

YKSIASKELMENETELMIEN TARKKUUS JA STABIILIUUS RAKENTEIDEN
TRANSIENTTIANALYYSISSA

Jarmo Niemi

Rakenteiden Mekaniikka, Vol. 20
No 1 1987, s. 23...46

TIIVISTELMÄ: Artikkelissa tutkitaan yleisen yksiaskelmenetelmäperheen parametrien suhdetta menetelmän ominaisuuksiin rakenteiden transienttiansalyysissa. Tarkastelu rajoittuu lineaarisiin, symmetrisiin ja vaimentamattomiin systeemeihin. Tarkasteltavia ominaisuuksia ovat stabiilius, suppenevuus, tarkkuus ja yliampuminen. Parametreille johdetaan ehdot, jotka niiden on täytettävä, jotta menetelmä olisi toista astetta, ehdoitta stabiili, ylimpiä ominaismuotoja vaimentava ja tarkasti alimpia ominaismuotoja integroiva. Näiden kriteerien suhteen arvioidaan menetelmäperheeseen kuuluvia tunnettuja menetelmiä, kuten kollokaatio- ja α -menetelmiä, sekä eräitä uusia menetelmäperheen jäseniä. Vertailun perusteella optimaalisia menetelmiä ovat α -menetelmiin kuuluvat sekä esitetyt uudet menetelmät. Wilsonin θ ja Newmarkin menetelmät eivät sensijaan osoittaudu suositeltaviksi.

JOHDANTO

Tämä työ on suoraa jatkoa artikkelille /1/ jossa esitettiin painotettujen jäännösten menetelmään ja ns. Newmarkin approksimaatioon perustuva yksiaskelmenetelmäperhe rakenteiden transienttiansalyysiin. Esitetty menetelmä yhdistää artikkelisarjassa /2,3,4,5/ esitetyt SSpj ja beta-m menetelmät, joista ensimmäinen on painotettujen jäännösten menetelmän yleistys aikaintegroinnissa sovellettuna yksiaskelproseduuriksi ja jälkimmäinen Newmarkin menetelmän yleistys.

Tässä työssä tutkitaan SS5 menetelmäperheen parametrien vaikutusta menetelmän tarkkuuteen, stabiiliuuteen ja yliampumiseen (engl. overshoot) systeemin pisimmän ominaisvärähdyksajan merkittävästi ylittävillä aika-askeleilla. Tarkastelu rajoittuu lineaarisiin symmetrisiin systeemeihin ja se seuraa lähteissä /6/ ja /7/ käytettyä metodologiaa.

Rakenteen lineaariseen liikeyhtälöön

$$\bar{M} \ddot{\bar{q}} + \bar{C} \dot{\bar{q}} + \bar{K} \bar{q} = \bar{f}(t) \quad (1)$$

sovellettuna SS5 menetelmäperhe johdettiin lähteessä /1/. Hieman toisin merkinnöin tärkeimmät tulokset ovat:

Algoritmi

Parametrit α_i , $i=1\dots 5$, β , γ ,

$$\bar{D} (\bar{a}_1 - \bar{a}_0) = (\bar{M} + \alpha_1 \Delta t \bar{C} + \frac{1}{2} \alpha_2 \Delta t^2 \bar{K}) \bar{a}_0 + (\bar{C} + \alpha_1 \Delta t \bar{K}) \bar{v}_0 + \bar{K} \bar{u}_0 - \bar{p}, \quad (2a)$$

$$\bar{D} = \alpha_3 \bar{M} + \alpha_4 \Delta t \bar{C} + \alpha_5 \Delta t^2 \bar{K}, \quad (2b)$$

$$\bar{v}_1 = \bar{v}_0 + \Delta t [(1 - \gamma) \bar{a}_0 + \gamma \bar{a}_1], \quad (2c)$$

$$\bar{u}_1 = \bar{u}_0 + \Delta t \bar{v}_0 + \Delta t^2 [(\frac{1}{2} - \beta) \bar{a}_0 + \beta \bar{a}_1], \quad (2d)$$

$$\bar{p} = (1 - \alpha_1) \bar{f}_0 + \alpha_1 \bar{f}_1, \quad (2e)$$

jossa $\bar{a} \approx \ddot{\bar{q}}$, $\bar{v} \approx \dot{\bar{q}}$, $\bar{u} \approx \bar{q}$, $\Delta t = t_{i+1} - t_i$ ja liiketilavektoreiden alaindeksi 0, 1 viittaa vastaavasti integrointiaskeleen alku- ja loppupäähän. Kuormitus on interpoloitu aika-askeleen alueessa lineaarisesti reuna-arvoistaan. Taulukossa 1 on esitetty muutamia tunnettuja menetelmiä, jotka sisältyvät SS5 menetelmäperheeseen.

Lähempi tarkastelu osoittaa, että Rayleighin vaimennuksen, $\bar{C} = a\bar{M} + b\bar{K}$, tapauksessa yhtälön (1) ominaismuotoihin jako OJ ja aikadiskretisointi AD kommunikoivat kuvan 1 mukaisesti. Täten integrointimenetelmän analyysi voidaan keskittää yhden vapausasteen yhtälöön

$$\ddot{\phi} + 2\xi\omega\dot{\phi} + \omega^2\phi = \psi(t), \quad (3)$$

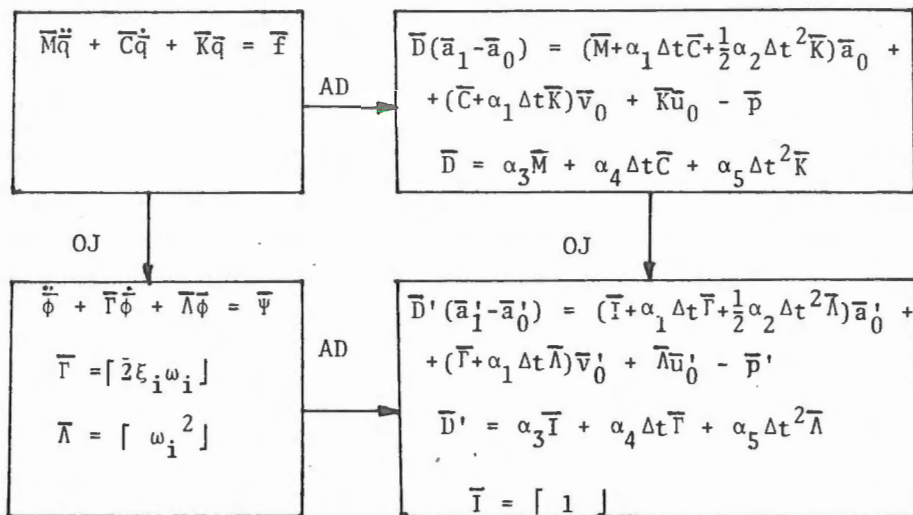
Esitetään yhtälön (3) aikadiskretisointi tavanomaisessa muodossa

$$\bar{x}_{i+1} = \bar{A}\bar{x}_i + \bar{L}_i, \quad (4)$$

Taulukko 1. SS5 perheen vastaavuudet muihin menetelmiin.

