarteista ja leikkausjäykästä ytimestä, jolla on korkea leikkausjäykkyys ja jonka taivutusjäykkyys on mitätön, saadaan aikaan rakenne, joka merkitsevästi vaimentaa värähtelyä. Lisäksi oletettiin, että ydin on riittävän jäykkä estämään paarteiden suhteellisen liikkeen poikittaisessa suunnassa.

Analyttisten ratkaisujen esittämisestä (DiTaranto, 1965, Mead & al., 1969) sandwich-palkeille eri reunahdoilla ollaan siirtymässä elementtimenetelmiin. Viime vuosina onkin esitelty tiittävästi ensimmäiset tarkkaan elementtimenetelmään (tarkat muotofunktiot) perustuvat laskentaohjelmat. Valmisohjelmissa on kerroksellisia kuorielementtejä ja ratkaisut perustuvat polynomisiin muotofunktioihin (ABAQUS, ANSYS). Kerrospalkkien dynamiikan tarkkaan ratkaisemiseen on kehitetty ohjelmia (Rao, 1977), mutta nämä eivät ota huomioon rotaatiohitauksia. Tarkkoja elementtiohjelmia on kehitetty sandwich-palkin staattiseen analyysiin (Davies, 1986, Heinisuo, 1986, Möttönen, 1987), viskoe-

lastiseen analyysiin (Westerlund, 1987) sekä vapaan värähtelyn ratkaisemiseen (Malmi, 1987).

Tässä artikkelissa johdetaan sandwich-palkin vapaan värähtelyn yhtälöt, kun otetaan huomioon paarteiden taivutusjäykkyys, ytimen leikkausjäykkyys, pitkittäiset- ja poikittaiset hitausvoimat ja rotaatiohitaus. Artikkelissa esitetään kerrospalkin ominaistuuksien ja -muotojen ratkaisemistapa elementtimenetelmällä tarkkoja muotofunktioita käyttäen.

Perusoletukset ovat seuraavat:

1. Rakenteen massapainopiste ja kimmainen painopiste ovat samassa pisteessä.
2. Poikittaiset siirtymät eri kerroksilla ovat yhtä suuret
3. Paarteet ovat suoria, yhdenmuotoisia ja -suuntaisia kimmoisia palkkeja
4. Ydinkerros ottaa vastaan vain leikkausjäännitystä
5. Paarteet ja ydin ovat liitetyt jatkuvalla liitännällä
6. Materiaali ja poikkileikkaussuuret säilyvät vakioina elementin matkalla
7. Siirtymät ovat pieniä

Kerrospalkin liikeyhtälöt asianomaisine reunaehtoineen johdetaan Lagrangen formalismin avulla. Tähän tarvitaan kimmoenergian ja liike-energian lausekkeet. Tämän jälkeen esitetään johdettujen differentiaaliyhtälöiden ratkaisut ja tarkat elementtiformulaatiot. Lopuksi tarkastellaan menetelmällä laskettuja esimerkkejä.

KERROSPALKIN KIMMOENERGIA

Tässä esityksessä seurataan Heinisuo (Heinisuo, 1986) käyttämiä merkintöjä. Kimmoenergian lausekkeelle U on johdettu kaava (Stamm & al., 1974)

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L (EAu'^2 + EIv''^2 + EI_s\gamma'^2 - 2EI_s v''\gamma' + k\gamma^2) dx \quad (1)$$

missä

EA = palkin puristusjäykkyys

EI_o = paarteiden yhteenlaskettu taivutusjäykkyys

EI_s = paarteiden puristus- ja vetojäykkyyden muodostama taivutusjäykkyys

$$= \sum_{i=1}^n EA_i y_i^2, \quad n = \text{paarteiden lukumäärä}$$

$EI = EI_s + EI_o$ = palkin taivutusjäykkyys

k = ytimen leikkausjäykkyys

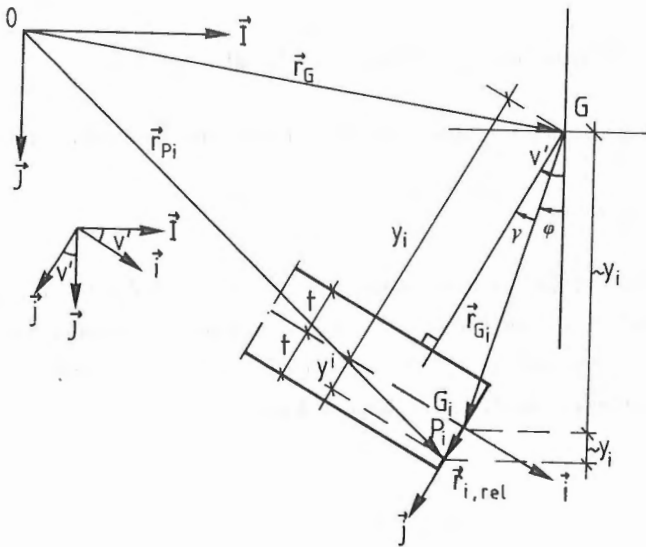
u = venymä

v = taipuma

γ = liukuma

(2)

KERROSPALKIN LIIKE-ENERGIA



Kuva 1. Siirtymäkuva paarre i

Tarkastellaan aluksi kuvassa 1 olevia koordinaatistoja. Globaalkoordinaatiston suuntavektoreita merkitään kirjaimilla \vec{I} ja \vec{J} ja lokaalkoordinaatiston suuntavektoreita kirjaimilla \vec{i} ja \vec{j} . Koordinaatistojen välille saadaan yhteys

$$\begin{aligned} \vec{i} &= \cos v' \vec{I} + \sin v' \vec{J} = \vec{I} + v' \vec{J} \\ \vec{j} &= -\sin v' \vec{I} + \cos v' \vec{J} = -v' \vec{I} + \vec{J} \end{aligned} \quad (3)$$

missä on oletettu siirtymien olevan pieniä eli $\sin v' = v'$ ja $\cos v' = 1$. Kuvassa 1 olevia merkintöjä käyttäen oletetaan, että poikkittaiset siirtymät ovat samat palkin poikkileikkauksen kaikissa pisteissä ja paarteiden painopisteet G_i pysyvät samalla suoralla, jolloin paarteella i olevan pisteen P_i siirtymä \vec{r}_{P_i} voidaan lausua palkin painopisteen G , paarteen painopisteen G_i ja pisteen P_i suhteellisen siirtymän avulla seuraavasti

$$\vec{r}_{P_i} = \vec{r}_G + \vec{r}_{G_i} + \vec{r}_{i,rel} \quad (4)$$

missä

$$\begin{aligned} \vec{r}_G &= u\vec{I} + v\vec{J} \\ \vec{r}_{G_i} &= -y_i\varphi\vec{I} + y_i\vec{J} \\ \vec{r}_{i,rel} &= y^i\vec{j} = -y^i v'\vec{I} + y^i\vec{J} \end{aligned} \quad (5)$$

Derivoimalla lauseke (4) ajan suhteen saadaan pisteen P_i nopeus $\dot{\vec{r}}_{P_i}$

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}}_{P_i} &= \dot{\vec{r}}_G + \dot{\vec{r}}_{G_i} + \dot{\vec{r}}_{i,rel} \\ &= \dot{u}\vec{I} + \dot{v}\vec{J} - y_i\dot{\varphi}\vec{I} - y^i\dot{v}'\vec{I} \\ &= (\dot{u} - y_i\dot{\varphi} - y^i\dot{v}')\vec{I} + \dot{v}\vec{J} \end{aligned} \quad (6)$$

missä on oletettu palkin ja paarteen poikkileikkauksen muodonmuutosten rakenteen poikkisuunnassa olevan nolla eli $\dot{y}^i = 0$ ja $\dot{y}_i = 0$.

