

HYBRIDI- JA SEKAELEMENTTIMENETELMISTÄ

Reijo Kouhia

Rakenteiden Mekaniikka, Vol. 20
No 1 1987, s. 3...22

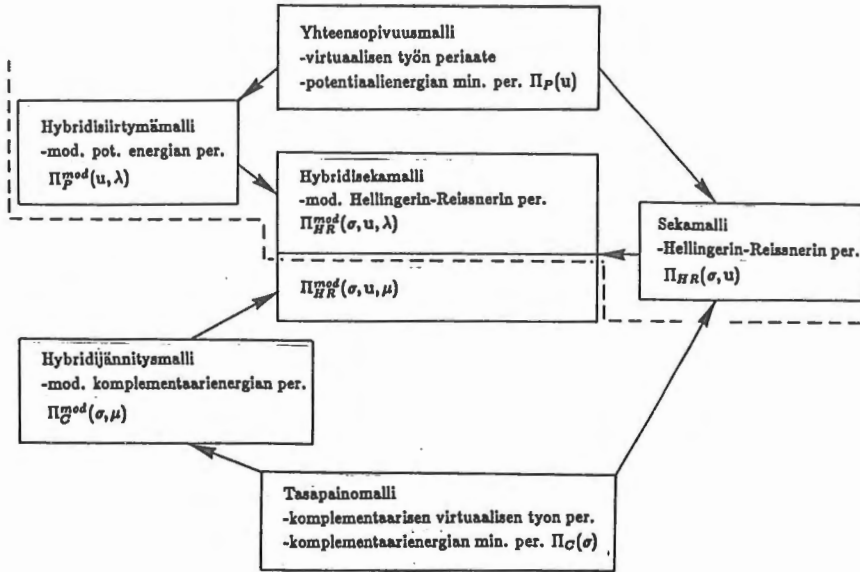
TIIVISTELMÄ: Artikkelissa käsitellään taivutetun palkin probleeman avulla hybridi- ja sekaelementtimenetelmiä. Sekamenetelmien stabiiliusanalyysissä keskeisellä sijalla olevaa Babuška-Brezzi ehtoa on tarkasteltu lyhyesti. Numeerinen suppenemisnopeustesti on suoritettu joillekin esitetyistä menetelmistä. Yksinkertainen a posteriori virhe-estimaatti on johdettu sekaelementille ja tuloksia kyseiseen virhe-estimaattiin perustuvasta adaptiivisesta menettelystä on esitetty.

JOHDANTO

Hybridi- ja sekamenetelmät muodostavat laajan ja monimuotoisen osan elementtimenetelmistä. Niiden täsmällinen määrittely on kuitenkin hankalaa. Professori T.H.H. Pian, joka on suuresti vaikuttanut näiden menetelmien kehittymiseen, on esittänyt seuraavan historiallis-määritelmällisen näkemyksen /1/. Termi hybridimenetelmä on tullut elementtimenetelmiin mukaan kiinteän aineen mekaniikasta määritelläkseen duaaliset menetelmät, joissa otaksutaan yhteensopivat siirtymät (vastavuoroisesti jännitystraktiot) elementtien rajoilla lisäyksenä tasapainoehdot toteuttavaan jännitystilaan (yhteensopivaan siirtymätilaan) elementin alueella. Tälläisten hybridijännitys- ja hybridisiirtymäelementtien formulaatio perustuu vastaavasti modifioidun komplementaarisen muodonmuutosenergian tai modifioidun potentiaalienergian periaatteisiin, joissa elementtien välisiä jännitystraktioiden ja siirtymien yhteensopivuusvaatimuksia on lievennetty ottamalla käyttöön lisätuntemattomia Lagrangen kertojamenettelyllä. Hybridimallin variaatioformulaatiossa otaksutaan riippumattomiksi kenttäsuureet elementin alueella ja elementin rajoilla, kun taas sekamalli perustuu useamman kuin yhden kenttäsuureen samanaikaisesti toisistaan riippumattomaan approksimaatioon. Elementtimallia kutsutaan seka- hybridimalliksi, mikäli siinä on enemmän

kuin yksi kenttäsuure elementin alueella ja mikäli se sisältää lisäksi riippumattomia muuttujia elementin reunoilla.

Kuva 1 pyrkii havainnollistamaan seka- ja hybridimenetelmien välistä suhdetta. Tässä artikkelissa lähinnä voimamenetelmää (tasapainomallit) olevat menetelmät jätetään käsittelyn ulkopuolelle.



Kuva 1. Vuokaavio eri elementtimenetelmäformulaatioista. Tässä artikkelissa käsitellään katkoviivan yläpuolella olevia tapauksia.