Menetelmä ja parametrit	Vastaavan SS5 menetelmän parametrien arvot
SS32 /2/ $\theta_1 \theta_2 \theta_3$	$\beta = \frac{1}{6} \quad \gamma = \frac{1}{2}$ $\alpha_1 = \theta_1 \quad \alpha_2 = \theta_2 \quad \alpha_3 = -\theta_1 \quad \alpha_4 = -\frac{1}{2}\theta_2$ $\alpha_5 = -\frac{1}{6}\theta_3$
Kollokaatio- menetelmät /6/ $\beta_k \gamma_k \theta_k$ Wilsonin θ menetelmä $\beta_k = \frac{1}{6} \quad \gamma_k = \frac{1}{2} \quad \theta_k = \theta_w$ Trapetsisääntö $\beta_k = \frac{1}{4} \quad \gamma_k = \frac{1}{2} \quad \theta_k = 1$ (beta-2 menetelmä /3/) Newmarkin menetelmä $\beta_k = \beta_N \quad \gamma_k = \gamma_N$ $\theta_k = 1$	$\beta = \beta_k \quad \gamma = \gamma_k \quad \alpha_1 = \theta_k \quad \alpha_2 = \theta_k^2 \quad \alpha_3 = -\theta_k$ $\alpha_4 = -\gamma\theta_k^2 \quad \alpha_5 = -\beta\theta_k^3$ $\beta = \frac{1}{6} \quad \gamma = \frac{1}{2} \quad \alpha_1 = \theta_w \quad \alpha_2 = \theta_w^2 \quad \alpha_3 = -\theta_w$ $\alpha_4 = -\gamma\theta_w^2 \quad \alpha_5 = -\beta\theta_w^3$ $\beta = \frac{1}{4} \quad \gamma = \frac{1}{2} \quad \alpha_1 = 1 \quad \alpha_2 = 1 \quad \alpha_3 = -1$ $\alpha_4 = -\frac{1}{2} \quad \alpha_5 = -\frac{1}{4}$ $\beta = \beta_N \quad \gamma = \gamma_N \quad \alpha_1 = 1 \quad \alpha_2 = 1 \quad \alpha_3 = -1$ $\alpha_4 = -\gamma_N \quad \alpha_5 = -\beta_N$
α - menetelmät /6/ $\beta_m \gamma_m \alpha_m$	$\beta = \beta_m \quad \gamma = \gamma_m \quad \alpha_1 = 1 + \alpha_m \quad \alpha_2 = \alpha_1$ $\alpha_3 = -1 \quad \alpha_4 = -(1 + \alpha_m)\gamma_m \quad \alpha_5 = -(1 + \alpha_m)\beta_m$

Huomautus: SS5 menetelmäperhe antaa taulukon mukaisilla parametrin sovituksilla α -menetelmää vastaavan menetelmän vain, kun vaimennus $\bar{c} = \bar{0}$. Lähteessä /6/ on kuitenkin osoitettu, että α -menetelmä on lokaalin diskretointivirheen suhteen toista astetta ainoastaan tässä tapauksessa. Sen sijaan taulukon 1 mukainen SS5 perheestä saatava modifioitu α -menetelmä on toista astetta myös vaimennetuille systeemeille kuten jäljempänä ilmenee.



Kuva 1. Operaattoreiden OJ ja AD kommutointi. Matriisit \bar{I} , $\bar{\Gamma}$ ja $\bar{\Lambda}$ ovat diagonaalimatriiseja.

jossa $x_i = (u_i \Delta t v_i \Delta t^2 a_i)^T$, jossa $u \approx \dot{\phi}$, $v \approx \ddot{\phi}$ ja $a \approx \ddot{\phi}$ ja vektori \bar{L}_i on riippuvainen ulkoisesta kuormituksesta $\psi(t)$. Tarkastellaan homogeenista tapausta $\psi(t)=0$; $\bar{L}_i = \bar{0}$. Eri yksiaskelmenetelmiä voidaan nyt tutkia tarkastelemalla niiden vahvistusmatriiseja (engl. amplification matrix) \bar{A} . SS5 menetelmille matriisi \bar{A} on

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 + \beta \frac{\Omega^2}{D} & 1 + \beta \frac{\psi_2}{D} & \frac{1}{2} + \beta \frac{\psi_1}{D} \\ \gamma \frac{\Omega^2}{D} & 1 + \gamma \frac{\psi_2}{D} & 1 + \gamma \frac{\psi_1}{D} \\ \frac{\Omega^2}{D} & \frac{\psi_2}{D} & 1 + \frac{\psi_1}{D} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

jossa on käytetty merkintöjä

$$\tau = \Delta t \omega ,$$

$$D = \alpha_3 + 2\alpha_4 \xi \Omega + \alpha_5 \Omega^2 ,$$

$$E_1 = 1 + 2\alpha_1 \xi \Omega + \frac{1}{2} \alpha_2 \Omega^2 ,$$

$$E_2 = 2\xi \Omega + \alpha_1 \Omega^2 .$$

Nopeudet ja kiihtyvyydet voidaan eliminoida yhtälöstä (4) soveltamalla sitä toistuvasti peräkkäisille aika-askeleille. Tällöin saadaan ekvivalentti moniaskelmenetelmä (homogeeniselle yhtälölle, $\bar{L} = \bar{0}$)

$$u_{i+1} - A_1 u_i + A_2 u_{i-1} - A_3 u_{i-2} = 0, \quad (6)$$

jossa kertoimet A_1 , A_2 ja A_3 ovat matriisin \bar{A} invariantit

$$A_1 = \text{trace } (\bar{A}),$$

$$A_2 = \text{matriisin } \bar{A} \text{ pääalideterminanttien summa}$$

$$A_3 = \det (\bar{A}).$$

Niille saadaan lausekkeet

$$A_1 = 2 + \left(\gamma - \frac{1}{2}\right) \frac{\Omega^2}{D} + \frac{\psi_2}{D} + A_3,$$

$$A_2 = 1 + \left(\gamma - \frac{3}{2}\right) \frac{\Omega^2}{D} + \frac{\psi_2}{D} + 2A_3,$$

$$A_3 = 1 + \left(\beta - \gamma + \frac{1}{2}\right) \frac{\Omega^2}{D} + \frac{\psi_1}{D} + (\gamma - 1) \frac{\psi_2}{D} .$$

KONSISTENSSI

Määritelmän mukaisesti (ks. /7/) menetelmän lokaali diskreetointi-
virhe

$$\sigma = [\phi(t+\Delta t) - A_1\phi(t) + A_2\phi(t-\Delta t) - A_3\phi(t-2\Delta t)]/\Delta t^2. \quad (7)$$

Kehittämällä ϕ t:n suhteen Taylorin sarjaksi saadaan

$$\sigma = \sum_{i=0}^m T_i \Delta t^{i-2} \phi^{(i)}(t) + O(\Delta t^{m-1}) \quad (8)$$

jossa

$$T_0 = 1 - A_1 + A_2 - A_3 ,$$

$$T_i = [1 + (-1)^i A_2 - (-2)^i A_3]/i , \quad i > 0.$$

Menetelmä (6) on konsistentti astetta k jos $\sigma \rightarrow O(\Delta t^k)$ kun $\Delta t \rightarrow 0$ ja $k > 0$. Menetelmän konsistenssi takaa siis diskretisoinnin lokaalisen, asympotoottisen lähestymisen kohti oikeaa ratkaisua kun aika-askelta rajatta pienennetään. Dahlquist on osoittanut lähteessä /9/, että lineaarinen moniaskelmanetelmä, kuten (6) joka on ehdoitta stabiili ei voi asteeltaan ylittää kahta. Tarkastellaan vähintään toista astetta olevia menetelmiä ja asetetaan $m = 3$ yhtälössä (8). Virheelle σ saadaan lauseke

$$\sigma = (\Omega^{-2}T_0 - T_2 + 2\xi\Omega T_3)\omega^2 u + (\Omega^{-1}T_1 - 2\xi T_2 + (4\xi^2 - 1)T_3)\omega u + O(\Delta t^2). \quad (9)$$

Sijoittamalla T_i :n, $i = 1 \dots 3$ lausekkeet yhtälöön (9) saadaan ehto, joka parametrien on toteutettava, jotta menetelmä olisi toista astetta:

$$\gamma + \alpha_1 + \alpha_3 = \frac{1}{2}. \quad (10)$$

Kollokaatiomenetelmillä ehto (10) saadaan taulukon 1 sijoitusten avulla lähteissä /6/ ja /7/ esitettyyn muotoon $\gamma = \frac{1}{2}$. Taulukon 1 mukaisille modifioiduille α -menetelmille ehto on $\gamma + \alpha_m = \frac{1}{2}$.

