TASA-ARVOKÄYRIEN ESITTÄMINEN KONTROLLOIDULLA TARKKUUDELLA REKURSIOTA HYVÄSIKÄYTTÄEN

Jorma Köliö

Rakenteiden Mekaniikka, Vol. 21
No 3 1988, s. 3...13

YHTEENVETO: FEM-laskennan graafiset esitykset palvelevat ensisijaisesti lähtötietojen tarkistuksessa ja tulosten havainnollistamisessa. Tulosten osalta niistä voidaan nopeasti kartoittaa tärkeät alueet, jonka jälkeen tarkat lukuarvot joudutaan kuitenkin joskus etsimään tuloslistoilta tai -tiedostoista. Monipuoliset, luotettavat ja tarkat graafiset esitykset vähentävät tulostiedostojen selailu- ja tallennustarvetta sekä sopivat erinomaisesti nykyisin yleistyvien julkaisujärjestelmien aineistoksi. Tässä kirjoituksessa esitetään tasa-arvokäyräalgoritmi, jonka tarkkuus on käyttäjän kontrolloitavissa. Sen lisätavoitteena on tuottaa tasa-arvokäyräesitys mahdollisimman vähän vektoreita sekä tietokoneresursseja käyttäen. Algoritmi on selkeästi ohjelmoitavissa. Rekursiota tukemattomiakin kieliä voidaan käyttää, koska rekursio ei käytännön tapauksissa ulotu 3-6 tasoa syvempään. Kirjoituksessa esitetään lisäksi joitain tulostussuureita ja esitystapoja, joita yleisohjelmat eivät tavallisesti tue.

JOHDANTO

Tasa-arvokäyrien perinteisin sovellus lienee maaston korkeuskäyrien esittäminen; käyrän pisteiden korkeus tietystä vertailutasosta mitattuna on vakio. Vastaavasti FEM-laskennassa havainnollistetaan useiden suureiden jakaumia tasa-arvokäyrin.

Valitaan sopiva taso (2D-tapauksissa perustaso, 3D-tapauksissa usein jokin leikkaustaso), tältä tasolta alue A sekä esitettävä suure f (kuva 1). Tasa-arvokäyrä on niiden pisteiden ura, joissa suureella on sama ennalta valittu arvo.

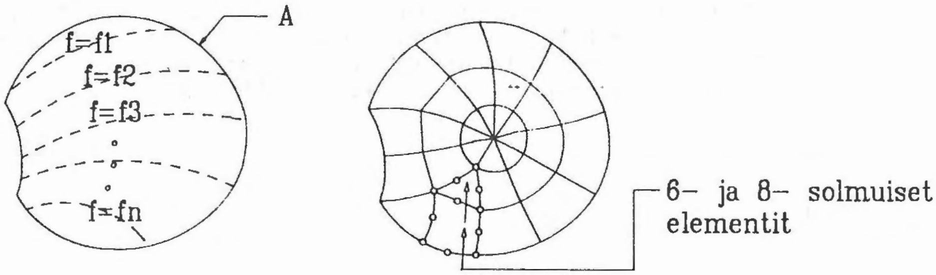
Seuraavassa tehtävään keskitytään FEM-laskennan kannalta, vaikkakin esitettävää algoritimia voidaan käyttää muissakin sovelluksissa, esim. analyyttisten ja mitattujen funktioiden havainnollistamisessa, pintojen tasoleikkauksissa jne.

Termillä tarkkuus tarkoitetaan tässä seuraavaa: mitä parempi tarkkuus, sitä paremmin algoritmin tuottama tasa-arvokäyrä seuraa käytetyn interpolaation mukaista tasa-arvokäyrää. Toisaalta saatujen tasa-arvokäyrien kulku voi antaa viitteitä myös varsinaisen ratkaisun tarkkuudesta.

