

Eero-Matti Salonen

Rakenteiden Mekaniikka, Vol 1
No 1 1988, s. 66...75

TIIVISTELMÄ: Artikkelissa käsitellään elementtimenetelmän perustana olevien heikkojen muotojen johtamista kahden yksinkertaisen esimerkiprobleeman avulla. Osittaisintegroinnissa tavallisesti poisjätetyt sijoitustermit otetaan huomioon. Tästä aiheutuu muutoksia myös formulaatioiden lähtökohdiksi valittuihin tavanomaisiin yhtälöihin. Esitettyä johtamistapaa suositellaan käytettäväksi sen elementtimenetelmän ymmärtämistä lisäävien piirteidensä vuoksi.

JOHDANTO

Tarkastellaan esimerkkinä differentiaaliyhtälöä

$$-\frac{d}{dx}\left(k \frac{d\phi}{dx}\right) - Q = 0, \quad 0 < x < 1 \quad (1)$$

reunaehtoiineen

$$\phi(0) = \phi_0, \quad \phi(1) = \phi_1. \quad (2)$$

Kyseessä voisi olla vaikka tavanomainen stationaarinen yksidimensiainen lämmönjohtumistehtävä: $\phi(x)$ on tuntematon lämpötila ja $k(x)$, $Q(x)$, ϕ_0 ja ϕ_1 ovat annettuja, tutun merkityksen omaavia suureita. (Yhtälön (1) vasen puoli on varustettu ehkä luonnottoman tuntuisesti miinusmerkeillä. Tämän tarkoituksena on pelkästään välttää muutoin myöhemmin tarvittava merkinvaihdos.)

Likiratkaisujen pohjana käytettävä, systeemiä (1) ja (2) vastaava heikko muoto johdetaan alan oppikirjoissa tavallisesti seuraavasti. Yhtälö (1) kerrotaan puolittain paino- eli testifunktiolla $w(x)$ ja suoritetaan integrointi puolittain välin $(0,1)$ yli:

$$\int_0^1 w \left[- \frac{d}{dx} \left(k \frac{d\phi}{dx} \right) - Q \right] dx = 0 . \quad (3)$$

Tämän jälkeen käytetään hyväksi osittaisintegroinnin kaavaa

$$\int_0^1 g \frac{dh}{dx} dx = \left|_0^1 gh - \int_0^1 \frac{dg}{dx} h dx \right. \quad (4)$$

seuraavasti sovellettuna: $g \hat{=} w$, $h \hat{=} k d\phi/dx$, jolloin termi

$$\int_0^1 w \frac{d}{dx} \left(k \frac{d\phi}{dx} \right) dx = \left|_0^1 wk \frac{d\phi}{dx} - \int_0^1 \frac{dw}{dx} k \frac{d\phi}{dx} dx \right. . \quad (5)$$

Osittaisintegroinnin tarkoituksenaahan on tunnetusti alentaa funktioon ϕ kohdistuvien derivaattojen kertalukua. Reunaehto (2) perusteella vaaditaan vielä, että

$$w(0) = 0 , \quad w(1) = 0 , \quad (6)$$

jolloin tuntemattomat $k d\phi/dx(0)$ ja $k d\phi/dx(1)$ häviävät formulaatiosta ja saadaan haluttu heikko muoto

$$\int_0^1 \left(k \frac{dw}{dx} \frac{d\phi}{dx} - wQ \right) dx = 0 . \quad (7)$$

Esimerkiksi elementtimenetelmää sovellettaessa otetaan sitten käyttöön tuttu approksimaatio

$$\hat{\phi} = \sum_j N_j(x) \phi_j , \quad (8)$$

joka sijoitetaan yhtälöön (7). Tavallisesti käytetään lisäksi Galerkinin keinoa, jossa testifunktiot otetaan yritefunktioiden N_j joukosta, joten tyypillinen lopullinen diskreetti yhtälö tulee olemaan tyyppiä

$$\sum_j \int_0^1 k \frac{dN_j}{dx} \frac{dN_j}{dx} dx \phi_j - \int_0^1 N_j Q dx = 0 . \quad (9)$$

Tarkkaavaista lukijaa jää jokin kaivertamaan: Eikö matkan varrel-

la ole harrastettu älyllistä epärehellisyyttä? Jos nimittäin funktio ϕ on vain C^0 -jatkuva — kuten on asian laita tavanomaisen esityksen (8) yhteydessä — ei manipulointien tuloksena enää synnykään muotoa (7)! Tämä ongelma pyritään yleensä kuittaamaan suunnilleen seuraavasti. Ajattelemme ko. suureet manipulaatioiden ajaksi riittävän jatkuviksi, jolloin saadaan yhtälö (7). Tätä pidetään sitten tavallaan uutena matemaattisena totuutena ja unohdetaan sen synnytystapa.