STABIILIUS JA SUPPENEUVUUS

Menetelmä (4) on ehdoitta stabiili jos ratkaisu \bar{x} ei kasva rajatta kun $t \rightarrow \infty$ ja $\Omega \in (0, \infty)$. Tunnetusti tämä ehto toteutuu vain jos matriisin \bar{A} spektraalisäde

$$\rho = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|\} \leq 1 \quad (11)$$

ja yhtäsuuruuden tapauksessa maksimi on yksikäsitteinen.

Edellä λ_1, λ_2 ja λ_3 ovat matriisin \bar{A} ominaisarvot, jotka saadaan karakteristisen yhtälön

$$\lambda^3 - A_1\lambda^2 + A_2\lambda - A_3 = 0 \quad (12)$$

ratkaisuuina. Jos yhtälössä (11) yhtäsuuruutta ei sallita, on menetelmä asympotoottisesti stabiili ja ratkaisu $\bar{x} \rightarrow 0$, kun $t \rightarrow \infty$. Jos ehto (11) on voimassa vain kun $\Omega < \Omega_c$, jossa Ω_c on stabiiliusraja, on menetelmä ehdollisesti stabiili.

Tutkitaan menetelmän parametrien suhdetta stabiiliuuteen. A :n ominaisarvot ovat yleensä kompleksisia, joten stabiiliusehto (11) edellyttää ominaisarvojen sijaitsevan yksikköympyrässä. Muunnos

$$\lambda = (1+z)/(1-z) \quad (13)$$

kuvaa kompleksitason yksikköympyrän kompleksitason vasemmalle puoliskolle ja stabiiliusehto saadaan muotoon $\text{Re}(z) \leq 0$. Karakteristinen yhtälö (12) muuttuu muotoon

$$\frac{1}{(1-z)^3} [(1 + A_1 + A_2 + A_3)z^3 + (3 + A_1 - A_2 - 3A_3)z^2 + (3 - A_1 - A_2 + 3A_3)z + (1 - A_1 + A_2 - A_3)] = 0 \quad (14)$$

Koska nimittäjän nollakohta $z = 1$ ei sijaitse kompleksitason vasemmalla puolitasolla, riittää kun tarkastellaan yhtälön (14) vasemman puolen osoittajaa. Hurwitzin kriteerin mukaan osoittajalla on juuret, joilla on negatiivinen reaaliosa vain jos ehdot

$$1 - A_1 + A_2 - A_3 > 0, \quad (15a)$$

$$1 + A_1 + A_2 + A_3 > 0, \quad (15b)$$

$$3 + A_1 - A_2 - 3A_3 > 0, \quad (15c)$$

$$3 - A_1 - A_2 + 3A_3 > 0, \quad (15d)$$

$$1 - A_2 + A_1A_3 - A_3^2 > 0 \quad (15e)$$

toteutuvat. Vaimentamattomassa tapauksessa, $\xi=0$, stabiiliusehdot (15) toteutuvat kaikille $\Omega \in (0, \infty)$ (ehdoitta stabiilius), jos parametreille on voimassa epäyhtälöt

$$4\alpha_5 + 2\beta - \gamma + \alpha_2 + 2\gamma\alpha_1 - \alpha_1 \leq 0, \quad (16a)$$

$$4\gamma - 4\beta - 1 - 2\alpha_2 - 4\gamma\alpha_1 + 4\alpha_1 \leq 0, \quad (16b)$$

$$\alpha_5 + \alpha_2 \left(\frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{2}\alpha_1 - \frac{1}{4} \right) + \alpha_1^2 (\gamma - 1) + \alpha_1 (\gamma^2 - \frac{5}{2}\gamma + 1 + \beta) + \gamma\beta - \gamma^2 + \gamma - \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{4} \geq 0. \quad (16c)$$

Jos yhtälöihin (16) sijoitetaan taulukon 1 mukaisesti kollokaatiomenetelmää vastaavat parametrien arvot, saadaan lähteessä /7/ esitetty stabiiliusehto ($\gamma = \frac{1}{2}$)

$$\frac{2\theta_k^2 - 1}{4(2\theta_k^3 - 1)} \leq \beta_k \leq \frac{\theta_k}{2(\theta_k + 1)}. \quad (17)$$

Jos edelleen asetetaan Wilsonin θ menetelmää vastaavasti $\beta_k = \frac{1}{6}$, saadaan ehto $8\theta_w^3 - 12\theta_w^2 + 2 \geq 0$, josta saadaan ratkaistua tunnettu ehdoitta stabiiliuden kriteeri Wilsonin θ menetelmälle: $\theta_w > 1,3660$. α -menetelmille stabiiliusehdot saadaan muotoon $0 \geq \alpha_m \geq -\frac{1}{2}$, $\beta_m \geq \frac{1}{4} - \frac{\alpha}{2}$.

Menetelmän globaali diskreetointivirhe.

$$\delta(t) = \phi(t) - u(t). \quad (18)$$

Menetelmän sanotaan olevan suppeneva astetta k , jos kiinteälle ajan hetkelle $t \delta \rightarrow O(\Delta t^k)$, kun $\Delta t \rightarrow 0$ ja $k > 0$. Suppenevuus on siis olennaisen tärkeä aikadiskretisoinnin ominaisuus; se takaa diskreetin ratkaisun globaalin, asymptoottisen lähestymisen kohti tarkkaa ratkaisua aika-askelta rajatta pidennettäessä. Edellisessä kohdassa määritelty konsistenssi takasi lähestymisen ainoastaan lokaalisesti. Lähteessä /8/ on osoitettu, että menetelmän konsistensista ja stabiiliudesta seuraa suppenevuus. Suppenevuuden asteluku on tällöin sama kuin konsistenssin asteluku.

TARKKUUS JA NUMEERINEN VAIMENNUS

Yhtälöiden (6) ja (12) perusteella diskreetti ratkaisu voidaan esittää muodossa

$$u_n = \sum_{i=1}^3 c_i \lambda_i^n, \quad (19)$$

jos ominaisarvot ovat erilliset. Kertoimien c_i , $i = 1 \dots 3$, arvo määräytyy alkuarvojen perusteella. Yhtälön (19) perusteella voidaan päätellä, että menetelmän asymptoottinen käyttäytyminen kun $t \rightarrow \infty$, riippuu spektraalisäteestä ρ ; mitä pienempi ρ sitä nopeammin ratkaisu lähestyy nollaa.

Rakenteiden dynamiikassa diskreettiin n vapausasteiseen liikeyhtälöön (1) päädytään, kun jatkuvan rakenteen liiketilaa approksimoidaan n -ulotteisessa funktioavaruudessa. Useimmiten tämä tehdään käyttämällä elementtimenetelmää, jolloin kantafunktiot ovat paloittain jatkuvasti derivoituvia polynomeja. Ainoastaan alimmat ominais-
taajuudet ja -muodot vastaavat tällöin kohtuullisen tarkasti jatkuvan rakenteen ominaispareja. Aikaintegroinnissa pyritään integroimaan mahdollisimman tarkasti vain alimpien ominaismuotojen osuus vasteesta ja ylimpien, virheellisten ominaismuotojen osuus vasteesta pyritään numeerisesti vaimentamaan mahdollisimman tehokkaasti. Spektraalisäde kuvaa tämän numeerisen vaimennuksen tehokkuutta.