FEM-INTERPOLAATIO

Funktiota kuvataan jakamalla tarkasteltava alue osa-alueisiin eli elementteihin. Kunkin elementin alueella funktiota approksimoidaan elementtityypille ominaisilla interpolaatiofunktioilla, lähde /1/.

Tavallisesti vain funktio, eivät enää sen derivaatat, on jatkuva kahden vierekkäisen elementin yhteisellä reunalla. Tässä esityksessä käsitellään 6- ja 8- solmuisia isoparametrisia kolmio- ja nelikulmioelementtejä. Monille muille elementtityypeille tehtävä voidaan käsitellä vastaavaan tapaan.



Kuva 1. Funktion f tasa-arvokäyriä alueessa A ja tyypillinen elementtijako.

Mikäli piirrettävä suure on analyysin perustuntematon, esim. siirtymäsuure tai lämpötila, sitä interpoloidaan isoparametrisissa elementeissä samoilla funktioilla kuin elementin geometriaakin. Johdannaissuureita, esim. jännityskomponentteja, kuvaavat interpolaatiofunktiot ovat kaarevareunaisissa elementeissä yleensä luonnollisten koordinaattien r ja s suhteen korkeampiasteisia murtofunktioita. Tavallisesti yleisohjelmissa interpoloidaan kaikkien suureiden tasa-arvokäyrät samalla tavalla, perustuen solmupisteissä määrättyihin keskiarvoihin ja elementtien jakamiseen sopiviin alikolmioihin. Näin esitetyt tasa-arvokäyrät ovat jatkuvia, mutta saadaan ehkä liian optimistinen kuva ratkaisun tarkkuudesta. Mikäli suureet esitetään ilman tasoituksia ja "todellisia" interpolaatiofunktioita käyttäen, voidaan elementin reunoilla esiintyvästä epäjatkuvuudesta arvioida myös ratkaisun tarkkuutta ja havaita alueita, joissa verkon tihentäminen on tarpeen, lähde /2/.

Tässä esityksessä tarkastellaan ensisijaisesti suuretta, jota voidaan interpoloida isoparametrisesti. Muiden interpolaatiofunktioiden käyttö ei aiheuta periaatteellisia muutoksia algoritmiin. Tällöin tarvitaan vain luotettava korkea-asteisten polynomien juurten ratkaisija, ja muotofunktioiden osittaisderivaattojen (kantakoordinaattien x ja y suhteen) lausekkeet on tallennettava kertoimittain, jotta esim. jännityskomponenttien lausekkeet voidaan kirjoittaa ainoastaan toisen luonnollisen koordinaatin funktiona, kun toista pidetään vakiona.

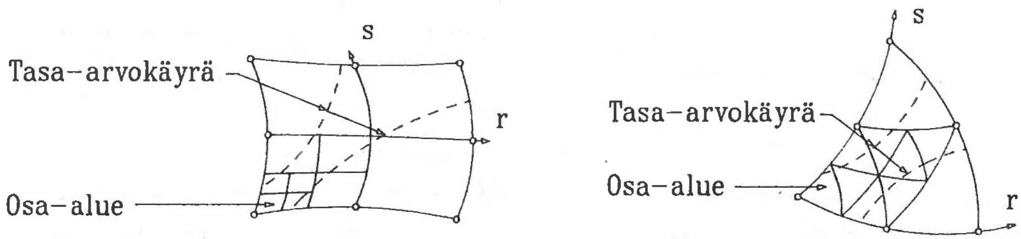
PERUSALGORITMIN KUVAUS

Kutakin tasa-arvokäyrää etsitään elementtikohtaisesti, eli haetaan käyrän kaikki osat yhden elementin alueelta ja siirrytään sitten käsittelemään seuraavaa.