Paarteen i massapisteen P_i liike-energia dT_{P_i} on

$$\begin{aligned} dT_{P_i} &= \frac{1}{2} \dot{\vec{r}}_{P_i} \cdot \dot{\vec{r}}_{P_i} d\mu_{P_i} \\ &= \frac{1}{2} [(\dot{u} - y_i\dot{\varphi} - y^i\dot{v}')\vec{I} + \dot{v}\vec{J}] \cdot [(\dot{u} - y_i\dot{\varphi} - y^i\dot{v}')\vec{I} + \dot{v}\vec{J}] d\mu_{P_i} \\ &= \frac{1}{2} [\dot{v}^2 + (\dot{u} - y_i\dot{\varphi} - y^i\dot{v}')^2] d\mu_{P_i} \\ &= \frac{1}{2} \rho_i [\dot{v}^2 + \dot{u}^2 + y_i^2\dot{\varphi}^2 + y^{i2}\dot{v}'^2 - 2y_i\dot{u}\dot{\varphi} - 2y^i\dot{u}\dot{v}' + 2y_i y^i \dot{\varphi}\dot{v}'] dA_i dx \end{aligned} \quad (7)$$

missä

$$\begin{aligned} \mu_{P_i} &= \text{Pisteen } P_i \text{ massa,} \\ \rho_i &= \text{Paarteen } i \text{ tiheys.} \end{aligned} \quad (8)$$

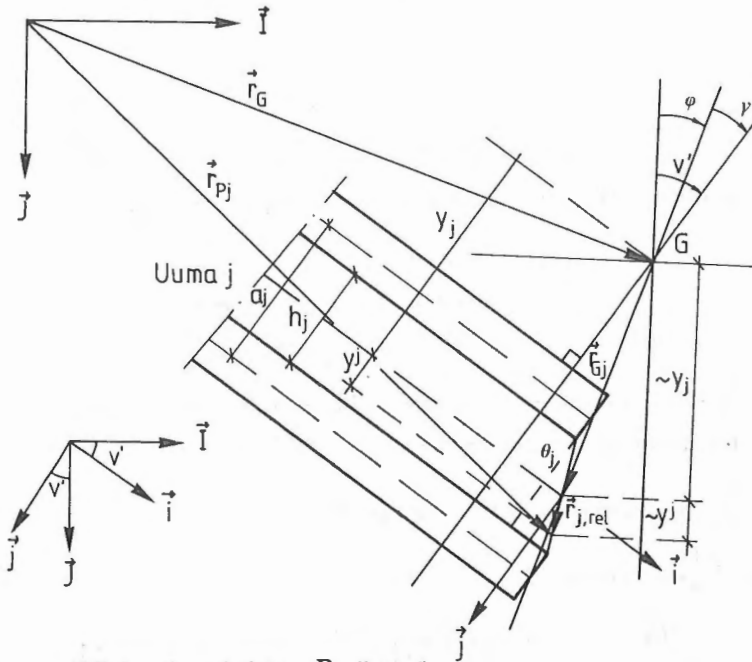
Integroidaan paarteen poikkipinnan yli, jolloin liike-energiaksi saadaan dx :n mittaiselle paarteen i osalle

$$\begin{aligned} dT_i &= \int_{A_i} dT_{P_i} \\ &= \frac{1}{2} \int_{A_i} \rho_i [\dot{v}^2 + \dot{u}^2 + y_i^2\dot{\varphi}^2 + y^{i2}\dot{v}'^2 - 2y_i\dot{u}\dot{\varphi} - 2y^i\dot{u}\dot{v}' + 2y_i y^i \dot{\varphi}\dot{v}'] dA_i dx \\ &= \frac{1}{2} \rho_i \int_{A_i} [\dot{v}^2 + \dot{u}^2 + y_i^2\dot{\varphi}^2 + y^{i2}\dot{v}'^2 - 2y_i\dot{u}\dot{\varphi}] dA_i dx \end{aligned} \quad (9)$$

missä on käytetty hyväksi paarteen massapainopisteen määritelmää ($\int_{A_i} y^i dA_i = 0$). Paarteiden yhteenlaskettu liike-energia dT_f on

$$\begin{aligned} dT_f &= \sum_{i=1}^n dT_i \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \rho_i \int_{A_i} [\dot{v}^2 + \dot{u}^2 + y_i^2 \dot{\phi}^2 + y_i^2 \dot{v}'^2 - 2y_i \dot{u} \dot{\phi}] dA_i dx \end{aligned} \quad (10)$$

missä n on paarteiden lukumäärä, tässä $n=2$ tai 3 .



Kuva 2. Ydinkerroksen j pisteen P_j siirtymä

Vastaavasti johdetaan ydinkerroksen j pisteen P_j siirtymän lauseke. Perusoletuksen mukaan paarteet ovat yhdenmuotoiset, jolloin tiedetään (kuva 2) ydinkerroksen painopisteen olevan paarteiden painopisteiden kautta kulkevalla suoralla, joka muodostaa kulman φ pystysuoran kanssa. Täten voidaan pisteen P_j siirtymä \vec{r}_{P_j} lausua palkin painopisteen G , ydinkerroksen painopisteen G_j ja ydinkerroksen pisteen P_j suhteellisen siirtymän avulla seuraavasti

$$\vec{r}_{P_j} = \vec{r}_G + \vec{r}_{G_j} + \vec{r}_{j,rel} \quad (11)$$

missä

$$\begin{aligned} \vec{r}_G &= u\vec{I} + v\vec{J} \\ \vec{r}_{G_j} &= -y_j\varphi\vec{I} + y_j\vec{J} \\ \vec{r}_{j,rel} &= y^j \sin \theta_j \vec{i} + y^j \cos \theta_j \vec{j} = y^j (\sin \theta_j - v' \cos \theta_j) \vec{I} + y^j (v' \sin \theta_j + \cos \theta_j) \vec{J} \\ &= y^j (\theta_j - v') \vec{I} + y^j (v' \theta_j + 1) \vec{J} = (y^j \theta_j - y^j v') \vec{I} + y^j \vec{J} \end{aligned} \quad (12)$$

missä oletettu siirtymien ja toisen kertaluokan termin olevan pieniä eli $\cos \theta_j = 1$, $\sin \theta_j = \theta_j$ ja $\theta_j v' = 0$. Derivoimalla lauseke (11) ajan suhteen saadaan pisteen P_j nopeus $\dot{\vec{r}}_{P_j}$

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}}_{P_j} &= \dot{\vec{r}}_G + \dot{\vec{r}}_{G_j} + \dot{\vec{r}}_{j,rel} \\ &= [\dot{u} - y_j \dot{\varphi} + y_j^2 \dot{\theta}_j - y_j^2 \dot{v}'] \vec{I} + \dot{v} \vec{J}\end{aligned}\quad (13)$$

jolloin on otettu huomioon, että $\dot{y}^j = 0$ ja $\dot{y}_j = 0$.

Vastaavasti ydinkerroksen j massapisteen P_j liike-energia dT_{P_j} on

$$\begin{aligned}dT_{P_j} &= \frac{1}{2} \dot{\vec{r}}_{P_j} \cdot \dot{\vec{r}}_{P_j} d\mu_{P_j} \\ &= \frac{1}{2} \left[(\dot{u} - y_j \dot{\varphi} + y_j^2 \dot{\theta}_j - y_j^2 \dot{v}')^2 + \dot{v}^2 \right] d\mu_{P_j} \\ &= \frac{1}{2} \rho_j [\dot{u}^2 + y_j^2 \dot{\varphi}^2 + y_j^2 \dot{\theta}_j^2 + y_j^2 \dot{v}'^2 + \dot{v}^2 - 2y_j \dot{u} \dot{\varphi} + 2y_j^2 \dot{u} \dot{\theta}_j \\ &\quad - 2y_j^2 \dot{u} \dot{v}' - 2y_j y_j^2 \dot{\varphi} \dot{\theta}_j + 2y_j y_j^2 \dot{\varphi} \dot{v}' - 2y_j^2 \dot{\theta}_j \dot{v}'] dA_j dx\end{aligned}\quad (14)$$

Integroidaan ydinkerroksen poikkipinnan yli, jolloin saadaan

$$\begin{aligned}dT_j &= \int_{A_j} dT_{P_j} \\ &= \frac{1}{2} \rho_j \int_{A_j} [\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + y_j^2 \dot{\varphi}^2 + y_j^2 \dot{\theta}_j^2 + y_j^2 \dot{v}'^2 - 2y_j \dot{u} \dot{\varphi} - 2y_j^2 \dot{\theta}_j \dot{v}'] dA_j dx\end{aligned}\quad (15)$$

missä on käytetty hyväksi ydinkerroksen massapainopisteen määritelmää eli $\int_{A_j} y^j dA_j = 0$. Kuvasta 2 saadaan selville myös yhteys kulmalle θ_j ja liukumalle γ , joka on $h_j \theta_j = a_j \gamma$. Sijoittamalla tämä yhteys yhtälöön (15) ja summaamalla liike-energiat dT_j ydinkerroksista $j = 1, 2, \dots, n-1$, missä n on paarteiden lukumäärä, saadaan yhtälö

$$\begin{aligned}dT_c &= \sum_{j=1}^{n-1} dT_j = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{2} \int_{A_j} \rho_j [\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + y_j^2 \dot{\varphi}^2 + y_j^2 \frac{a_j^2}{h_j^2} \dot{\gamma}^2 + y_j^2 \dot{v}'^2 \\ &\quad - 2y_j \dot{u} \dot{\varphi} - 2y_j^2 \frac{a_j}{h_j} \dot{\gamma} \dot{v}'] dA_j dx\end{aligned}\quad (16)$$