Tutkitaan toista astetta olevia, ehdoitta stabiileja menetelmiä, kun Δt , ja siten Ω , lähestyy nollaa tai ääretöntä. Yksinkertaisuus-

den vuoksi rajoitutaan vaimentamattomaan tapaukseen, $\xi = 0$. Kun $\Omega \rightarrow 0$ jätetään invaranttien A_i lausekkeista Ω :n suhteen toisen asteen termit pieninä suureina pois, jolloin saadaan

$$A_1 = 3 + 1/\alpha_3, \quad A_2 = 3 + 2/\alpha_3, \quad A_3 = 1 + 1/\alpha_3.$$

Huomataan, että parametri α_3 määrittää menetelmän asympotoottisen käyttäytymisen aika-askelta rajatta pienennettäessä. Sijoittamalla yllä olevat lausekkeet karakteristiseen yhtälöön (12) nähdään, että $\lambda_{1,2} \rightarrow 1$ ja $\lambda_3 \rightarrow 0$ kun $\alpha_3 \rightarrow -1$. Menetelmä lähestyy tällöin aika-askelta pienennettäessä trapetsisääntöä, jolla on lähteessä /9/ todistettu olevan pienin lokaali virhe ehdoitta stabiilien moniaskelmenetelmien joukossa. Koska pienillä aika-askeleen arvoilla menetelmän tarkkuus on oleellinen kriteeri, tarkastellaan jatkossa vain menetelmiä, joille $\alpha_3 = -1$. Tällöin ehto (10), joka määritteli menetelmän olevan toista astetta sen toteutuessa, saadaan muotoon

$$\gamma = \frac{3}{2} - \alpha_1. \quad (20)$$

Ehdoitta stabiiliuden ehdot (16) muuttuvat muotoon

$$4\alpha_5 + 2\beta + \alpha_2 + 3\alpha_1 - 2\alpha_1^2 - \frac{3}{2} \leq 0, \quad (21a)$$

$$\alpha_5 + \frac{1}{2}\alpha_2 + \beta + \frac{3}{2}\alpha_1 - \alpha_1^2 - 1 \geq 0. \quad (21b)$$

Kun $\Omega \rightarrow \infty$, ovat invarianttien A_i lausekkeissa merkitseviä vain Ω :n toista astetta olevat termit ja saadaan

$$A_1 = 2 + A_3 + 1/\alpha_5, \quad A_2 = 1 + 2A_3 \quad \text{ja} \quad A_3 = 1 + (P-1)/\alpha_5,$$

jossa

$$P = \beta + \frac{1}{2}\alpha_2 + \frac{3}{2}\alpha_1 - \alpha_1^2.$$

Stabiiliusehdoiksi (21) saadaan yllä olevin merkinnöin $\alpha_5 \leq -\frac{1}{4}$, $1 - P \leq \alpha_5 \leq \frac{3}{8} - \frac{1}{2}P$. Taulukossa 2 on esitetty spektraalisäteiden minimiarvo ρ_{\min} ja sitä vastaava P :n arvo P_{\min} parametrin α_5

funktiona. Spektraalisäteelle saadaan pienin arvo kun $\alpha_5 \approx 0,3$. Kun α_5 lähestyy stabiiliusrajaa $-0,25$ tai miinus ääretöntä, kasvaa spektraalisäde kohti ykköstä ja menetelmä ei vaimenna numeerisesti ylimpien ominaismuotojen osuutta vasteesta.

Taulukko 2. Spektraalisäteen minimiarvo ρ_{\min} ja sitä vastaava P:n arvo P_{\min} parametrin α_5 funktiona.

α_5	ρ_{\min}	P_{\min}
-0,25000	1,00000	1,25000
-0,26000	0,91971	1,26960
-0,27000	0,83734	1,28839
-0,28000	0,74891	1,30633
-0,29000	0,64241	1,32331
-0,30000	0,50622	1,33891
-0,31000	0,52242	1,35420
-0,35000	0,57986	1,41824
-0,50000	0,71667	1,68405
-0,75000	0,81853	2,16130
-1,00000	0,86676	2,65117

Suppeneville menetelmille on olemassa positiivinen vakio $\hat{\omega}$ siten, että kun $\omega \in (0, \hat{\omega})$ niin matriisilla \bar{A} on kompleksikonjugaatti ominaisarvopari $\lambda_{1,2}$ ja reaalin ominaisarvo λ_3 , jotka toteuttavat epäyhtälön $\lambda_3 < \lambda_{1,2} \leq 1 / 7$. Ratkaisu (19) voidaan tällöin kirjoittaa muotoon

$$u_n = e^{-\hat{\omega}t_n} (c_1 \cos \omega t_n + c_2 \sin \omega t_n) + c_3 \lambda_3^n, \quad (22)$$

missä

$$\lambda_{1,2} = A \pm Bi ,$$

$$\bar{\omega} = \bar{\Omega} / \Delta t ,$$

$$\bar{\xi} = -\ln(A^2+B^2)/(2\bar{\Omega}) ,$$

$$\bar{\Omega} = \arctan(B/A) .$$

Pienillä aika-askelen arvoilla diskreetin ratkaisun voidaan katsoa vastaavan tarkkaa ratkaisua systeemille, jolla on hieman suurempi vaimennus ja jäykkyys kuin alkuperäisellä systeemillä. Numeerinen vaimennussuhde $\bar{\xi}$ ja suhteellinen jakson ajan virhe $(\bar{T}-T)/T$, jossa $\bar{T} = 2\pi/\bar{\omega}$ ja $T = 2\pi/\omega$, ovat yleisimmin käytetyt suureet menetelmän tarkkuuden kuvaamiseen pienillä aika-askelen arvoilla ($\Omega < \bar{\Omega}$), jolloin tarkkuus on oleellinen.

YLIAMPUMINEN

Yleensä usean vapausasteen systeemeissä aika-askel valitaan siten, että korkeimmilla taajuuksilla suhde $\Delta t/T$ on huomattavasti suurempi kuin yksi. Edellisessä kohdassa todettiin spektraalisäteen määrittävän ratkaisun käyttäytymisen suurilla aika-askelen arvoilla. Spektraalisäteen ollessa pienempi kuin yksi ratkaisu lähestyy nollaa kun $t \rightarrow \infty$. Wilsonin θ menetelmän yhteydessä on kuitenkin huomattu ensimmäisten aika-askelten aikana huomattavaa yliampumista, eli värähtelyn amplitudi on monisatakertainen tarkkaan arvoon verrattuna. Menetelmän yliampumisella tarkoitetaan tässä juuri tätä amplitudin menetelmästä johtuvaa vahvistumista tarkkaa arvoa suuremmaksi /7/. Tällöin ensimmäisten aika-askelten aikana ylimpien ominaismuotojen osuus vasteesta, joka pyrittiin virheellisenä laskennallisesti kokonaan suodattamaan pois, saattaa olla huomattava ja siten vaikuttaa ratkaisevasti koko laskennan tarkkuuteen. Vaikka yhtälön (19) mukaisesti spektraalisäteen ollessa pienempi kuin yksi tämä virheellinen osuus vasteesta melko nopeasti suodattuu, niin transientti-analyysissä, jossa juuri ensimmäisten aika-askelten osuus on kiin-

nostavin, ei voida käyttää voimakkaasti yliampuvaa menetelmää, kun halutaan kontrolloida virhettä.