Mikäli tasa-arvokäyrällä on useampi kuin yksi osakäyrä elementin alueella, ei voida suoraan päätellä, mitkä tasa-arvokäyrän ja elementin reunojen leikkauspisteet kuuluvat samalle osakäyrälle. Käyrän seuraaminen tästä tilanteesta lähtien on joskus epäluotettavaa, esim. iteratiivinen elementin reunalta lähtevä algoritmi voi erikoistapauksissa harhautua väärälle käyrän osalle.

Ongelma voidaan ratkaista rekursiota käyttäen. Nelikulmioelementti jaetaan neljään osanelikulmioon ja kolmioelementti vastaavasti neljään osakolmioon (kuva 2). Jako on edullista tehdä luonnollisten koordinaattien suuntaisesti, koska tällöin tasa-arvokäyrän ja osa-alueen reunojen leikkauspisteet ratkeavat helpommin. Toinen tuntematon on vakio, joten tässä käytetyssä isoparametrisessa interpolaatiossa tarvitaan vain toisen asteen yhtälön ratkaisu yhden tuntemattoman suhteen.

Osa-alueiden jakoa jatketaan, kunnes tasa-arvokäyrä leikkaa alueen reunat vain kahdessa pisteessä. Tämän jälkeen tutkitaan käyrän esitystarkkuus ko. osa-alueessa.



Kuva 2. Elementin jakaminen osa-alueisiin.

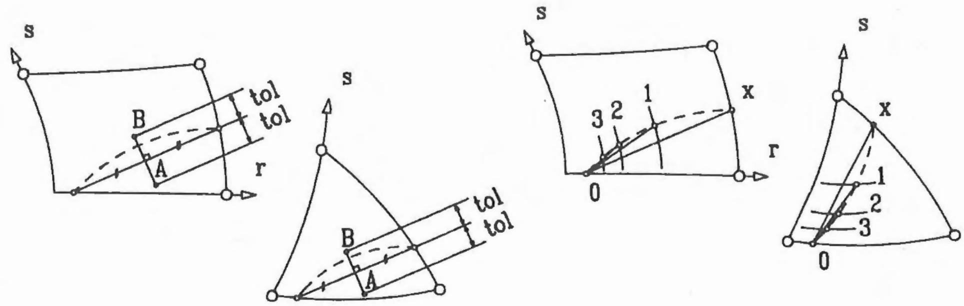
ESITYSTARKKUUDEN KONTROLLOINTI

Kun käyrä leikkaa osa-alueen reunaa vain kahdessa pisteessä, vastaavat kantakoordinaatiston pisteet voidaan laskea ja esittää käyrä karkeasti vain yhdistämällä pisteet. Näin tapahtuu myös esitettävässä algoritmissa, jos käytetään hyvin löysää tarkkuusvaatimusta.

Tarkkuutta voitaisiin parantaa yksinkertaisimmin jatkamalla rekursiivista aluejakoa, kunnes asetettu tarkkuusvaatimus saavutetaan. Menettelytapa tuottaa kuitenkin paljon vektoreita esitystarkkuuteen verrattuna, ei ole kovin edullinen tietokoneajan suhteen ja lisäksi rekursio ulottuu tarpeettoman syvään.

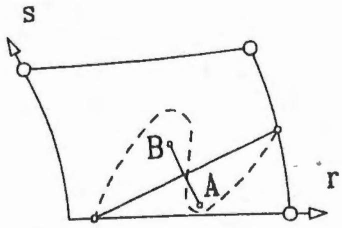
Käyrältä edellytetään, ettei minkään osajanan keskipisteen etäisyys keskinormaalin suunnassa todelliselta käyrältä ole annettua toleranssiarvoa suurempi. Kokeiltiin algoritmia, jossa Newton iteraatiota käyttäen haettiin lähin keskinormaalin suunnassa oleva todellinen tasa-arvokäyrän piste. Se johti lähes samaan vektorimäärään kuin seuraavassa esitettävä tapa (vain n.