VARIAATIOPERIAATTEISTA

Lineaarisen kimmoteorian probleema voidaan esittää seuraavasti /2/

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \sigma + p &= 0 \\ \epsilon &= \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T) \end{aligned} \right\} \Omega : ssa$$

$$\sigma = a : \epsilon \quad (1)$$

$$\mathbf{T} = \sigma \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{T}} \quad \Gamma_\sigma : lla$$

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \Gamma_u : lla$$

$$\partial\Omega = \Gamma_\sigma \cup \Gamma_u$$

jossa $\sigma, \epsilon, \mathbf{u}$ ovat jännitys- ja muodonmuutostensori sekä siirtymävektori, jotka ovat probleeman tuntemattomat. Materiaalitensori a ja kuormitusvektori p ovat tunnettuja suureita. $\bar{\mathbf{T}}$ on tunnettu jännitysvektori reunalla Γ_σ ja vastaavasti $\bar{\mathbf{u}}$ on annettu siirtymä reunan osalla Γ_u .

Probleemaan (1) liittyvä potentiaalienergian funktionaali on /2/

$$\Pi_P(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \epsilon : a : \epsilon - p \cdot \mathbf{u} \right) d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma} \bar{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{u} d\Gamma, \quad (2)$$

rajoite-ehtona

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \Gamma_u : lla. \quad (2')$$

Rajoite-ehto (2') voidaan sisällyttää Lagrangen kertojen avulla suoraan funktionaaliin (2). Näin saatu laajennettu muoto ei vaadi lisäehtoja, mutta sisältää toisistaan riippumattomina varioitavat funktiot \mathbf{u}, λ .

Hellingerin-Reissnerin variaatioperiaatteen funktionaali on /2/

$$\Pi_{HR}(\sigma, \mathbf{u}) = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} \sigma : (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) - \frac{1}{2} \sigma : a^{-1} : \sigma - p \cdot \mathbf{u} \right] d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma} \bar{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{u} d\Gamma, \quad (3)$$

rajoite-ehtona

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \Gamma_u : lla. \quad (3')$$

Varioitavia suureita ovat nyt σ ja \mathbf{u} . Geometriset reunaehdot voidaan sisällyttää Lagrangen kertojen avulla suoraan funktionaaliin (3).

Variaatioperiaatteiden funktionaaleja muodostettaessa on kyseisten integraalien oltava äärellisiä. Tämä rajoittaa sitä funktioluokkaa, johon hyväksyttävät (luvalliset) yritefunktiot voivat kuulua. Mikäli funktionaalissa esiintyvä korkeimman kertaluvun derivaatta on kertalukua n , tällöin on yritefunktioiden oltava sellaisia, että niiden $(n-1)$:s derivaatta on jatkuva.

Elementtimenetelmässä alue Ω jaetaan osiin, "elementteihin", Ω^e (termi elementti pitää sisällään geometrian lisäksi myös kantafunktiot ja vapausasteet). Edellä esitetyn perusteella, on elementtien välisillä rajoilla yritefunktioiden toteutettava jatkuvuus aina derivaattoihin $(n - 1)$ saakka. Tämä johtaa esim. ohuiden laattojen tapauksessa melko monimutkaisiin muotofunktioihin. Näitä jatkuvuusvaatimuksia voidaan kuitenkin lieventää. Tällöin joudutaan modifioituihin variaatioperiaatteisiin, joissa rikutut yhteensopivuusehdot otetaan huomioon Lagrangen kertojien avulla.

MODIFIOIDUISTA VARIAATIOPERIAATTEISTA

Olkoon alue Ω jaettu osa-alueisiin $\Omega^e, e = 1, \dots, N$. Kahden osa-alueen Ω^a ja Ω^b yhteistä raja-alueita merkittäköön Γ_{ab} :llä.

Mikäli yritefunktiot u^e toteuttavat vaadittavat jatkuvuusehdot sekä rajoitehdot (2'), saadaan potentiaalienergian lauseke suoraan summana elementtien potentiaalienergioiden lausekkeista

$$\Pi_P(u) = \sum_{e=1}^N \Pi_P^e(u^e), \quad (4)$$

missä varioitavina suureina ovat $u^e, e = 1, \dots, N$. Funktioaali (4) on perusta elementtimenetelmäformulaatioille, joita kutsutaan yhteensopivuusmalleiksi.