Lähteestä /7/ on todettu ehdoitta stabiilien menetelmien yliampumisen selittyvän sillä, että vahvistusmatriisin A normi kuvaa ratkaisun käyttäytymistä ensimmäisten aika-askelten aikana suurilla Δt :n arvoilla. Koska stabiililla matriisilla voi olla mielivaltaisen suuri normi, ei menetelmän stabiilius estä sen yliampumista. Tarkastellaan yliampumista ensimmäisen, merkittävimmän aika-askelen aikana. Yhtälöiden (4) ja (5) perusteella saadaan ratkaisu ensimmäisen aika-askelen jälkeen

$$u_1 = (1 + \beta \frac{\Omega^2}{D} - \frac{\Omega^2}{2} - \beta \frac{\psi_1}{D} \Omega^2) u_0 + (1 + \gamma \frac{\psi_2}{D}) \Delta t v_0, \quad (23a)$$

$$v_1 = (\gamma \frac{\Omega^2}{D} - \Omega^2 - \gamma \frac{\psi_1}{D} \Omega^2) u_0 / \Delta t + (1 + \gamma \frac{\psi_2}{D}) v_0. \quad (23b)$$

Kun $\Omega \rightarrow \infty$ saadaan

$$|u_1| \approx \Omega^2 (1 + \beta \frac{\alpha_2}{\alpha_5}) u_0 / 2 + (1 + \beta \frac{\alpha_1}{\alpha_5}) v_0 \Delta t, \quad (24a)$$

$$|v_1| \approx \Omega [1 + (\frac{3}{2} - \alpha_1) \frac{\alpha_2}{\alpha_5} / 2] u_0. \quad (24b)$$

Menetelmä ei näin ollen ole yliampuva, jos ehdot

$$\beta = - \frac{\alpha_5}{\alpha_2}, \quad (25a)$$

$$\beta = - \frac{\alpha_5}{\alpha_1}, \quad (25b)$$

$$\alpha_5 = \frac{1}{2} (\alpha_1 - \frac{3}{2}) \alpha_2 \quad (25c)$$

ovat voimassa. Ainoa ehdoitta stabiili, toista astetta oleva käsiteltävän menetelmäperheen jäsen, joka ei ole yliampuva on siten trapetsisääntö. Koska trapetsisääntö ei kuitenkaan vaimenna ylimpiä ominaisuusmuotoja, vaan sen spektraalisäde on yksi kaikilla aika-askelen arvoilla, tarkastellaan menetelmiä, jotka eivät ole neliöllisesti yliampuvia. Tällöin on ehdon (25a) ja toisen ehdoista (25b) tai (25c) oltava voimassa. Modifioidut α -menetelmät ovat tätä tyyppiä: ne toteuttavat ehdot (25a) ja (25b). Käytännössä myös näitä lähellä olevat menetelmät, joissa ehdot (25b) ja (25c) toteutuvat molemmat likimääräisesti voivat tulla kysymykseen. Kuvassa 2 on esitetty

muutamien menetelmien antama ratkaisu yhtälölle (3), kun $\xi = 0$, $\psi(t) = 0$ ja $\Delta t/T = 10$. Menetelmien parametrit on annettu taulukossa 3.

Taulukko 3. Vertailtavien SS5 menetelmien parametrit.

nro	α_1	α_2	α_3	α_5	β	γ
1	0,541822	0,542697	-1,000000	-0,260000	0,479089	0,958178
2	0,836052	0,903685	-1,000000	-0,300000	0,331974	0,663948
3	0,588532	0,592451	-1,000000	-0,270000	0,455734	0,911469
4	0,900000	0,900000	-1,000000	-0,272250	0,302500	0,600000
	(α -menetelmä $\alpha = -0,1$)					
5	0,700000	0,700000	-1,000000	-0,295750	0,422500	0,800000
	(α -menetelmä $\alpha = -0,3$)					
6	1,000000	1,000000	-1,000000	-0,250000	0,250000	0,500000
	(trapetsisääntö)					
7	1,420000	2,016400	-1,420000	-0,477215	0,166667	0,500000
	(Wilsonin θ menetelmä $\theta = 1,42$)					
8	1,000000	1,000000	-1,000000	-0,302500	0,302500	0,600000
	(Newmarkin menetelmä $\beta = 0,3025$, $\gamma = 0,6$)					

Koska aika-askel on kymmenkertainen jaksonaikaan nähden, oleellista ei ole tietenkään menetelmän tarkkuus, vaan sen numeerinen vaimennus ja yliampuminen. Kuvissa yliampuminen tapahtuu, kun vasteen logaritmi on positiivinen. Menetelmän numeerisen vaimennuksen tehokkuus näkyy siinä nopeudessa, jossa vasteen logaritmi pienenee. Kuvista 2a) voidaan päätellä, että Wilsonin θ menetelmä (menetelmä numero 7) on ainoa menetelmä, joka on vahvasti yliampuva siirtymävasteen osalta, kun alkuarvoina on annettu siirtymä. Nopeusvaste on tällöin lievästi yliampuva myös menetelmillä 4, 5 ja 8, joskin tässäkin suhteessa Wilsonin θ menetelmä on huonoin. Parhaiten numeerisesti vaimentavia näillä alkuarvoilla ovat menetelmät 2 ja 5.

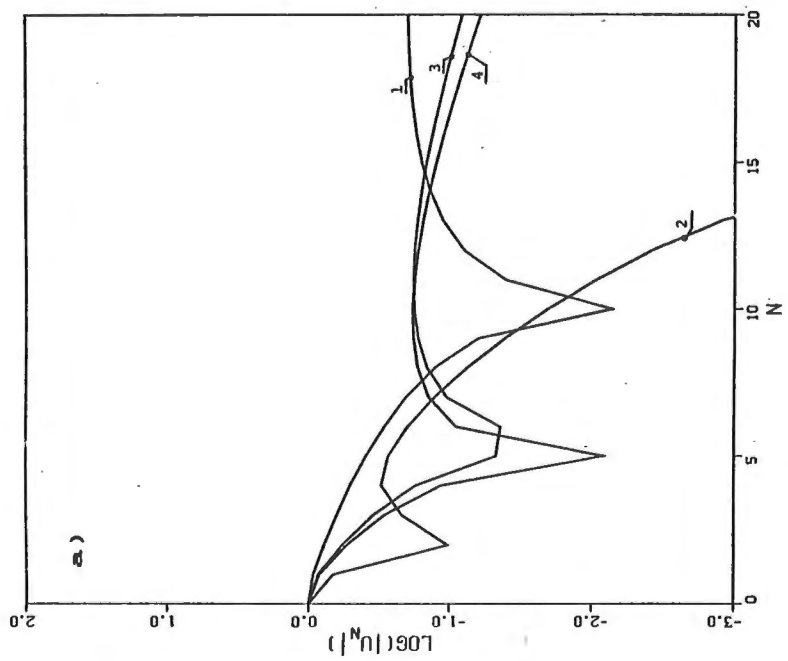
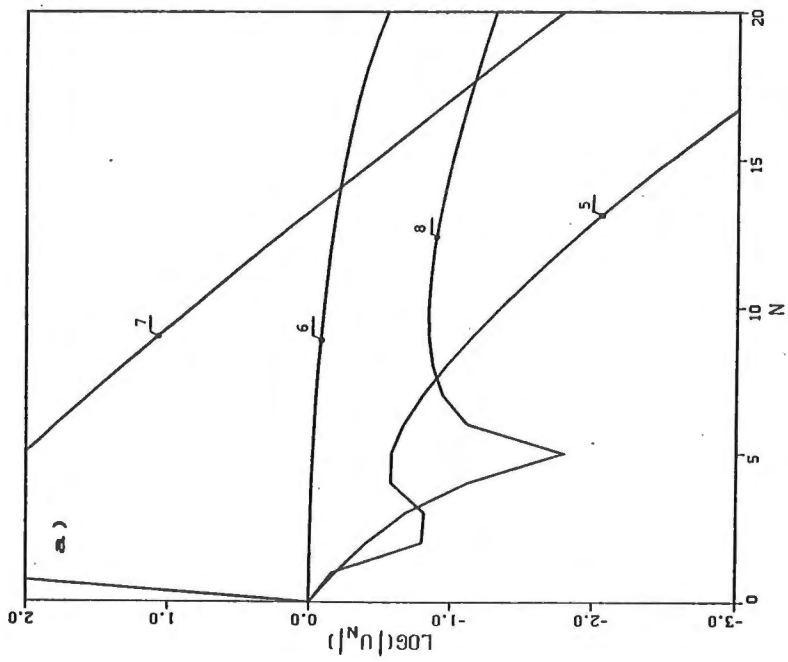
Kun alkuarvona on annettu alkunopeus nähdään kuvista 2b), että Wilsonin θ menetelmä on tässäkin tilanteessa pahiten yliapuva siirtymävasteen suhteen. Lievästi yliapuva on myös menetelmä 2, jota saattoi odottaa, koska menetelmän parametrit eivät täytä ehtoa (25b). Nopeusvasteen osalta mikään menetelmä ei ole yliapuva. Parhaiten numeerisesti vaimentavia ovat jälleen menetelmät 2 ja 5.