1-2 % vähemmän), mutta vaati testitapauksissa n. 50 % enemmän tietokoneaikaa. Koska Newton iteraatio ei myöskään välttämättä aina suppene, sen käytöstä luovuttiin.



Kuva 3. Osakäyrän tarkkuus ja tarkentaminen.

Valitussa menetelmässä lasketaan käänteisen isoparametrisen kuvaksen avulla luonnollisten koordinaattien pisteitä A ja B vastaavat arvot. Kuvassa 3 asiaa on havainnollistettu käyttämällä osa-alueena nelikulmioelementin "oikeata yläneljännestä" ja kolmioelementin "ylintä kolmannesta". Edelleen lasketaan funktion arvot em. pisteissä. Mikäli haettava tasa-arvo sijoittuu näiden arvojen väliin, esitystarkkuus hyväksytään. Ehto ei kuitenkaan ole aina täysin tyydyttävä. Korkea-asteisen interpolaation yhteydessä voi esiintyä esim. kuvan 4 mukainen tilanne, jolloin käyrä ei ole riittävän tarkka, eikä algoritmi sitä havaitse. Asia voidaan korjata suorittamalla tarkistus useammassa jänteen pisteessä. Näin voidaan tehdä, koska tarkistus on hyvin nopea. Paraboliselle isoparametriselle kuvaukselle tarkistus vain jänteen keskipisteessä on yleensä hyväksyttävää.



Kuva 4. Korkea-asteinen interpolaatio.

OSAKÄYRÄN TARKENTAMINEN

Kuvassa 3 on esitetty osakäyrän tarkentamisen periaate. Osa-alue "halkaistaan" pitäen vakiokoordinaattina sitä luonnollista koordinaattia, jonka koordinaattiero jänteen päissä on suurin. Halkaisu tapahtuu jänteen keskipisteen kautta. Leikkauspisteet ratkeavat jälleen isoparametriselle kuvaukselle yhden tuntemattoman toisen asteen yhtälöstä.

Myös tämä vaihe on rekursiivinen, esim. kuvassa 3 jana 0-x on jouduttu puolittamaan ja edelleen janaa 0-1 jakamaan pisteeseen 3 saakka. Jos jana 0-3 täyttää tarkkuusvaatimuksen, se esitetään. Seuraavaksi tarkistetaan jana 3-2. Tarvittaessa sitä jaetaan edelleen ja jatketaan samoin janojen 2-1 ja 1-x kanssa.

Tasa-arvokäyrien lisäksi samaa algoritmia voidaan käyttää myös elementtien reunakäyrien esittämiseen.

Algoritmi tuottaa osa-alueen janat järjestyksessä, mikä helpottaa mahdollisesti tarvittavaa lajittelua.

KORKEAMPIASTEISET FUNKTIOT

Jännityskomponentit voidaan esittää Hooken lain ja siirtymäderivaattojen avulla. Jos kirjoituksessa esitetyille kaarevareunaisille elementtityypeille johdetaan tasojännitystilan jännityskomponenttien riippuvuus solmusiirtymistä luonnollisten koordinaattien avulla lausuttuna, päädytään murtofunktioihin, joiden sekä osottaja että nimittäjä ovat neljännen asteen polynomeja. Mikäli toista koordinaattia voidaan pitää vakiona, asteluku on kolme.

Kirjoitettiin rutiinit, jotka suorittavat polynomiaritmetiikan pitäen kunkin polynomin termin "erillään". Näin jännitysjakauma voidaan lausua suoraan luonnollisten koordinaattien funktiona.

Kuitenkin jännityskomponenttien laskenta tätä funktiota käyttäen edellyttää enemmän laskutoimituksia, kuin tavanomainen muotofunktiokutsuun perustuva. Tätä havainnollistaa seuraava liukulukuprosessorilla varustetulla tietokoneella laskettu taulukko.