Kaksipaarteisella sandwich-palkilla $j = 1$, jonka perustella voidaan merkitä $a_1 = a$ ja $h_1 = h$. Kolme tai useampi paarteisena palkki oletetaan symmetriseksi poikkileikkauksensa suhteen, jolloin voidaan merkitä $h_j = h$ ja $a_j = a$. Summataaan lopuksi liike-energiat paarteista (dT_f) ja ydinkerroksista (dT_c) ja integroidaan koko palkin yli. Kerrospalkin liike-energian lauseke on

$$\begin{aligned}T &= \int_0^L dT_f + \int_0^L dT_c \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L \left(\mu \dot{u}^2 + \mu \dot{v}^2 + J_s \dot{\varphi}^2 + J_o \dot{v}'^2 + J_{co} \left(\frac{a}{h} \right)^2 \dot{\gamma}^2 - 2J_{co} \left(\frac{a}{h} \right) \dot{\gamma} \dot{v}' \right) dx\end{aligned}\quad (17)$$

missä

μ = Palkin massa pituusyksikköä kohti

$$= \sum_{i=1}^n \int_{A_i} \rho_i dA_i + \sum_{j=1}^{n-1} \int_{A_j} \rho_j dA_j$$

J_s = Kerrosten etäisyyksistä tuleva Steinerin termi

$$= J_{fs} + J_{cs} = \sum_{i=1}^n \int_{A_i} \rho_i y_i^2 dA_i + \sum_{j=1}^{n-1} \int_{A_j} \rho_j y_j^2 dA_j \quad (18)$$

J_o = Kerrosten yhteenlasketut rotaatiohitaudet

$$= J_{fo} + J_{co} = \sum_{i=1}^n \int_{A_i} \rho_i y_i^2 dA_i + \sum_{j=1}^{n-1} \int_{A_j} \rho_j y_j^2 dA_j$$

Yhtälössä 17 on käytetty hyväksi palkin massapainopisteen määritelmää

$$\sum_{i=1}^n \int_{A_i} \rho_i y_i dA_i + \sum_{j=1}^{n-1} \int_{A_j} \rho_j y_j dA_j = 0.$$

KERROSPALKIN DIFFERENTIAALIYHTÄLÖ

Kerroschalkille voidaan kirjoittaa Lagrangen formalismilla seuraava yhtälö

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum \delta q_j \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial q_j} \right] dt = 0 \quad (19)$$

missä q_j on yleistetty siirtymä.

Suorittamalla osittaisdifferentointi saadaan Eulerin yhtälöiksi käyttäen yhtälöitä

(1) ja (17) sekä lisäksi yhteyksiä $v' = \varphi + \gamma$

$$\mu \ddot{u} - EAu'' = 0 \quad (20)$$

$$\mu \ddot{v} - J\ddot{v}'' + EIv^{(4)} + J_s \ddot{\gamma}' + J_{co} \left(\frac{a}{h} \right) \ddot{\gamma}' - EI_s \gamma''' = 0 \quad (21)$$

$$-J_s \ddot{v}' - J_{co} \left(\frac{a}{h} \right) \ddot{v}' + EI_s v''' + J_s \ddot{\gamma} - EI_s \gamma'' + J_{co} \left(\frac{a}{h} \right)^2 \ddot{\gamma} + k\gamma = 0 \quad (22)$$

$$EAu' = 0 \vee u = 0 \quad (23)$$

$$J\ddot{v}' - EIv''' - J_s \ddot{\gamma} - J_{co} \left(\frac{a}{h} \right) \ddot{\gamma} + EI_s \gamma'' = 0 \vee v = 0 \quad (24)$$

$$EIv'' - EI_s \gamma' = 0 \vee v' = 0 \quad (25)$$

$$-EI_s v'' + EI_s \gamma' = 0 \vee \gamma = 0 \quad (26)$$

Yllä olevista yhtälöistä huomataan, että pitkittäis- ja poikittaisvärähtely voidaan ratkaista erikseen. Tarkastellaan aluksi poikittaisvärähtelyn differentiaaliyhtälöä ja sen ratkaisua.

Oletetaan, että kerrosrunko on harmonisessa liikkeessä, jolloin taipuma v ja liukuma γ voidaan esittää muodossa $v(x, t) = v(x)Y(t)$ ja $\gamma(x, t) = \gamma(x)Y(t)$, missä $v(x)$ ja $\gamma(x)$ ovat taipuman ja liukuman muotofunktioita. Sijoitetaan lauseke $Y = e^{i\omega t}$ yhtälöihin (21) ja (22), jolloin saadaan yhtälöt

$$-\mu\omega^2 v + J\omega^2 v'' + EIv^{(4)} - J_s\omega^2 \gamma' - J_{co}\left(\frac{a}{h}\right)\omega^2 \gamma' - EI_s\gamma''' = 0 \quad (27)$$

$$J_s\omega^2 v' + J_{co}\left(\frac{a}{h}\right)\omega^2 v' + EI_s v''' - J_{co}\left(\frac{a}{h}\right)^2\omega^2 \gamma - J_s\omega^2 \gamma - EI_s\gamma'' + k\gamma = 0 \quad (28)$$

Derivoidaan jälkimmäinen yhtälö kerran paikan suhteen ja ratkaistaan yhtälöistä (27) ja (28) liukuman derivaatan γ' lauseke, joksi saadaan

$$\gamma' = -\frac{\mu\omega^2}{\alpha}v + \frac{(J_o - J_{co}\frac{a}{h})\omega^2}{\alpha}v'' + \frac{EI_o}{\alpha}v^{(4)} \quad (29)$$

missä $\alpha = k - J_{co}\left(\frac{a}{h}\right)\left(\frac{a-h}{h}\right)\omega^2$, $\alpha \neq 0$. Lasketaan lisäksi liukuman kolmas derivaatta (γ''') ja sijoitetaan derivaattojen (γ' , γ''') lausekkeet yhtälöön (27). Differentiaaliyhtälöksi taipumalle v saadaan

$$\begin{aligned} &(-\mu\omega^2 + \frac{J_s\omega^4\mu}{\alpha} + \frac{J_{co}\mu\frac{a}{h}\omega^4}{\alpha})v \\ &+ (J\omega^2 - \frac{(J_s + J_{co}\frac{a}{h})(J_o - J_{co}\frac{a}{h})\omega^4}{\alpha} + \frac{EI_s\mu\omega^2}{\alpha})v'' \\ &+ (EI - \frac{EI_o(J_s + J_{co}\frac{a}{h})\omega^2}{\alpha} - \frac{EI_s(J_o - J_{co}\frac{a}{h})\omega^2}{\alpha})v^{(4)} \\ &- (\frac{EI_s EI_o}{\alpha})v^{(6)} = 0 \end{aligned} \quad (30)$$

Näin saadaan vakiokertoiminen kuudennen kertaluvun yhtälö. Tämän yhtälön erikoistapaus $J = J_s = J_o = J_{co} = 0$ on esitetty aiemmin kirjallisuudessa (DiTaranto, 1965).