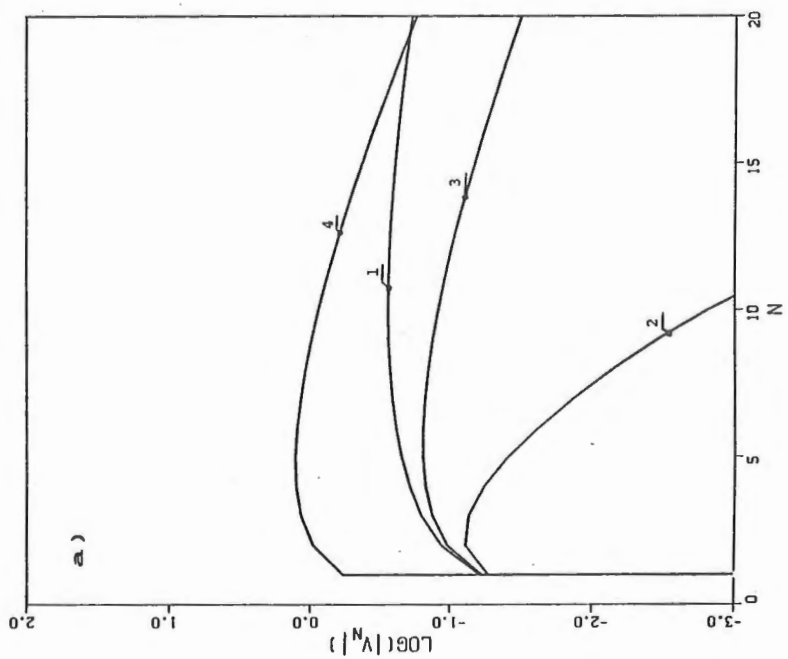
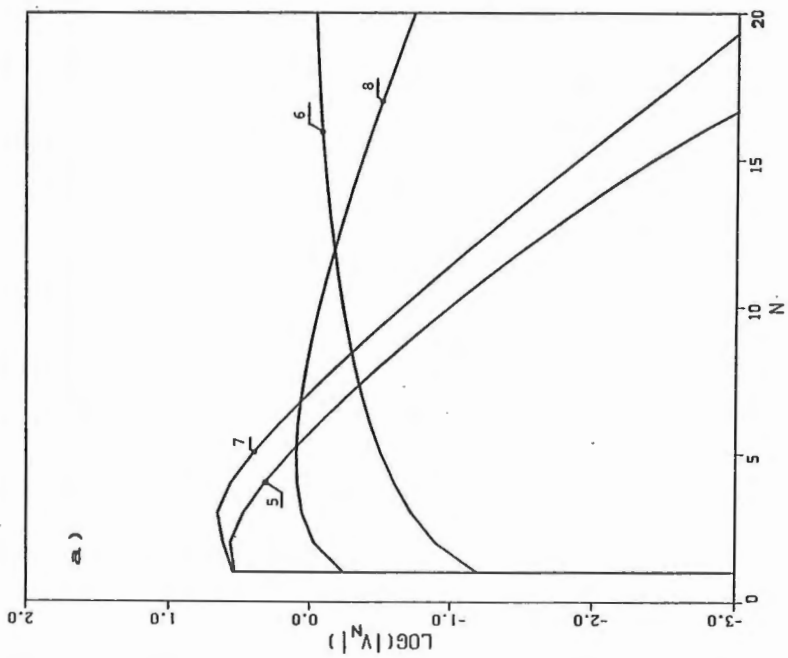
MENETELMÄPERHEEN PARAMETRIEN VALINTA

Valittaessa optimaalista menetelmää liikeyhtälön (1) ratkaisemiseksi käytetään edellä olevan analyysin perusteella seuraavia kriteereitä:

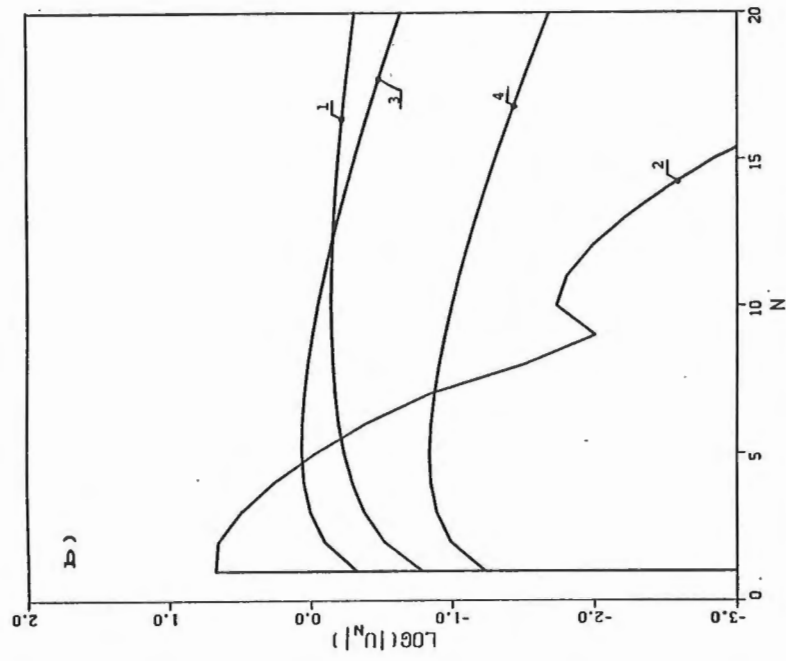
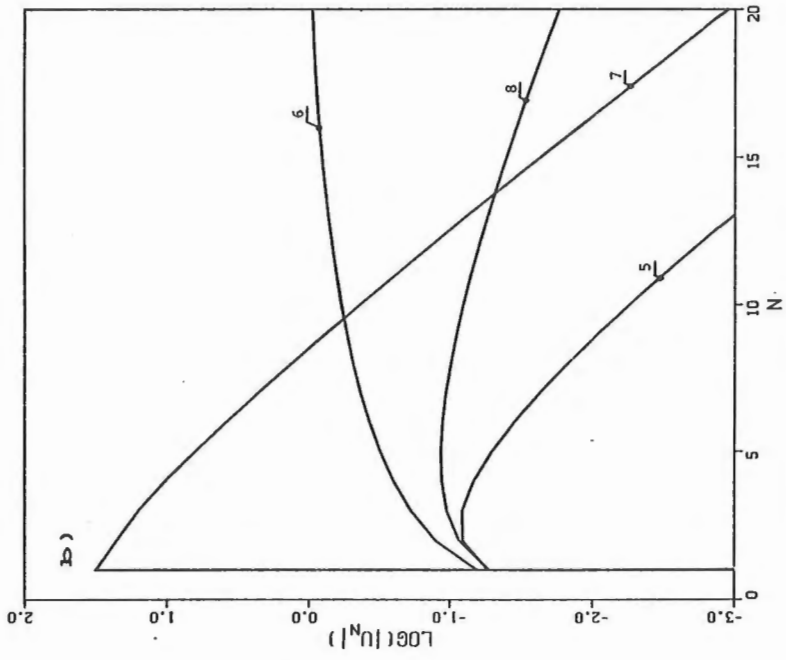
1. Menetelmä on toista astetta.
2. Menetelmä on ehdoitta stabiili.
3. Menetelmä vaimentaa tehokkaasti ylimpien ominaismuotojen osuuden vasteesta.
4. Menetelmällä on pienillä aika-askeleilla mahdollisimman pieni numeerinen vaimennussuhde ξ ja jaksonajan suhteellinen virhe $(\bar{T} - T)/T$.
5. Menetelmä ei ole neliöllisesti yliapuva.