Ennen jatkamista otetaan käyttöön merkintöjä, joita voidaan soveltaa tarvittaessa mahdollisimman vähäisin muutoksin myös useampi-dimensioisissa tapauksissa.

Jaetaan avoin väli $(0,1)$ eli Ω sisäpisteiden $I = 1,2,\dots$ avulla avoimiin osaväleihin eli elementteihin Ω^e , $e = 1,2,\dots$. Kaikki integroinnit suoritetaan käytännössä elementteittäin, joten esimerkiksi heikko muoto (7) on näin ollen

$$\sum_e \int_{\Omega^e} (k \frac{dw}{dx} \frac{d\phi}{dx} - wQ) d\Omega = 0. \quad (10)$$

Käytettyjen merkintöjen sisältö lienee ilmeinen.

KORJAUSYRITYS

Tarkastellaan äskeistä johtoa nyt hieman täsmällisemmin. Lähtökohtana oleva yhtälö (3) on elementeittäin integroituna

$$\sum_e \int_{\Omega^e} w [-\frac{d}{dx}(k \frac{d\phi}{dx}) - Q] d\Omega = 0. \quad (11)$$

Osittaisintegrointia (4) sovelletaan vastaavasti paloittain muodossa

$$\int_{\Omega^e} g \frac{dh}{dx} d\Omega = \left| \int_{\Gamma^e} gh - \int_{\Omega^e} \frac{dg}{dx} h d\Omega \right|. \quad (12)$$

Merkintä Γ^e viittaa elementin e reunaan, joka muodostuu tässä siis aina vain kahdesta pisteestä. Otaksutaan, että ϕ , w ja k ovat kuitenkin elementin sisällä niin jatkuvia, että kaavaa (12) voidaan soveltaa. Kun käytetään tavanomaista polynomiesitystä, ϕ ja w ovat itse

asiassa C^∞ -jatkuvia elementin sisällä. Jos suureen k arvossa tapahtuu hyppäyksiä, elementtien rajat pannaan yhtymään näihin kohtiin, joten myös funktio k saadaan käytännössä riittävän sileäksi elementtien sisällä. Kun yhtälöt (12) summeerataan puolittain yli kaikkien elementtien, saadaan ensin tulos

$$\sum_e \int_\Omega e^g \frac{dh}{dx} d\Omega = \sum_e \left|_\Gamma e^{gh} - \sum_e \int_\Omega e \frac{dg}{dx} h d\Omega \right. \quad (13)$$

Otetaan vielä käyttöön merkintä

$$[[f]] \equiv f^+ - f^- \quad (14)$$

Tällä tarkoitetaan suureen f arvon tietyssä pisteessä saamaa hyppäystä. Merkinnot - ja + viittaavat vastaavasti vasemman- ja oikeanpuoleiseen raja-arvoon. Osittaisintegroitikaava (13) voidaan kirjoittaa täten myös muotoon

$$\sum_e \int_\Omega e^g \frac{dh}{dx} d\Omega = \left|_\Gamma gh - \sum_I [[gh]]_I - \sum_e \int_\Omega e \frac{dg}{dx} h d\Omega \right. \quad (15)$$

Sijoitustermiissä oleva merkintä Γ viittaa alueen Ω reunaan eli siis tässä pisteisiin $x = 0$ ja $x = 1$.

Kaavan (5) täsmennetyksi versioksi saadaan nyt ($g \hat{=} w$, $h \hat{=} k d\phi/dx$)

$$\sum_e \int_\Omega e^w \frac{d}{dx} \left(k \frac{d\phi}{dx} \right) d\Omega = \left|_\Gamma wk \frac{d\phi}{dx} - \sum_I w_I [[k \frac{d\phi}{dx}]]_I - \sum_e \int_\Omega e \frac{dw}{dx} k \frac{d\phi}{dx} d\Omega \right. \quad (16)$$

Kuten huomataan, on lisäksi otaksuttu, että testifunktio on C^0 -jatkuva elementistä toiseen siirryttäessä, jolloin kussakin sisäpisteessä I $w = w^+ = w^-$.