Jaetaan yhtälö (30) korkeimman termin kertoimella, jolloin saadaan

$$v^{(6)} + \alpha_1 v^{(4)} + \alpha_2 v'' + \alpha_3 v = 0 \quad (31)$$

missä

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -\frac{EI\alpha}{EI_s EI_o} + \frac{EI_o(J_s + J_{co}\frac{a}{h})\omega^2}{EI_s EI_o} + \frac{EI_s(J_o - J_{co}\frac{a}{h})\omega^2}{EI_s EI_o} \\ \alpha_2 &= -\frac{J\omega^2\alpha}{EI_s EI_o} + \frac{(J_s + J_{co}\frac{a}{h})(J_o - J_{co}\frac{a}{h})\omega^4}{EI_s EI_o} - \frac{EI_s\mu\omega^2}{EI_s EI_o} \\ \alpha_3 &= \frac{\mu\omega^2\alpha}{EI_s EI_o} - \frac{(J_s + J_{co}\frac{a}{h})\mu\omega^4}{EI_s EI_o} \end{aligned} \quad (32)$$

Yhtälön (31) muokkaamiseen käytetään sijoitusta $v = e^{r^2}$, missä $r^2 = \lambda$, ja saadaan

$$\lambda^3 + \alpha_1\lambda^2 + \alpha_2\lambda + \alpha_3 = 0 \quad (33)$$

Yhtälön (33) ratkaisemiseksi tehdään sijoitus $z = \lambda + \frac{\alpha_1}{3}$, jolloin tämä muuttuu muotoon

$$z^3 + 3pz + 2q = 0 \quad (34)$$

missä

$$\begin{aligned} p &= \frac{\alpha_2}{3} - \frac{\alpha_1^2}{9} \\ q &= \frac{\alpha_1^3}{27} - \frac{\alpha_1\alpha_2}{6} + \frac{\alpha_3}{2} \end{aligned} \quad (35)$$

Yhtälön (34) ratkaisu riippuu diskriminantin $D = p^3 + q^2$ etumerkistä. Diskriminantin lausekkeeksi saadaan

$$D = p^3 + q^2 = \frac{\alpha_2^2}{27} \left(\alpha_2 - \frac{\alpha_1^2}{4} \right) + \alpha_3 \left(\frac{\alpha_3}{4} + \frac{\alpha_1^3}{27} - \frac{\alpha_1\alpha_2}{6} \right) \quad (36)$$

Kun diskriminantti on positiivinen, löydetään yhtälölle (34) yksi reaalijuuri (z_1) ja kaksi imaginääristä juurta (z_2, z_3)

$$\begin{aligned} z_1 &= u_0 + v_0 \\ z_2 &= -\frac{1}{2}(u_0 + v_0) + \frac{\sqrt{3}}{2}(u_0 - v_0)i \\ z_3 &= -\frac{1}{2}(u_0 + v_0) - \frac{\sqrt{3}}{2}(u_0 - v_0)i \end{aligned} \quad (37)$$

missä

$$\begin{aligned} u_0 &= \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}} \\ v_0 &= -\frac{p}{\sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}}} \end{aligned} \quad (38)$$

Diskriminantin ollessa negatiivinen, saadaan kolme reaalijuurta

$$\begin{aligned} z_1 &= 2\sqrt{-p} \cos \frac{\varphi}{3} \\ z_2 &= -2\sqrt{-p} \cos \frac{\pi - \varphi}{3} \\ z_3 &= -2\sqrt{-p} \cos \frac{\pi + \varphi}{3} \end{aligned} \quad (39)$$

missä

$$\varphi = \arccos -\frac{p}{\sqrt{-p^3}} \quad (40)$$

Diskriminantin ollessa nolla, saadaan kolme juurta, joista joko kaksi tai kolme ovat yhtä suuria. Juuret ovat

$$\begin{aligned} z_1 &= 2q/p, \quad z_{2,3} = -q/p, \quad \text{kun } q \neq 0 \\ z_{1,2,3} &= 0, \quad \text{kun } q = 0 \end{aligned} \quad (41)$$

Yhtälön (33) juuret saadaan edelleen yhtälöstä

$$r_{1,2,3,4,5,6} = \pm \sqrt{\lambda_{1,2,3}} \quad (42)$$

missä

$$\lambda_{1,2,3} = z_{1,2,3} - \frac{\alpha_1}{3} \quad (43)$$

Homogeenisen yhtälön ratkaisu on

$$v = \sum_{i=1}^6 \bar{C}_i e^{r_i x} \quad (44)$$

missä vakiot \bar{C}_i saadaan reunaehdoista.

Pitkittäisvärähtely voidaan ratkaista yhtälöstä (20)

$$\mu \ddot{u} - EAu'' = 0 \quad (45)$$

Oletetaan rakenteen olevan harmonisessa värähdysliikkeessä, jolloin $\ddot{u}(x, t) = -\omega^2 u(x)$, ja otetaan käyttöön yrite $u(x) = e^{rx}$. Sijoitetaan nämä yhtälöön (45), jolloin saadaan

$$\begin{aligned} -\mu\omega^2 u - EAu'' &= 0 \\ \Rightarrow (-\mu\omega^2 - EA r^2) e^{rx} &= 0 \\ \Rightarrow r^2 &= -\frac{\mu\omega^2}{EA} \\ \Rightarrow r_{1,2} &= \pm i \sqrt{\frac{\mu\omega^2}{EA}} \\ \Rightarrow u &= C_1 \cos \sqrt{\frac{\mu\omega^2}{EA}} x + C_2 \sin \sqrt{\frac{\mu\omega^2}{EA}} x \end{aligned} \quad (46)$$

Yhtälöistä (23), (24), (25) ja (26) saadaan lausekkeet normaalivoimalle N , leikkausvoimalle Q , kokonaismomentille $M = M_s + M_o$ ja paarteiden normaalivoimien aiheuttamalle momentille M_s , jotka täyttävät reunaehtoyhtälön

$$\int_0^L (Nu + Qv - Mv' + M_s \gamma) = 0 \quad (47)$$

Tässä on oletettu, että keskitettyjä massoja tai rotaatiohitauksia ei ole palkin päissä. Reunaehto-antaminen kokonaisuuden kannalta on helpompaa, jos reunaehtoyhtälö (47) muokataan muotoon (Stamm & al., 1974, Heinisuo, 1986)

$$\int_0^L (Nu + Qv - M\varphi - M_o \gamma) = 0, \quad (48)$$

missä kokonaiskiertymä φ on määritelty $\varphi = v' - \gamma$. Normaalivoiman N , leikkausvoiman Q , kokonaismomentin M ja paarteiden yhteenlasketun momentin M_o lausekkeet ovat

$$N = EAu' \quad (49)$$

$$Q = -EIv''' + EI_s\gamma'' + Jv' - \left(J_s + J_{co} \left(\frac{a}{h} \right) \right) \ddot{\gamma} \quad (50)$$

$$M = -EIv'' + EI_s\gamma' \quad (51)$$

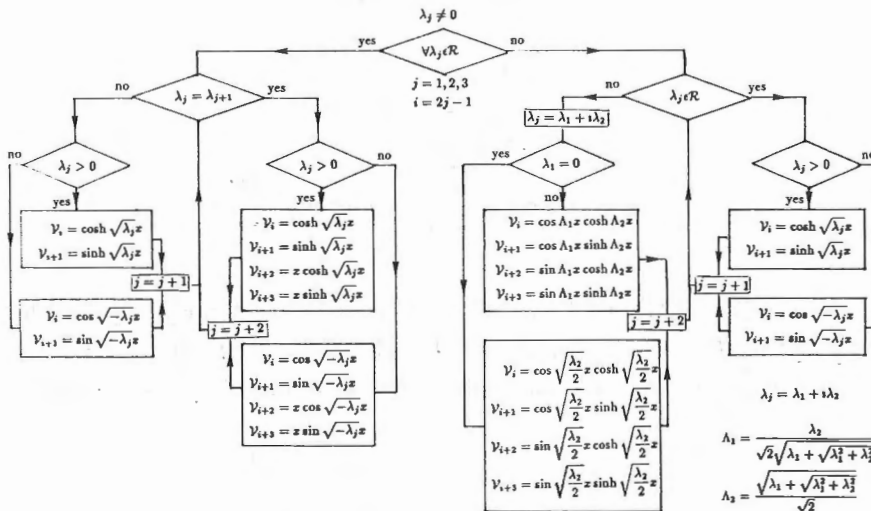
$$M_o = -EI_o v'' \quad (52)$$

KERROSPALKIN OMINAISTAAJUUDET JA -MUODOT

Taipuman lauseke voidaan edellisen luvun perusteella kirjoittaa muotoon

$$v = \sum_{i=1}^6 \bar{C}_i \mathcal{V}_i \quad (53)$$

missä vakiot \bar{C}_i saadaan reunaehdoista ja muotofunktiot \mathcal{V}_i , kun λ_j :t eivät ole nollia, tarkastelemalla lohkokaaaviota kuvassa 3.