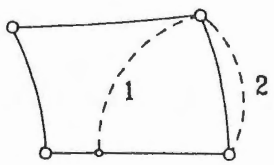
Taulukko 1. Tasojännitystilakomponenttien ratkaisuaika 8-solmuisessa kaarevareunaisessa elementissä kahdella eri menetelmällä.

Samasta elementistä laskettujen jännityspisteiden lkm.	Tavanomaisten muotofunktioaliohjelmakutsujen edellyttämä aika [s]	Murtofunktion avulla laskien tarvittava aika [S]	Aikojen suhde
1	~ 0.002	~ 0.066	28.6
5	~ 0.012	~ 0.078	6.72
10	~ 0.023	~ 0.093	4.08
50	~ 0.115	~ 0.218	1.90
100	~ 0.229	~ 0.374	1.63
500	~ 1.140	~ 1.620	1.42
1000	~ 2.280	~ 3.173	1.39
10000	~ 22.801	~ 31.180	1.37

Vaikkakaan menetelmä ei näytä tarjoavan teholisäystä jännityskomponenttien laskentaan, se on silti hyödyllinen algoritmeissa, joissa tuntemattomien erottelusta on etua. Kirjoituksen menetelmässä tämä mahdollistaa korkea-asteisissa polynomeissa yhden tuntemattoman käsittelyn kahden yhtäaikaisen sijaan.

MAHDOLLISIA ERIKOISTAPAUKSIA

Eräs algoritmin tärkeimmistä vaiheista on tasa-arvokäyrän ja osa-alueen reunojen leikkauspisteiden luotettava määrittäminen. Kuvassa 5 on esitetty kaksi erikoistapausta. Käyrä 1 leikkaa alueen reunan ja kulkee yhden sen kulmapisteen kautta. Algoritmin on näinollen hyväksyttävä leikkauspisteinä myös reunan päätepisteet ja suodatettava päällekkäiset pois. Käyrä 2 puolestaan havainnollistaa tapausta, jossa kaksi leikkauspistettä eivät vielä takaa sitä, että käyrä olisi alueessa.



Kuva 5. Erikoistapauksia.

Erikoistapaukset voidaan ohjelmoida hyvin, mikäli lisäksi on käytettävissä myös luotettava polynomin juurten ratkaisija. Testiohjelmassa on tarkoituksellisesti käytetty sopivia tasa-arvokäyrien kokonaislukuarvoja, jotta vaikeimmat mahdolliset tapaukset saataisiin näkyviin. Käytännön tapauksissa nämä tilanteet esiintyvät harvoin.

VEKTOREIDEN LAJITTELU

Käyttäjä saattaa "varmuuden vuoksi" valita tarpeettoman tiukan toleranssiarvon, mikä ei välttämättä paranna esityksen selkeyttä, mutta lisää aina vektorimäärää (käyrän kuvaamiseen tarvittavia janoja) ja tietokoneen prosessointiaikaa.

Kun tulostuslaitteen erotuskyky ylitetään, esitys voi esim. kynäpiirtureiden osalta jopa huonontua lisääntyvien kynän nostojen ja laskujen takia.

Viimeksimainittua haittaa voidaan korjata huomattavasti jo lajittelemalla vain elementin alueen osajanat. Mikäli samalla esitetään myös elementtien reunaviivat, kynän nostot ja laskut sijoittuvat elementtien reunoille, eivätkä näinollen erotu. Esityksen selkeyden lisäksi lajittelu on edullinen myös tiedostokoon suhteen. Jatkuvalle murtoviivalle tallennettavia koordinaattipareja tarvitaan vähemmän.

Ohjelmassa voidaan myös tarkistaa käyttäjän antama tarkkuusvaatimus ja säätää se tulostuslaitteen tarkkuutta vastaavaksi, jos tämä ylitetään.