Kun kaavaa (16) sovelletaan yhtälössä (11) ottaen vielä huomioon valinnat (6), päädytään — luuloteltuun täsmennettyyn — heikkoon muotoon

$$\sum_e \int_\Omega e \left(k \frac{dw}{dx} \frac{d\phi}{dx} - wQ \right) d\Omega + \sum_I w_I [[k \frac{d\phi}{dx}]]_I = 0 \quad (17)$$

Vertailu tavanomaisen muodon (10) kanssa osoittaa hyppytermeihin liittyvän eron. Uusi versio on saatu ilman älyllistä vilppiä ja tuntuisi siten oikealta lähtökohdalta. Kuitenkin ottamalla esimerkiksi tapaus $k = \text{vakio}$, $Q = 0$ sekä käyttämällä kaksisolmuisia lineaarisia elementtejä ja Galerkinin keinoa päädytään tyyppiä $0 = 0$ oleviin diskreetteihin yhtälöihin. Täten rehellisyyden yritys palauttaa umpikujalla.

LOPULLINEN KORJAUS

Äskeiseen probleemaan on kuitenkin löydettävissä kunniallinen ratkaisu. Kontinuumsysteemi (1) ja (2) voidaan täydentää ainakin lämmönjohtumistulkinnassa seuraavalla hyppy- tai pikemminkin jatkuvuusehdolla

$$k^+ \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^+ = k^- \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^- \quad (18)$$

eli

$$\llbracket k \frac{d\phi}{dx} \rrbracket = 0, \quad 0 < x < 1. \quad (19)$$

(Lämmönjohtumisessa ns. lämpövuoto $q = -k d\phi/dx$ on fysikaalisista syistä jatkuva. Jos lämmönjohtavuus k saa tietyssä pisteessä tietyn hyppäyksen $k^+ - k^-$, saa siis myös derivaatta $d\phi/dx$ vastaavan hyppäyksen niin, että ehto (19) toteutuu.)

Yhtälön (17) perusteella on nyt helppoa tehdä tarvittava modifiointi. Kerrotaan yhtälö (19) puolittain kussakin sisäpisteessä I testifunktiolla $-w_I$ ja lisätään kaikki näin saadut identiteetit puolittain yhtälöön (11), jolloin saadaan yhtälö

$$\sum_e \int_{\Omega_e} w \left[- \frac{d}{dx} \left(k \frac{d\phi}{dx} \right) - Q \right] d\Omega - \sum_I w_I \llbracket k \frac{d\phi}{dx} \rrbracket_I = 0. \quad (20)$$

Kun tähän sitten sovelletaan paloittaista osittaisintegrointia, joudutaan juuri oikeaan muotoon (10).

Lähtökohdan (20) käyttöä lähtökohdan (11) sijasta heikon muodon johdossa voidaan hyvinkin pitää juuri elementtimenetelmän luonteen huomioon ottavana versiona. Muistaen elementtimenetelmän paloittai-

sen approksimaation on pelkän kenttäyhtälön lisäksi tarpeen painottaa myös ratkaisun tietynlaista jatkuvuutta approksimaation "saumakohdissa".

Päädyimme siis vanhaan tuttuun lopputulokseen, mutta lähtökohta ja väliaskeleet poikkesivat tavanomaisista. Vaikka lopputuloksen johtaminen vie enemmän rivejä kuin tavanomainen tapa, elementtime-netelmän kunnollisen ymmärtämisen saavuttamiseksi olisi mielestäni syytä suosia tässä esitettyä versiota. Tämä merkitsee, että normaali probleeman kuvaaminen pelkkinä kenttäyhtälöinä ja reunaehtoina tulisi heti kärkeen täydentää vallitsevilla jatkuvuusehdoilla.

Jatkuvuusehtojen merkitys tulee korostetusti esille myös ns. SUPG-menettelyssä, jota selostetaan hieman seuraavassa. Olen päättänyt edellä esitettyihin tulkintapainotuksiin juuri tutustuesani SUPG-menettelyä koskevaan kirjallisuuteen.

SUPG-MENETTELY

Tarkastellaan yhtälösystemiä

$$v \frac{d\phi}{dx} - \frac{d}{dx} \left(k \frac{d\phi}{dx} \right) - Q = 0, \quad 0 < x < 1 \quad (21)$$

$$\left[\left[k \frac{d\phi}{dx} \right] \right] = 0, \quad 0 < x < 1 \quad (22)$$

$$\phi(0) = \phi_0, \quad \phi(1) = \phi_1. \quad (23)$$

Kyseessä on muuten sama asetelma, jota on käsitelty edellä paitsi, että yhtälö (1) on täydennetty osuudella $v d\phi/dx$ ja jatkuvuusehto (19) on kirjattu heti mukaan tärkeänä systeemiä kuvaavana ominaisuutena.