Kuva 3. Lohkokaavio \mathcal{V}_i :n ratkaisuiista

Kun $\lambda_j = 0$, saadaan muotofunktioiksi $\mathcal{V}_i = x$ ja $\mathcal{V}_{i+1} = x^2$. Mikäli myös seuraava $\lambda_{j+1} = 0$, saadaan muotofunktiot $\mathcal{V}_{i+2} = x^3$ ja $\mathcal{V}_{i+3} = x^4$. Jos $\lambda_1 =$

$\lambda_2 = \lambda_3$, muotofunktioiksi saadaan

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \cosh \sqrt{-\frac{\alpha_1}{3}}x, & \nu_2 &= \sinh \sqrt{-\frac{\alpha_1}{3}}x \\ \nu_3 &= x \cosh \sqrt{-\frac{\alpha_1}{3}}x, & \nu_4 &= x \sinh \sqrt{-\frac{\alpha_1}{3}}x \\ \nu_5 &= x^2 \cosh \sqrt{-\frac{\alpha_1}{3}}x, & \nu_6 &= x^2 \sinh \sqrt{-\frac{\alpha_1}{3}}x \end{aligned}$$

Derivoimalla γ' :n lauseketta (29) kerran ja sijoittamalla se yhtälöön (28) saadaan liukumalle γ lauseke

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{EI_s EI_o}{\alpha\beta} v^{(5)} + \left(\frac{EI_s (J_o - J_{co} \frac{a}{h}) \omega^2}{\alpha\beta} - \frac{EI_s}{\beta} \right) v''' \\ &- \left(\frac{EI_s \mu \omega^2}{\alpha\beta} + \frac{(J_s + J_{co} \frac{a}{h}) \omega^2}{\beta} \right) v' = \sum_{i=1}^6 \bar{C}_i G_i \end{aligned} \quad (54)$$

missä

$$\begin{aligned} G_i &= \frac{EI_s EI_o}{\alpha\beta} \nu_i^{(5)} + \left(\frac{EI_s (J_o - J_{co} \frac{a}{h}) \omega^2}{\alpha\beta} - \frac{EI_s}{\beta} \right) \nu_i''' \\ &- \left(\frac{EI_s \mu \omega^2}{\alpha\beta} + \frac{(J_s + J_{co} \frac{a}{h}) \omega^2}{\beta} \right) \nu_i' \\ \alpha &= k - J_{co} \left(\frac{a}{h} \right) \left(\frac{a-h}{h} \right) \omega^2, \quad \beta = k - \left(J_{co} \left(\frac{a}{h} \right)^2 + J_s \right) \omega^2 \end{aligned} \quad (55)$$

Kokonaiskiertymälle φ saadaan lauseke

$$\begin{aligned} \varphi &= v' - \gamma = \sum_{i=1}^6 \bar{C}_i (\nu_i' - G_i) \\ &= \sum_{i=1}^6 \bar{C}_i \mathcal{F}_i \end{aligned} \quad (56)$$

missä

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_i &= -\frac{EI_s EI_o}{\alpha\beta} \nu_i^{(5)} - \left(\frac{EI_s (J_o - J_{co} \frac{a}{h}) \omega^2}{\alpha\beta} - \frac{EI_s}{\beta} \right) \nu_i''' \\ &+ \left(1 + \frac{EI_s \mu \omega^2}{\alpha\beta} + \frac{(J_s + J_{co} \frac{a}{h}) \omega^2}{\beta} \right) \nu_i' \end{aligned} \quad (57)$$

Kokonaismomentti M saadaan yhtälöistä (29) ja (53)

$$\begin{aligned} M &= -EI v'' + EI_s \gamma' \\ &= \frac{EI_s EI_o}{\alpha} v^{(4)} + \left(\frac{EI_s (J_o - J_{co} \frac{a}{h}) \omega^2}{\alpha} - EI \right) v'' - \frac{EI_s \mu \omega^2}{\alpha} v \\ &= \sum_{i=1}^6 \bar{C}_i M_i \end{aligned} \quad (58)$$

missä

$$M_i = \frac{EI_s EI_o}{\alpha} \mathcal{V}_i^{(4)} + \left(\frac{EI_s (J_o - J_{co} \frac{a}{h}) \omega^2}{\alpha} - EI \right) \mathcal{V}_i'' - \frac{EI_s \mu \omega^2}{\alpha} \mathcal{V}_i \quad (59)$$

Leikkausvoima Q lasketaan yhtälöstä (50)

$$\begin{aligned} Q &= -EIv''' + EI_s \gamma'' + J\ddot{v} - (J_s + J_{co} \frac{a}{h}) \ddot{\gamma} \\ &= M' - J\omega^2 v' + (J_s + J_{co} \frac{a}{h}) \omega^2 \gamma = \sum_{i=1}^6 \bar{C}_i (M_i' - J\omega^2 \mathcal{V}_i' + (J_s + J_{co} \frac{a}{h}) \omega^2 \mathcal{G}_i) \\ &= \sum_{i=1}^6 \bar{C}_i Q_i \end{aligned} \quad (60)$$

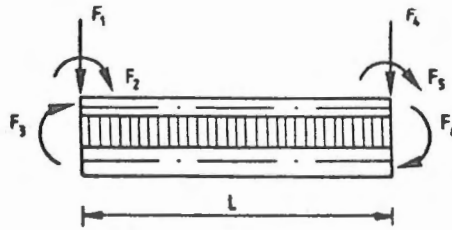
missä

$$\begin{aligned} Q_i &= \frac{EI_s EI_o}{\beta} \mathcal{V}_i^{(5)} + \left[\frac{EI_s (J_o - J_{co} \frac{a}{h}) \omega^2}{\beta} - EI - \frac{EI_s}{\beta} (J_s + J_{co} \frac{a}{h}) \omega^2 \right] \mathcal{V}_i''' \\ &\quad - \left(\frac{EI_s \mu \omega^2}{\beta} + J\omega^2 + \frac{(J_s + J_{co} \frac{a}{h})^2 \omega^4}{\beta} \right) \mathcal{V}_i' \end{aligned} \quad (61)$$

ja viimeisenä paarteiden yhteenlaskettu momentti M_o on

$$M_o = -EI_o v'' = \sum_{i=1}^6 \bar{C}_i (-EI_o \mathcal{V}_i'') = \sum_{i=1}^6 \bar{C}_i M_{oi} \quad (62)$$

Siirtymävektori $\{D\}$ ja voimavektori $\{F\}$ voidaan nyt muodostaa, kun otetaan lisäksi huomioon käytetyt voimien positiiviset suunnat (kuva 4).



Kuva 4. Voimien positiiviset suunnat elementin päissä

Vektorit ovat muotoa

$$\{D\} = \begin{pmatrix} v(0) \\ \varphi(0) \\ \gamma(0) \\ v(L) \\ \varphi(L) \\ \gamma(L) \end{pmatrix} \quad (63)$$

$$\{F\} = \begin{pmatrix} -Q(0) \\ M(0) \\ M_o(0) \\ Q(L) \\ -M(L) \\ -M_o(L) \end{pmatrix} \quad (64)$$

Koska tunnetaan yhteydet

$$\begin{aligned} \{D\} &= [\bar{K}]\{\bar{C}\} \\ \{F\} &= [\bar{K}]\{\bar{C}\} \end{aligned} \quad (65)$$

missä

$$[\bar{K}] = \begin{bmatrix} \mathcal{V}_1(0) & \mathcal{V}_2(0) & \dots & \mathcal{V}_6(0) \\ \mathcal{F}_1(0) & \mathcal{F}_2(0) & \dots & \mathcal{F}_6(0) \\ \mathcal{G}_1(0) & \mathcal{G}_2(0) & \dots & \mathcal{G}_6(0) \\ \mathcal{V}_1(L) & \mathcal{V}_2(L) & \dots & \mathcal{V}_6(L) \\ \mathcal{F}_1(L) & \mathcal{F}_2(L) & \dots & \mathcal{F}_6(L) \\ \mathcal{G}_1(L) & \mathcal{G}_2(L) & \dots & \mathcal{G}_6(L) \end{bmatrix} \quad (66)$$

$$[\bar{K}] = \begin{bmatrix} -Q_1(0) & -Q_2(0) & \dots & -Q_6(0) \\ \mathcal{M}_1(0) & \mathcal{M}_2(0) & \dots & \mathcal{M}_6(0) \\ \mathcal{M}_{o1}(0) & \mathcal{M}_{o2}(0) & \dots & \mathcal{M}_{o6}(0) \\ Q_1(L) & Q_2(L) & \dots & Q_6(L) \\ -\mathcal{M}_1(L) & -\mathcal{M}_2(L) & \dots & -\mathcal{M}_6(L) \\ -\mathcal{M}_{o1}(L) & -\mathcal{M}_{o1}(L) & \dots & -\mathcal{M}_{o6}(L) \end{bmatrix} \quad (67)$$

voidaan muodostaa yhtälö $\{F\}$:n ja $\{D\}$:n välille

$$\{F\} = [K]\{D\} \quad (68)$$

missä jäykkymatriisi on

$$[K] = [\bar{K}][\bar{K}]^{-1} \quad (69)$$

Ominaisarvojen etsiminen lähtee liikkeelle jäykkymatriisiin $[K]$ determinan-
tista, jonka nollakohtia etsitään. Näiden kohtien etsintään käytetään Sturmin
jonosääntöön perustuvaa menetelmää (Williams & al., 1970), jota on muokattu
tähän tehtävään sopivaksi (Howson & al., 1973). Tällä menetelmällä voidaan
määrittää tietyn kulmataajuuden alapuolella olevien ominaiskulmataajuuksien
lukumäärä ilman, että yhtäkään ominaistajuutta jäisi pois välistä. Tällä
menetelmällä voidaan etsiä mikä tahansa ominaiskulmataajuus ilman, että
tarvitsisi tuntea kaikki alimmat ominaiskulmataajuudet. Menetelmä perustuu
Rayleigh'n lauseen hyväksikäyttöön.