MUITA TULOSTUSSUUREITA JA ESITYSTAPOJA

Yleiskäyttöisten FEM-ohjelmien tasa-arvosuureiden valikoima on joskus liian suppea kattaen esim. vain lämpötilan, jännityskomponentit ja vertailujännitykset. Usein esim. siirtymät puuttuvat. Varsinkin pinnan normaalisiirtymät ovat hyvin hyödyllisiä kuorirakenteiden siirtymätilan ja lommahdusmuotojen tarkasteluissa.

Mallin tasoleikkauksista havaitaan nopeasti pintojen muotovirheet ja -epätarkkuudet. Tällöin itse asiassa on kysymys mallin geometrian tasa-arvokäyristä.

Kolmidimensioisten elementtien tasa-arvokäyrät esitetään tavallisesti valitsemalla leikkaustaso ja tarkastelemalla tasa-arvosuureen käyttäytymistä tässä tasossa. Joissakin tapauksissa luontevampi ja parempaan lopputulokseen johtava tapa olisi valita kerros toisiinsa liittyviä elementtejä, esim. rakenteen pintaan rajautuvat elementit. Mikäli pinnan normaalia vastaava luonnollinen koordinaatti saa kussakin elementissä vakioarvon, syntyy mallin muotoa myötäilevä pinta. Nyt voidaan tutkia tasa-arvosuureen käyttäytymistä tällä pinnalla vain kahden luonnollisen koordinaatin funktiona. Lopullinen esitys olisi tämän pinnan sopiva projektio.

Isoparametrisessa kuvauksessa käyrät voidaan laskea aivan vastaavaan tapaan kuin tässä kirjoituksessa käsitellyille elementeille, jopa muotofunktiotkin ja niiden derivaatat voidaan ratkaista vain 2 x 2 Jacobin matriisia käyttäen, lähde /3/.

Elementin solmussa lasketun jännityseron itseisarvo vastaavan solmun keskiarvojännityksen itseisarvoon verrattuna tuottaa tasa-arvoesityksen, josta havaitaan selkeästi verkon epätarkat alueet.

On ymmärrettävää, ettei kaikkia käyttäjien toiveita kyetä täyttämään suoraan ohjelman suurevalikoimalla. Kuitenkin tilannetta voitaisiin ehkä korjata sallimalla käyttäjän aliohjelma, joka saa FEM-ohjelmasta parametreikseen laajan perussuureiden valikoiman. Käyttäjän tulisi määritellä oma suureensa perussuureiden avulla, jolloin samalla määräytyisi myös ko. suureen interpolaatiofunktio.

Esityksen havainnollisuutta voidaan lisätä esim. piirtämällä positiivisia ja negatiivisia arvoja vastaavat käyrät eri väreillä tai viivatyypeillä (kuva 6). Käyrät voidaan myös esittää kolmiulotteisina projisoimalla ne halutulle tasolle (kuva 7).

Kolmiulotteiset käyrät voidaan näyttää myös animaationa. Mikäli eri katselupisteistä piirretyt projektiot ladataan työaseman eri muistitasoille tai -segmentteihin, niitä voidaan vaihdella hyvin nopeasti ja näin esittää animaatio kiertyvästä kohteesta.

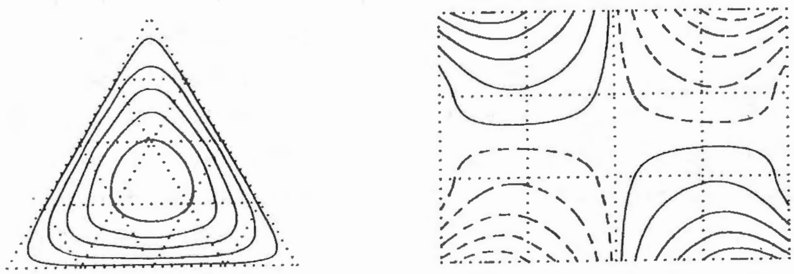
OHJELMOINTIIN LIITTYVÄÄ

Parhaiten algoritmin ohjelmointiin sopinevat joko C-kieli tai Pascal, koska ne jo nyt tukevat rekursiivisia funktiokutsuja.