Yhtälö (21) on pelkistetty yksidimensioinen versio ns. yleisestä konvektio-diffuusioyhtälöstä (engl. convection-diffusion equation, advection-diffusion equation, convective transport equation). Ensimmäisen kertaluvun derivaattaan liittyvä osuus $v d\phi/dx$ on ns. konvektiotermin ja toisen kertaluvun derivaattaan liittyvä osuus $d(k d\phi/dx)/dx$ ns. diffuusiotermin. Yhtälö (21) voidaan tulkita edelleen lämmönjohtumisyhtälöksi, jossa vain on otettu huomioon nopeudella v virtaavan väliaineen liike. Konvektio-diffuusioyhtälöllä on

erittäin keskeinen asema virtausmekaniikassa, koska miltei kaikkien yhtälöt ovat luonteeltaan tätä yhtälötyyppiä.

Dimensioton suure

$$Pe = \frac{vl}{k} , \quad (24)$$

ns. Peclet'n luku, kuvaa tietyllä tavalla konvektion ja diffuusion voimakkuuksien suhdetta. Elementtimenetelmän soveltaminen konvektio-diffuusioyhtälön yhteydessä tuotti aluksi ongelmia, kun Pe :n arvo (määriteltynä elementin kokoon liittyvän referenssipituuden avulla) kasvoi riittävän suureksi. Tärkeä läpimuoto ongelman poistamisessa oli ns. SUPG-menettelyn (engl. streamline-upwind / Petrov-Galerkin method) kehittyminen. Suomeksi voitaisiin ehkä puhua virtaviiva-ylävirta / Petrov-Galerkin-menettelystä (VYPG). (Lähteet /1/ ja /2/ antavat hyvän kuvan SUPG-menettelyn synnystä ja nykytilasta.) Menettelyn nimessä esiintyvät termit viittaavat seuraavaan. Sana ylävirta korostaa, että valituissa testifunktioissa on tietyn pisteen kannalta voimakkaampi painotus ylä- kuin alavirran puolella. Sana virtaviiva osoittaa, että painotuksen tulee tapahtua juuri virtaviivan osoittamaan suuntaan. Nykyään on muodostunut melko yleiseksi tavaksi puhua Petrov-Galerkin-keinosta, jos yrite- ja testifunktiot ovat eri funktiojoukoista. Esimerkiksi lähteissä /1/ ja /2/ käytetään jatkuvia yritefunktioita, mutta epäjatkuvia testifunktioita.

Johdetaan nyt lähteessä /1/ esitetyn heikon muodon yksidimensioinen versio. Systemistä (21), (22) ja (23) synnytetään aluksi esitys

$$\sum_e \int_{\Omega} \tilde{w} \left[v \frac{d\phi}{dx} - \frac{d}{dx} \left(k \frac{d\phi}{dx} \right) - Q \right] d\Omega - \sum_I w_I \left[\left[k \frac{d\phi}{dx} \right] \right]_I = 0 . \quad (25)$$

Se poikkeaa hengeltään yhtälöstä (20) siten, että kenttäyhtälöä on painotettu eri funktiolla kuin jatkuvuusehtoa. Lähteen /1/ mukaisesti otetaan

$$\tilde{w} = w + p , \quad (26)$$

jossa w on tavanomainen C^0 -jatkuva Galerkinin keinoon liittyvä testifunktio ja p C^{-1} -jatkuva häiriötermi, joka asetetaan häviämään,

kun $P_e \rightarrow 0$, mutta jolla on oleellinen merkitys, kun P_e on suuri. Testifunktion osuuden p suhteen ei harrasteta lainkaan osittaisintegrointia, vain osuuden w ja diffuusiotermin tulon suhteen suoritetaan samoin kuin edellä osittaisintegrointi. Näin päädytään SUPG-menettelyn heikkoon muotoon

$$\begin{aligned} & \sum_e \int_{\Omega} e \left(wv \frac{d\phi}{dx} + k \frac{dw}{dx} \frac{d\phi}{dx} - wQ \right) d\Omega + \\ & + \sum_e \int_{\Omega} e p \left(v \frac{d\phi}{dx} - \frac{d}{dx} \left(k \frac{d\phi}{dx} \right) - Q \right) d\Omega = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Kun $v = 0$ ja siis $p = 0$, joudutaan takaisin tavanomaiseen muotoon (10). Kirjallisuudessa on annettu ohjeita testifunktion p valinnoille ja aiheeseen ei puututa tässä.