Ominaistaajuuden haku johtaa iteraatioprosessiin, jolloin jokaisella lasken-
takierroksella muodostetaan uusi jäykkymatriisi. Konvergointia on nopeutettu

Sturmin jonosäännön avulla. Oinaismuodot saadaan tekemällä origon siirto ominaisarvon viereen ja ratkaisemalla yhtälö

$$[K(\omega)]\{D\} = \{F\} \quad (70)$$

jossa $\{F\}$ on sopiva voimavektori (Howson, 1979). Ratkaisun tuloksena saatu vektori normeerataan itseisarvoltaan suurimman alkionsa suhteen. Voimavektori $\{F\}$ valitaan esimerkiksi siten, että sen alkiot ovat välillä $[-1, +1]$.

Siirtymän u lauseke voidaan yhtälön (46) perusteella kirjoittaa

$$u = \sum_{i=1}^2 C_i \mathcal{U}_i \quad (71)$$

missä vakiot C_i saadaan reunaehdoista ja $\mathcal{U}_1 = \cos \sqrt{\frac{\mu\omega^2}{EA}}x$ ja $\mathcal{U}_2 = \sin \sqrt{\frac{\mu\omega^2}{EA}}x$. Normaalivoiman N lauseke on

$$N = EAu' = \sum_{i=1}^2 EA\mathcal{U}_i' = \sum_{i=1}^2 C_i \mathcal{N}_i \quad (72)$$

Kuten edellä voidaan nytkin muodostaa yhtälö

$$\{F\} = [K]\{D\} \quad (73)$$

missä jäykkyysmatriisi on

$$[K] = [\overline{K}][\overline{K}]^{-1}$$

$$[\overline{K}] = \begin{bmatrix} \mathcal{U}_1(0) & \mathcal{U}_2(0) \\ \mathcal{U}_1(L) & \mathcal{U}_2(L) \end{bmatrix} \quad (74)$$

$$[\overline{K}] = \begin{bmatrix} -\mathcal{N}_1(0) & -\mathcal{N}_2(0) \\ \mathcal{N}_1(L) & \mathcal{N}_2(L) \end{bmatrix}$$

$$\{D\} = \begin{pmatrix} u(0) \\ u(L) \end{pmatrix} \quad (75)$$

$$\{F\} = \begin{pmatrix} -N(0) \\ N(L) \end{pmatrix}$$

suorittamalla matriisien $[\overline{K}]$ ja $[\overline{K}]^{-1}$ kertolasku saadaan edelleen

$$[K] = \frac{\sqrt{EA\mu\omega^2}}{\sin \sqrt{\frac{\mu\omega^2}{EA}}L} \begin{bmatrix} \cos \sqrt{\frac{\mu\omega^2}{EA}}L & -1 \\ -1 & \cos \sqrt{\frac{\mu\omega^2}{EA}}L \end{bmatrix} \quad (76)$$

ESIMERKKEJÄ

Ensimmäisessä laskuesimerkissä tutkitaan kaksipaarteisen vapaasti tuetun sandwich-palkin ominaiskulmataajuuksia, joille voidaan löytää analyttinen lauseke. Taipuman lauseke $v = \sin \frac{n\pi z}{L}$ toteuttaa reunaehdot ja differentiaaliyhtälöstä (31) saadaan

$$-\frac{n^6 \pi^6}{L^6} + \frac{n^4 \pi^4}{L^4} \alpha_1 - \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \quad (77)$$

missä α_1 , α_2 ja α_3 saadaan yhtälöistä (32). Ratkaistaan yhtälöstä (77) ω :n lauseke, joksi saadaan

$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{\frac{B}{2A} \pm \sqrt{\left(\frac{B}{2A}\right)^2 + C}} \\ A &= \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \left(\frac{J J_{co} \frac{a}{h} \frac{a-h}{h} + (J_s + J_{co} \frac{a}{h})(J_o - J_{co} \frac{a}{h})}{EI_s EI_o} \right) + \frac{\mu (J_s + J_{co} \frac{a}{h})^2}{EI_s EI_o} \\ B &= \frac{n^4 \pi^4}{L^4} \left(\frac{EI J_{co} \frac{a}{h} \frac{a-h}{h} + EI_o (J_s + J_{co} \frac{a}{h}) + EI_s (J_o - J_{co} \frac{a}{h})}{EI_s EI_o} \right) \\ &\quad + \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \frac{EI_s \mu + Jk}{EI_s EI_o} + \frac{\mu k}{EI_s EI_o} \\ C &= \frac{n^6 \pi^6}{L^6} + \frac{n^4 \pi^4}{L^4} \frac{EI k}{EI_s EI_o} \end{aligned} \quad (78)$$

Nyt voidaan tutkia rotaatiohitauden vaikutusta ominaistajuuksiin vertaamalla saatua ominaiskulmataajuuden lauseketta ominaiskulmataajuuteen $\bar{\omega}$, jossa rotaatiohitautta ei ole otettu huomioon. Tämä voidaan laskea kaavasta (77) asettamalla $J = J_s = J_o = J_{co} = 0$.

Rotaatiohitauden vaikutusta tarkasteltiin laskemalla virhetermi $(\bar{\omega} - \omega)/\omega$ muuttaen palkin geometria- ja materiaaliparametreja. Palkin jäykkyyden muutoksen vaikutusta tarkasteltiin muuttamalla ydinkerroksen liukumodulin G ja paarteiden kimmokertoimen E suhdetta. Palkin massajakautuman muuttumisen vaikutusta tutkittiin muuttamalla ydinkerroksen ja paarteiden tiheyksien $(\bar{\rho}/\rho)$ suhdetta. Palkin poikkileikkauksen muuttumisen vaikutusta tutkittiin muuttamalla paarteiden ja ydinkerroksen korkeuden (t/h) suhdetta. Näitä muutoksia tutkittiin myös eri palkin korkeuden H ja pituuden L suhteilla. Palkin leveyttä pidettiin vakiona (paarteet ja ydin olivat yhtä leveät).