Nämä kriteerit eivät ole toisistaan riippumattomia ja ne ovat osittain ristiriitaisia. On myös huomautettava, että ne ovat tarkoitettut käytettäväksi lähinnä elementtimenetelmällä syntyvien suurien ja ainoastaan alimpien ominaismuotojen osalta tarkkojen systeemien integrointiin: yhden tai muutaman vapausasteen systeemeille ainoastaan kriteeri 4 on relevantti ja integrointiin voidaan käyttää ehdollisesti stabiileja korkea-asteisia menetelmiä. Edellä esitetyn perusteella on käsiteltävän menetelmäperheen parametrien toteutettava seuraavat ehdot, jotta kriteerit toteutuisivat:

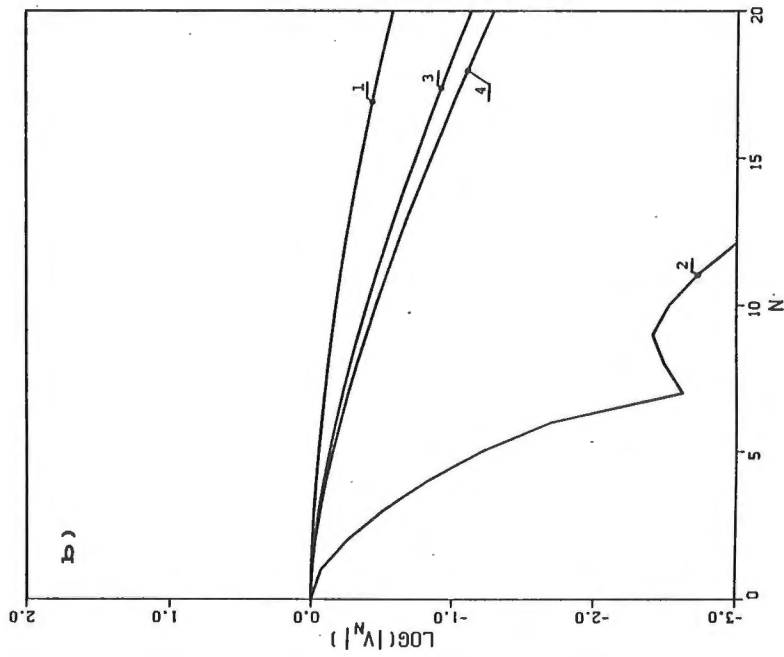
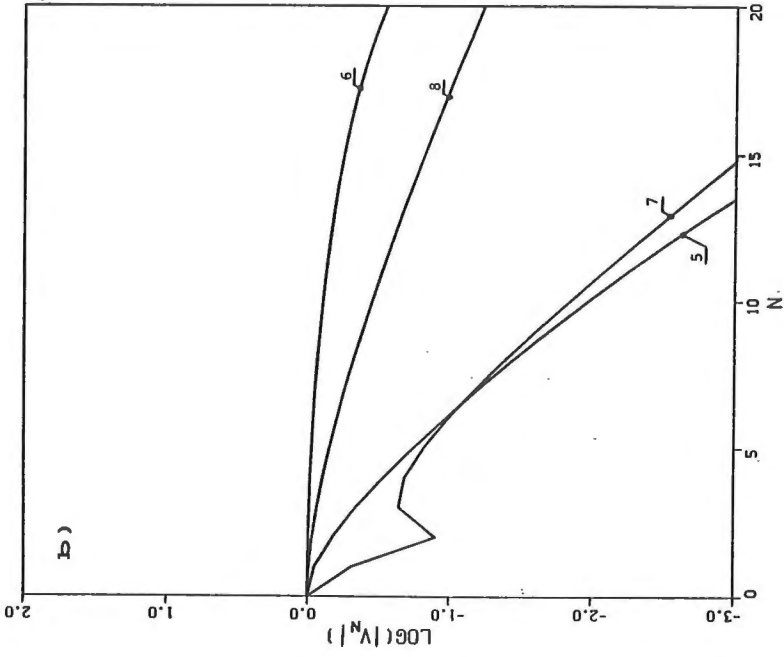




Kuva 2



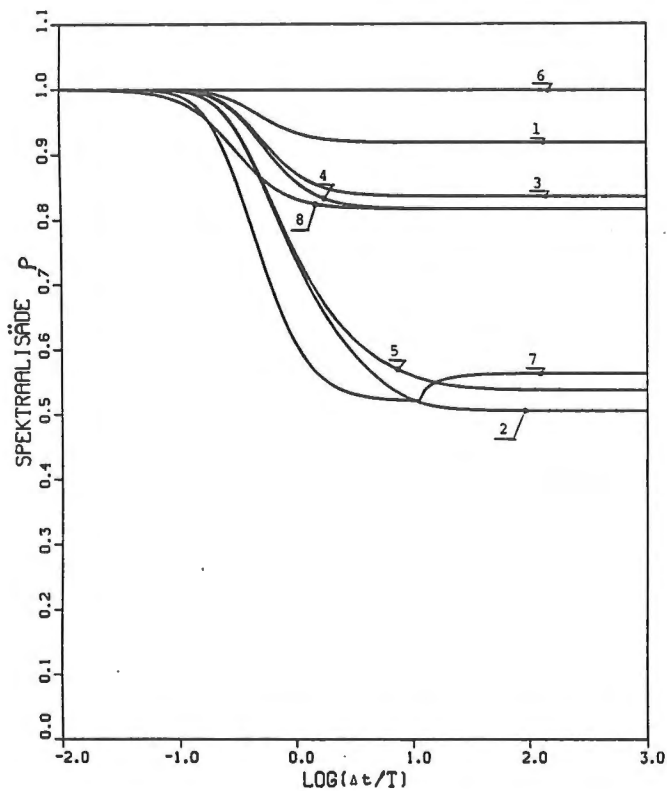
Kuva 2



Kuva 2

1. $\gamma = \frac{3}{2} - \alpha_1$.
2. Ehdot (21).
3. $\alpha_5 \approx -0,30$ ja $P \approx 1,34$.
4. $\alpha_3 = -1$.
5. Ehto (25a) ja toinen ehdoista (25b) tai (25c).

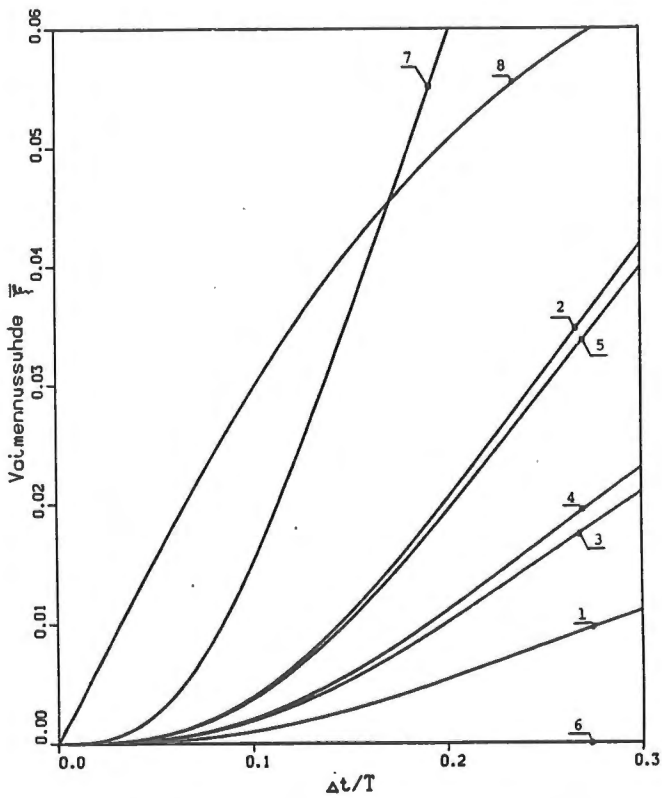
Kuvassa 3 on esitetty spektraalisäde, kuvassa 4 numeerinen vaimennussuhde ja kuvassa 5 suhteellinen jakson ajan virhe muutamalle optimaaliselle menetelmälle ja vertailun vuoksi myös eräille muille tunnetuille menetelmille.