LOPPUTOTEAMUKSIA

Kirjallisuudessa toimitaan usein siten, että hyväksi havaittu heikko muoto annetaan tylästi suoraan ja tämän jälkeen mahdollisesti suoritetaan manipulaatioita, joiden perusteella differentiaaliyhtälöformulaation nähdään olevan seurauksena. Kyseessä on siis tässä esityksessä selostettujen askelien kulkeminen käänteiseen suuntaan. (Variaatioperiaatetta sovellettaessa toimitaan samaan tapaan: Funktionaali annetaan ja seurauksina saadaan Eulerin yhtälöt ja luonnolliset reunaehdot.) Ymmärtämisen kannalta tässä artikkelissa esitetty kulkusuunta saattaa kuitenkin olla suositeltavampi.

Tarkastellut probleemat on helppo laajentaa koskemaan kahta ja kolmea dimensiota. Kaavan (15) vastineiksi saadaan esimerkiksi tasotapauksessa

$$\left. \begin{aligned} & \sum_e \int_{\Omega} e g \frac{\partial h}{\partial x} d\Omega = \\ & \sum_e \int_{\Gamma_{\text{ext}}} e n_x g h d\Gamma - \sum_I \int_{\Gamma_{\text{int}}} I n_x [[gh]] d\Gamma - \sum_e \int_{\Omega} e \frac{\partial g}{\partial x} h d\Omega, \\ & \sum_e \int_{\Omega} e g \frac{\partial h}{\partial y} d\Omega = \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_e \int_{\Gamma_{\text{ext}}^e} n_Y^e g h d\Gamma - \sum_I \int_{\Gamma_{\text{int}}^I} n_Y^I [[gh]] d\Gamma - \sum_e \int_{\Omega} \frac{\partial g}{\partial Y} h d\Omega \end{aligned} \right\}$$

Tässä Ω on avoin tasoalue ja Γ sen reuna. Elementtien väliset raja-
viivat muodostavat sisäisen reunan Γ_{int} , joka kertyy siis paloittai-
sista osista Γ_{int}^I . Merkintä Γ_{ext}^e viittaa elementin e siihen reunan
osaan, joka on mahdollisesti Γ :lla. Suureet n_x ja n_y ovat reunan
yksikkönormaalien komponentit. Osalla Γ kyseessä on ulkoinen normaali.
Sisäisen reunan eri puolet varustetaan kullakin osalla Γ_{int}^I
mielivaltaisella tavalla - ja + merkeillä. Yksikkönormaali on otet-
tu kaavoissa (28) osoittamaan miinuspuolelta pluspuolelle päin.

Myös mukaan otettavien reunaehtojen suhteen voidaan tehdä tarvit-
taessa laajennuksia.

Tämän artikkelin aihepiirin kannalta on kysymys aina kulloinkin
vallitsevista hyppy- tai jatkuvuusehdoista selvästikin aivan oleel-
linen. Miten jatkuvuusehdot saadaan? Mekaniikan sovellutuksissa
tämä kysymys ei muodosta yleensä erityistä ongelmaa. Kontinuumime-
kaniikan aksioomat koskevat alkuperäisissä muodoissaan äärellisiä
kappaleita. Aksioomista saadaan sitten johdettua matemaattisin
keinoin tunnettuun tapaan paitsi kenttäyhtälöt ja reunaehdot myös
kappaleen sisällä vallitsevat hyppyehdot. Täten syntyy esimerkiksi
lujuusopin probleemeihin liittyvä traktion eli jännitysvektorin
jatkuvuusehto, jota voidaan hyödyntää, jos virtuaalisen työn peri-
aate (eräs heikko muoto) halutaan johtaa edellä suositellulla taval-
la.

KIITOKSET

Kiitän tekn.yo. Jouni Freundia ja tekn.lis. Satu Räsästä artik-
kelin aiheeseen liittyvistä keskusteluista sekä käsikirjoituksen
sisältöä koskevista arvokkaista huomautuksista. Kiitän edelleen
artikkelin tarkastajaa eräisiin muutoksiin johtaneista huomautuksista.

KIRJALLISUUTTA

- [1] Hughes, T.J.R., and Brooks, A., A Theoretical Framework for
Petrov-Galerkin Methods with Discontinuous Weighting Functions:

Application to the Streamline-Upwind Procedure. Chapter 3 of Finite Elements in Fluids - Volume 4 (eds. Gallagher, R.H., Norrie, D.H., Oden, J.T., and Zienkiewicz, O.C.), Wiley 1982, s. 47...65.

- [2] Hughes, T.J.R., Recent Progress in the Development and Understanding of SUPG Methods with Special Reference to the Compressible Euler and Navier-Stokes Equations. Int. J. Numer. Methods in Fluids. Vol. 7 (1987), s. 1261...1275.

Eero-Matti Salonen, apulaisprofessori, Teknillinen korkeakoulu, Mekaniikan laboratorio