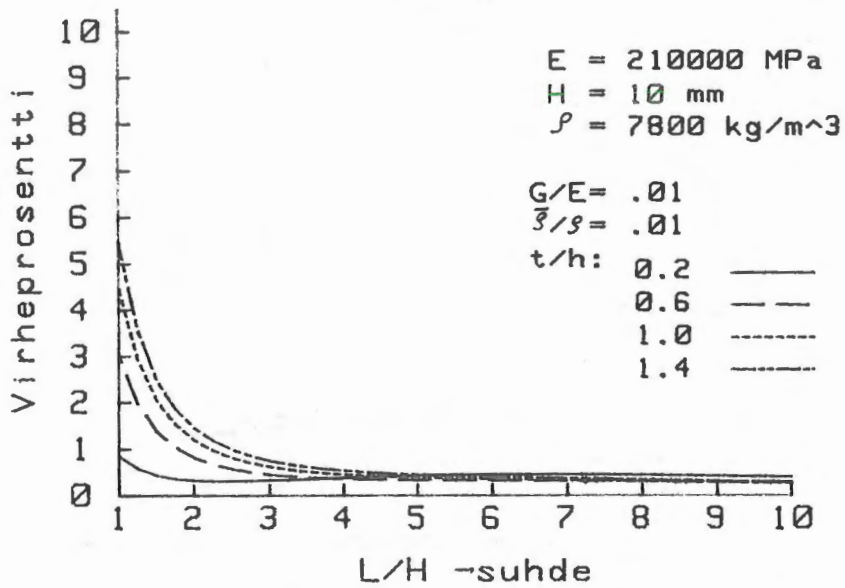
On selvää, että jos kasvatetaan paarteiden ja ydinkerroksen korkeuksien suhdetta tai paarteiden ja ydinkerroksen tiheyksien suhdetta tai palkin korkeuden ja pituuden suhdetta tai paarteiden kimmokertoimen ja ydinkerroksen liukumodulin suhdetta, rotaatiohitauden vaikutus kasvaa. Edellä olevien suhteiden

vaikutusta rotaatiohitauteen kaikkien suhteiden muuttuessa yhtäaikaisesti on vaikeampi päätellä suoraan. Analyyttisten lausekkeiden pohjalta on tehty laskentaohjelma, joka vertaa ensimmäiseen ominaiskulmataajuuteen muodostuvaa virhettä, kun palkin rotaatiohitausta ei ole otettu huomioon (Malmi, 1987). Virhetarkastelu on suoritettu palkin pituuden L ja korkeuden H suhteen funktiona korkeuden pysyessä vakiona. Laskennassa muutettiin paarteiden ja ydinkerroksen korkeuksien t/h suhdetta, paarteiden kimmokertoimen E ja ydinkerroksen liukumodulin G suhdetta ja paarteiden tiheyden ρ ja ydinkerroksen tiheyden $\bar{\rho}$ suhdetta. Rotaatiohitauden vaikutusta kulmataajuuteen on selvitetty kuvissa 5 - 8.

Kuvassa 5 nähdään tyypillinen virhekuvaaja, kun $G/E \leq 0.01$. Virhe on pieni ja se ei muutu palkin pituuden L tai paarre/ydin -suhteen (t/h) muuttuessa. Myöskään paarteen ja ydinkerroksen tiheyksien suhteen ($\bar{\rho}/\rho$) muutos ei kasvata virhettä tässä tapauksessa kovinkaan paljoa. Vasta kun palkin pituus/korkeus -suhde (L/H - suhde) on pienempi kuin kolme, virhe kasvaa voimakkaasti paarteen ja ydinkerroksen korkeuksien suhteen muuttuessa. Havaittavissa on kuitenkin, että virhe voi kasvaa hetken aikaa L/H -suhteen kasvaessa. Tämä tulee näkyviin selvemmin jäykkyysuhteen G/E suuremmilla arvoilla.

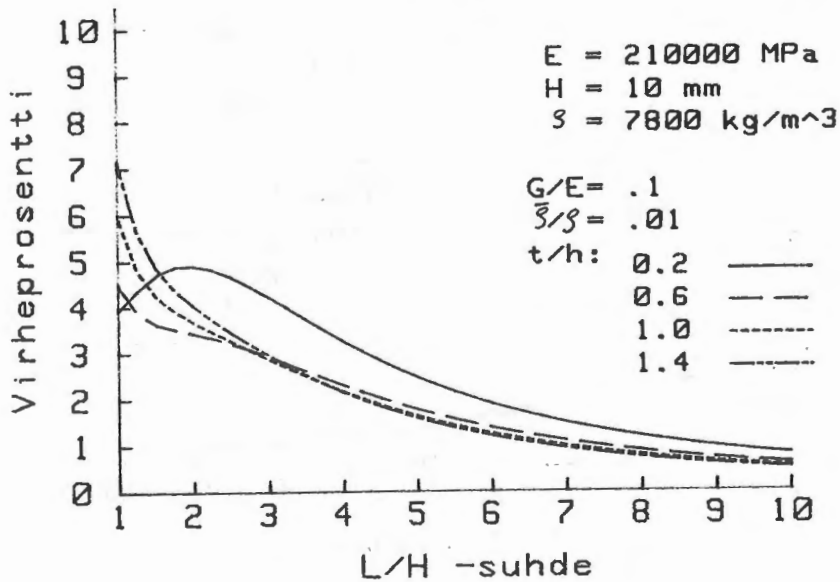
Kuvista 6, 7 ja 8 huomataan, miten tiheyksien suhteen $\bar{\rho}/\rho$ muutos ja korkeuksien suhteen t/h muutos vaikuttaa suurilla jäykkyysuhteen arvoilla. Tarkastelut on tehty jäykkyysuhteen arvolla $G/E = 0.1$. Ensimmäisenä kiinnittää huomiota käyrän $t/h = 0.2$ erilaisuus verrattuna muihin t/h -suhteen käyriin. Käyrän maksimi ei olekaan kohdassa $L/H = 1$, vaan virheprosentti kasvaa L/H -suhteen kasvaessa. Samanlainen vaikutus näkyy heikosti vielä suhteella $t/h = 0.6$ kuvassa 6. Palkin pituuden kasvattaminen voi lyhyellä ohutpaarteisella sandwich-palkilla muuttaa rotaatiohitaustermin merkitsevän suureksi. Toiseksi voidaan tarkastella tiheyksien suhteen $\bar{\rho}/\rho$ muuttumisen vaikutusta. Kuvista 6 - 8 voidaan päätellä, että t/h -suhteen kasvaessa tiheyksien suhteen $\bar{\rho}/\rho$ muuttumisen vaikutus virheprosenttiin pienenee. Ydinkerroksen tiheyden pienentäminen ohutpaarteisella sandwich-palkilla voi vaatia rotaatiohitaustermin huomioon ottamisen. Paksupaarteisella palkilla ydinkerroksen tiheyden pienentäminen tai suurentaminen ei paljoakaan muuta rotaatiohitauden vaikutusta ominaiskulmataajuuteen.

Virhetarkastelu Omega 1



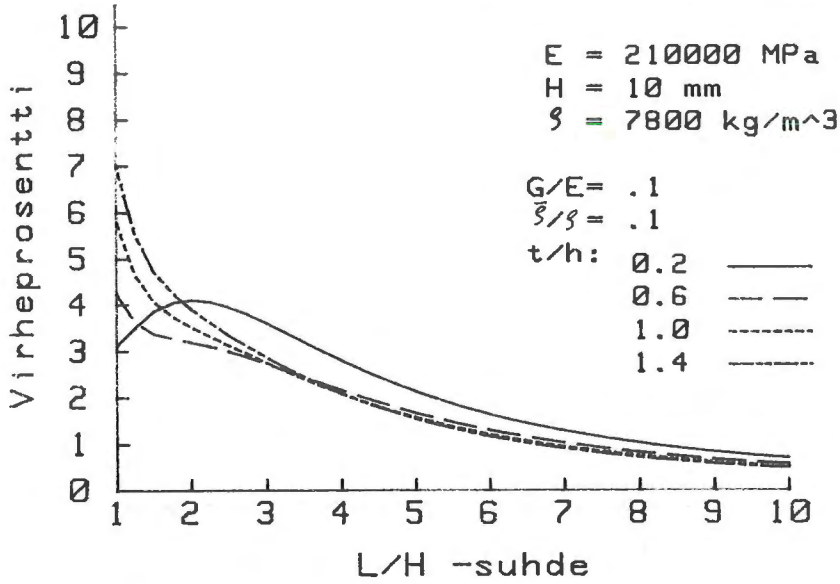
Kuva 5. Ensimmäisen ominaiskulmataajuuden virhe L/H- suhteen funktiona

Virhetarkastelu Omega 1



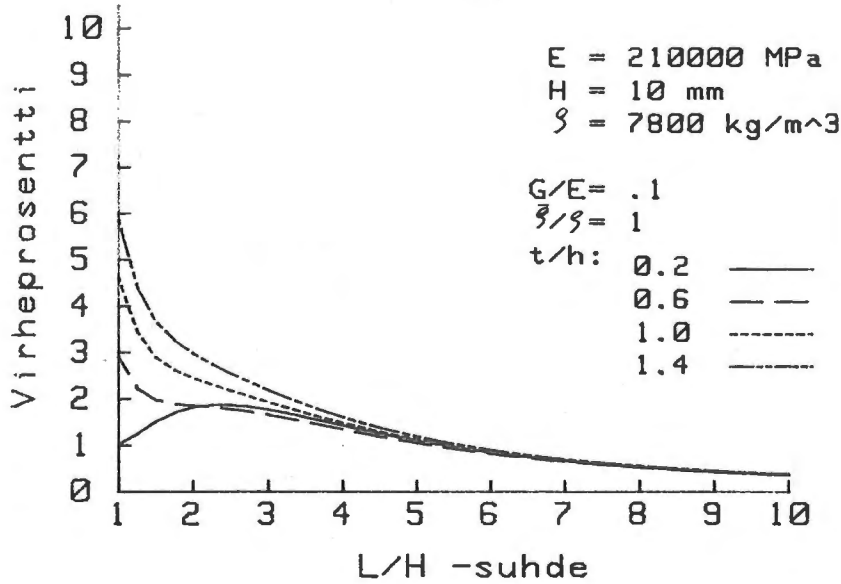
Kuva 6. Virhekuvaajat suhteella $\bar{p}/\rho = 0.01$