Kuva 3

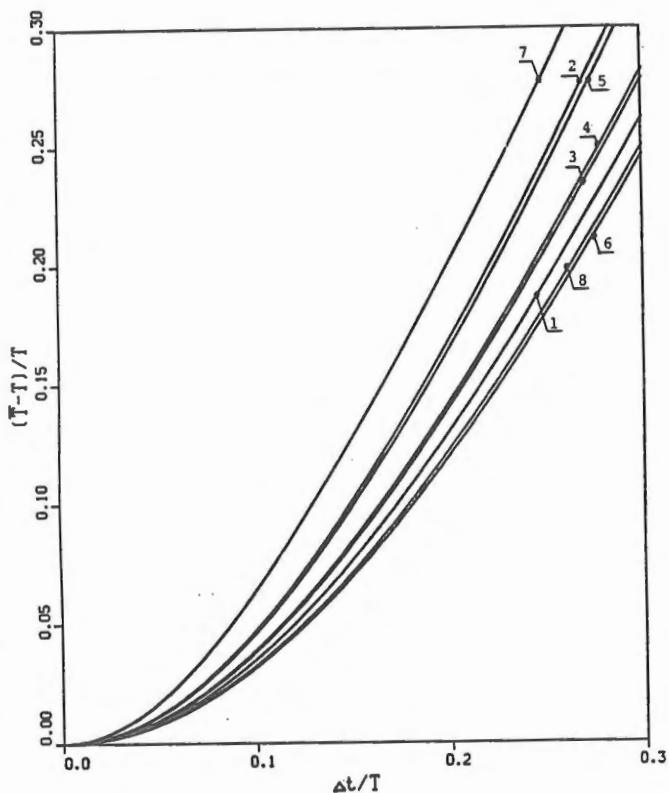
Kuvasta 3 voidaan nähdä jo kuvissa 2 ilmennyt menetelmien 2 ja 5 hyvä numeerinen vaimennus. Trapetsisääntö (menetelmä numero 6) ei ole lainkaan numeerisesti vaimentava, vaan sen spektraalisäde on yksi kaikilla aika-askeleen arvoilla.

Kuvista 4 ja 5 nähdään, että Wilsonin menetelmää ja Newmarkin menetelmää (menetelmä numero 8) lukuunottamatta muut menetelmät ovat kohtuullisen tarkkoja, jos suhde $\Delta t/T$ on pienempi kuin 0,1 jota voidaan pitää kyseisen suhteen ylärajana pyrittäessä tarkkaan integrointiin. Vertailemalla kuvia 3, 4 ja 5 nähdään myös, että menetelmän parempi numeerinen vaimennus saavutetaan tarkkuuden kustannuksella: tarkin menetelmä on trapetsisääntö, joka ei ole lainkaan numeerisesti vaimentava. Taulukon 3 mukaisen Newmarkin



Kuva 4

menetelmän parametrit eivät toteuta ehtoa (10), eikä menetelmä näin ollen ole toista astetta, mikä näkyy myös kuvasta 4.



Kuva 5

YHTEENVETO

Työssä on analysoitu lähteessä /1/ esitetyn menetelmäperheen parametrien suhdetta menetelmän ominaisuuksiin rakenteiden transientianalyysissä. Esitetyn perusteella voidaan vertailla tunnettujen kollokaatio- ja α -menetelmäperheiden ominaisuuksia, sekä näihin kuulumattomia perheen menetelmiä. Ensinnäkin tässä työssä, samoin kuin lähteissä /6/ ja /7/, on käynyt ilmi, ettei Wilsonin θ -menetelmä

monessakaan suhteessa vedä vertoja α -menetelmille tai edes kaikille kollokaatioperheen menetelmille. Onkin katsottava lähinnä perusteet- tomaksi sen edelleenkin suuri suosio rakenteiden dynamiikan yleisenä integrointimenetelmänä. Toiseksi on huomattava, ettei myöskään toinen yleisesti käytetty menetelmä, Newmarkin menetelmä, ole kovin suositeltava, koska se palautuu trapetsisäännöksi niillä parametrien β_N ja γ_N arvoilla $\frac{1}{4}$ ja $\frac{1}{2}$, joilla se on toista astetta ja ehdoitta stabiili, eikä näin ollen vaimenna lainkaan ylimpiä ominaismuotoja. Menetelmäperheestä ovat sen sijaan suositeltavia taulukon 3 viisi ensimmäistä menetelmää, joista menetelmät numero 4 ja 5 ovat tunnet- tuja -menetelmiä ja kolme ensimmäistä uusia menetelmiä.

Tässä työssä on pääosin tutkittu vain vaimentamattomia systeemejä. Tällöin parametrin α_4 arvo ei vaikuta menetelmän ominaisuuksiin. Vaimennetuille systeemeille voidaan parametreille α_4 valita arvo α -menetelmien mukaisesti $\alpha_4 = -\alpha_1\gamma$.

LÄHDELUETTELO

- /1/ Niemi, J., Painotettujen jäännösten näkökulma yksiaskelmenetel- miin. SS5 menetelmäperhe. Rakenteiden Mekaniikka, 18(1985)3, s. 51...60.
- /2/ Zienkiewicz, O.C., Wood, W.L., Hines, N.W., A Unified Set of Single Step Algorithms, Part 1: General Formulation and Appli- cations. IJNME, 20(1984), s. 1529...1552.
- /3/ Wood, W.L., A Unified Set of Single Step Algorithms, Part 2: Theory. IJNME, 20(1984), s. 2303...2309.
- /4/ Katona, M.G., Zienkiewicz, O.C., A Unified Set of Single Step Algorithms, Part 3: The Beta-m Method, A Generalization of The Newmark Scheme. IJNME, 21(1985), s. 1345...1359.
- /5/ Wood, W.L., A Unified Set of Single Step Algorithms, Part 4: Backward Error Analysis Applied to the Dynamic Vibration Equa- tion. IJNME, 23(1986), s. 929...944.
- /6/ Heppler, G.R., Hansen, J.S., Time Integration of the Equations of Motion of a Structural System Including Damping. AIAA Jour- nal, 21(1983)9, s. 1301...1309.

- /7/ Hilber, H.M., Hughes, T.J.R., Collocation, Dissipation and "Overshoot" for Time Integration Schemes in Structural Dynamics. Earthq. Eng. and Struct. Dyn., 6(1978), s. 99...117.
- /8/ Stetter, H.J., Analysis of Discretization Methods for Ordinary Differential Equations. Springer-Verlag. Berlin-Heidelberg-New York. 1977.
- /9/ Dahlquist, G., On Accuracy and Unconditional Stability of Linear Multistep Methods for Second Order Differential Equations. BIT, 18(1978), s. 133...136.

Jarmo Niemi, dipl.ins., Tampereen teknillinen korkeakoulu, Teknillisen mekaniikan laitos