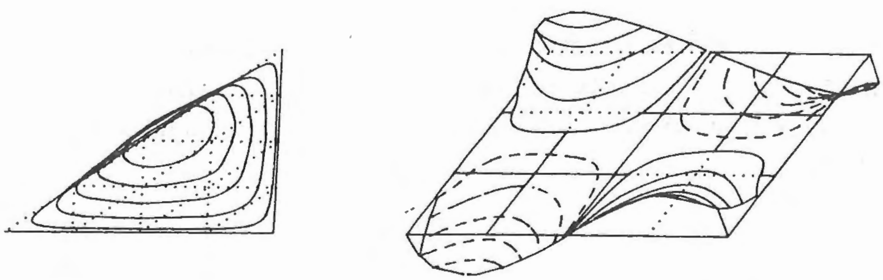
Algoritmin perusversio on kuitenkin ohjelmoitu Fortran77-kielellä varautuen rekursiotasoon 7 saakka, mikä on kaikissa testitapauksissa hyvin riittänyt. Mikäli rekursio ulottuu syvempään elementin osa-aluejaon yhteydessä kyseisissä osa-alueissa olevat tasa-arvokäyrien osat jäävät kokonaan esittämättä. Jos taas ylitys tapahtuu osakäyrän tarkentamisvaiheessa, käyrä esitetään sillä tarkkuudella, kuin syvin rekursiotaso sen sallii.

Rekursiotason syvyys asetetaan Fortranilla ohjelmoitaessa koodin kirjoitusvaiheessa, ja se vaikuttaa koodin määrään.

Kuvan 6 tasa-arvokäyrät on esitetty tarkkuusparametrin tol arvolla kuvan sivumitta / 27000; kuvassa on 3530 vektoria. Laskenta ja esitysaika n. 1 Mips tehoisella työasematietokoneella on n. 55 sek.



Kuva 6. Tasasivuisen kolmio- ja suorakaideprofiilien vääntökäyristymisfunktion tasa-arvokäyrät, lähde /4/.



Kuva 7. Projisioidut tasa-arvokäyrät (kuvaa on muokattu CAD-ohjelmalla).

Käytännössä näin suurta esitystarkkuutta tuskin tarvitaan. Usein on tärkeämpää, kuinka hyvin elementtien muotofunktiot interpoloivat todellista funktiota. Esim. kuvassa 6 näkyvissä tasa-arvokäyrissä on lievää aaltoilua; käytetty elementtijako on suhteellisen harva.

Kokeneellekin käyttäjälle em. mahdollisuudet saattavat lisätä tulosten tulkintanopeutta, mutta parhaimmillaan ne lienevät raportoitaessa ja esiteltäessä laskentoja muille henkilöille. FEM-laskentaahan pidetään joskus hieman "etäisenä" asiana. Syy voi joskus olla myös esitystekninen.

KIITOS

Lopuksi haluaisin kiittää tekn. tri. Eero-Matti Salosta ja dipl.ins. Jouni Freundia huolellisesta käsikirjoitukseeni perehtymisestä ja hyvistä huomautuksista.

LÄHTEET

[1] K-J. Bathe, Finite element procedures in engineering analysis. Prentice - Hall, inc. 1982.

[2] T. Sussman, K-J. Bathe, Studies of finite element procedures - stress band plots and the evaluation of finite element meshes. Eng. Comput., 1986, Vol. 3, s. 178...191.

[3] B. Irons, S. Ahmad, Techniques of finite elements, John Wiley & Sons, New York 1980, s. 443.

[4] A. Ylinen, Kimmo ja lujuusoppi II, Werner Söderström Oy, Porvoo 1970, s. 609-611.

Jorma Köliö, dipl.ins., Valmet paperikoneet Oy