Virhetarkastelu Omega 1



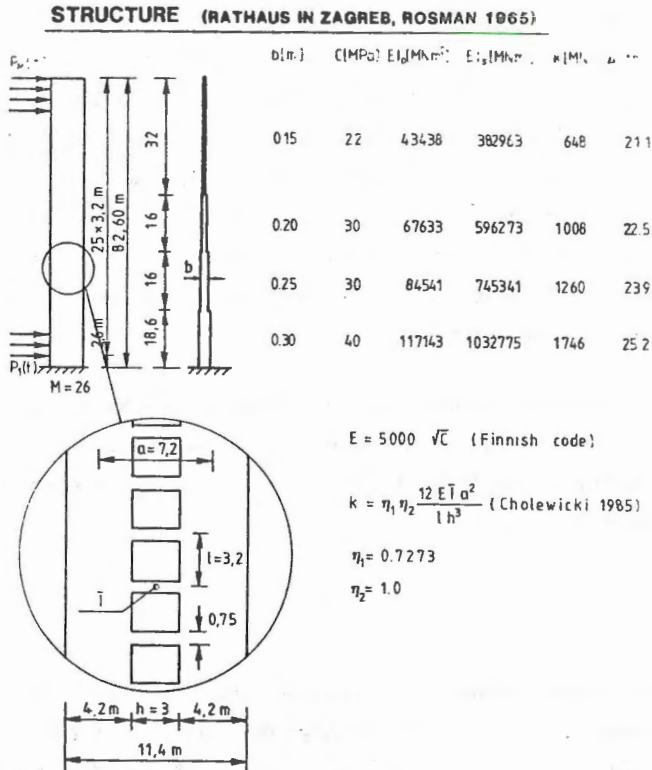
Kuva 7. Virhekuvaajat suhteella $\bar{\rho}/\rho = 0.1$

Virhetarkastelu Omega 1



Kuva 8. Virhekuvaajat suhteella $\bar{\rho}/\rho = 1$

Toisena laskentaesimerkinä on Rosmanin (Rosman, 1965) esittämä kerrostalo, jonka viisi ensimmäistä ominaistajuutta on laskettu taulukkoon 1 ottaen huomioon rakenteen rotaatiohitaus. Tuloksia on verrattu ominaistajuuksiin, joissa ei ole huomioitu rotaatiohitauden vaikutusta (Heinisuo & al., 1988). Alkuarvot ovat esillä kuvassa 9.



Kuva 9. Toisen laskentaesimerkin lähtötiedot

Virheprosentti on alimmilla ominaistajuuksilla pieni, mutta kasvaa nopeasti parillisilla ominaistajuuksilla. Jos käytetään tarkkoja muotofunktioita esimerkiksi siirtymävasteen laskemiseen, kannattaisi ottaa myös rotaatiohitauden vaikutus mukaan laskettaessa ominaistajuuksia ja muotofunktioita.

Ominais- taajuus	\bar{f}_n	f_n	$\frac{\bar{f}_n - f_n}{f_n} \cdot 100\%$
1	0.4687	0.4676	0.24
2	1.8117	1.7946	0.95
3	3.8735	3.8232	1.32
4	6.4680	6.3046	2.59
5	9.5689	9.2762	3.16

Taulukko 1. Toisen laskentaesimerkin ominaistajuudet ja näiden virheprosentit

YHTEENVETO

On selvää, että rotaatiohitaustermien vaikutus ominaistajuuksiin riippuu voimakkaasti uuman leikkausjäykkyydestä, mutta ominaistajuuksiin syntyvä virhe voi riippua vahvasti myös muiden parametrien yhteisvaikutuksesta. Tällöin on mahdollista valita sopivasti materiaalit ja rakenteen poikkileikkaus ja saada malli, jossa rotaatiohitauden vaikutuksen unohtamisella on tehty usean prosentin virhe jo ensimmäisissä ominaistajuuksissa, sillä suurin virhe ei välttämättä muodostu esimerkiksi pituuden ja korkeuden suhteella $L/H = 1$, vaan virhe voi kasvaa L/H -suhteen kasvaessa. Vapaasti tuetun kerrospalkin ominaistajuuden analyttisestä lausekkeesta voidaan tarkistaa rotaatiohitauden vaikutuksen suuruusluokka.

Jatkossa on tarkoituksena tarkastella epäsymmetristä kaksi paarteista sandwich-palkkia, jossa otetaan huomioon myös paarteiden leikkausmuodonmuutokset. Lisäksi on tarkoitus tarkastella vaimennettua värähtelyä ja transienttien kuormien huomioon ottamista.

KIITOKSET

Tämä artikkeli kuuluu Suomen Akatemian rahoittamaan ja tekn. lis. Markku Heinisuon johtamaan projektiin: Rakennuselementtien stabiilisuus ja lujuus. Tekijä kiittää Akatemiaa taloudellisesta tuesta ja Markku Heinisuota neuvoista ja opastuksesta.

LÄHDELUETTELO

DAVIES J.M.: An exact finite element for beam on elastic foundation problems. *Journal of Structural Mechanics*, vol 14 (1986)4, s. 489-499.

DiTARANTO R.A.: Theory of vibratory bending for elastic and viscoelastic layered finite-length beams. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 32 (1965), *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers*, vol. 87, Series E.

HEINISUO M.: Kaksipaarteisen sandwich-palkin tarkka jäykkyysmatriisi tasotaivutuksessa. Raportti 9, TTKK, Tampere 1986.

HEINISUO M., AALTO A., MIETTINEN A.: Dynamic analysis of layered beams by exact finite element analysis. Post-Congress Report of the 13.th IABSE Congress in Helsinki 1988, Poster session P 7: Computer Aided Engineering, (in press).

HOWSON W.P.: A compact method for computing the eigenvalues and eigenvectors of plane frames. *Advances in Engineering Software*, vol.1(4) (1979) , s.181-190.

MALMI S.: Kaksipaarteisen sandwich-palkin tarkka dynaaminen analyysi elementtimenetelmällä, Diplomityö 1987, TTKK

MEAD D.J., MARKUS S.: The forced vibration of a three-layer, damped sandwich beam with arbitrary boundary conditions. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 10 (1969), s. 163-175.

MÖTTÖNEN A.: Kaksipaarteisen sandwich-palkin tarkka elementtimenetelmä taivutuspuristuksessa ja lämpökuormituksessa, Diplomityö 1987, TTKK

RAO D.: Computer programs for determining exact frequency and loss factors of sandwich beams with arbitrary boundary conditions, Internal Report (1977), Institut für Mechanische Schwingungslehre und Maschinen Dynamik, Technische Universität Berlin , West Germany

ROSMAN R.: Die statische Berechnung von Hochhauswänden mit Öffnungsreihen, *Bauingenieur-Praxis*, 1965, Heft 65, Verlag von Wilh. Ernest & Sohn, Berlin

STAMM K, WITTE H.: Sandwichkonstruktionen: Berechnung, Fertigung, Ausführung. Ingenieurbauten 3: Theorie und Praxis, Springer-Verlag, New York 1974.

WHITTIER J.S.: The effect of configurational additions using viscoelastic interfaces on the damping of a cantilever beam. WADC Technical Report 58-568 (1959), Wright Air Development Center.

WILLIAMS F.W, WITTRICK W.H.: An automatic computational procedure for calculating natural frequencies of skeletal structures. International Journal of Mechanical Sciences, vol. 12 (1970),s. 781-791.

WESTERLUND A.: Analysering av viskoelastisk Sandwichbalk med finit elementmetod, Diplomityö 1987, HTKK

Simo Malmi, dipl. ins., Tampereen teknillinen korkeakoulu, Rakennusstatistiikan laitos