Mikäli nyt yritefunktiot u^e eivät toteuta kaikkia yhteensopivuusehtoja, voidaan puuttuva yhteensopivuus ottaa variaatioformulaatioon mukaan Lagrangen kertojien λ_i avulla, jotka ovat määritellyt elementtien raja-alueilla, eli

$$\Pi_P^{mod}(u, \lambda_i) = \Pi_P(u) + \sum \int_{\Gamma_{ab}} \lambda_{ab}(v^a - v^b) d\Gamma. \quad (5)$$

Yhtälössä (5) \sum tarkoittaa summausta elementtien raja-alueiden ylitse. Funktioaali Π_P^{mod} muodostaa perustan hybridisiirtymämenetelmälle. Symboli v tarkoittaa nyt sitä suuretta, jonka jatkuvuusvaatimuksia yritefunktiot u^e rikkovat, esimerkiksi v voi olla $v = u$ tai $v = \partial u / \partial n$.

Vastaavasti voidaan muodostaa modifioitu Hellingerin-Reissnerin variaatioperiaate.

EULERin - BERNOULLIn PALKKITEORIAN ELEMENTTEJÄ

Tavallinen C^1 - elementti

Taivutetun palkin potentiaalienergian funktioaali saadaan (2):sta kun otetaan huomioon, että $\varepsilon_{11} = -v''$ ja suoritetaan integrointi palkin poikkileikkausalan yli

$$\Pi_P(v) = \frac{1}{2} \int_a^b EI(v'')^2 dx - \int_a^b p v dx + \left|_a^b (Qv - Mv'). \quad (6)$$

Oletetaan sellaiset reunaehdot jolloin viimeinen sijoitustermi funktionaalista $\Pi_P(v)$ häviää. Jotta potentiaalienergialla olisi minimiarvo, on sen funktionaalin ensimmäisen variaation hävittävä, eli

$$\delta \Pi_P(v; \hat{v}) = \frac{d}{d\epsilon} \Pi_P(v + \epsilon \hat{v})|_{\epsilon=0} = 0, \quad (7)$$

josta saadaan

$$\int_a^b EI v'' \hat{v}'' dx - \int_a^b p \hat{v} dx = 0. \quad (8)$$

Jakamalla väli $I = [a, b]$ osaväleihin $I^e = [x_1^e, x_2^e]$ ja käyttämällä yritefunktioina C^1 jatkuvuuden toteuttavia polynomeja

$$\begin{aligned} \varphi_1(\xi) &= 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3, \\ \varphi_2(\xi) &= (\xi - 2\xi^2 + \xi^3)h^e, \\ \varphi_3(\xi) &= 3\xi^2 - 2\xi^3, \\ \varphi_4(\xi) &= (-\xi^2 + \xi^3)h^e, \end{aligned} \quad (9)$$

jossa $h^e = x_2^e - x_1^e$ ja $\xi = (x - x_1^e)/h^e$. Tällöin taipuman v approksimaatio osavälillä e on

$$v^e = \varphi_1 v(x_1^e) + \varphi_2 v'(x_1^e) + \varphi_3 v(x_2^e) + \varphi_4 v'(x_2^e). \quad (10)$$

Kun testifunktioille \hat{v} valitaan myös kanta (9), saadaan tuttu yhtälö

$$\mathbf{K}^e \mathbf{v}^e = \mathbf{p}^e, \quad (11)$$

jossa

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^e &= \begin{bmatrix} 12EI/h^3 & 6EI/h^2 & -12EI/h^3 & 6EI/h^2 \\ & 4EI/h^e & -6EI/h^2 & 2EI/h^e \\ & & 12EI/h^3 & -6EI/h^2 \\ & & & 4EI/h^e \end{bmatrix} \\ &\quad \text{symm.} \\ \mathbf{v}^e &= [v_1 \quad v_1' \quad v_2 \quad v_2']^T \\ \mathbf{p}^e &= [p_1 \quad p_2 \quad p_3 \quad p_4]^T \\ p_i &= \int_{I^e} p \varphi_i dx. \end{aligned} \quad (11')$$

C^0 - hybridielementti

Mikäli yritefunktioina käytetään globaalisti C^0 funktioita, on käytettävä modifioitua potentiaalienergian funktionaalia

$$\Pi_P^{mod}(v, \lambda) = \sum_e \left[\frac{1}{2} \int_{I^e} EI (v'')^2 dx - \int_{I^e} p v dx \right] + \sum_i \lambda_i (v'_{i-} - v'_{i+}), \quad (12)$$

jossa jälkimmäinen summaus suoritetaan kaikkien elementtien rajapisteiden yli, ja

$$\begin{aligned} v'_{i+} &= \lim_{\mu \rightarrow 0} v'(x_i + |\mu|), \\ v'_{i-} &= \lim_{\mu \rightarrow 0} v'(x_i - |\mu|). \end{aligned} \quad (12')$$

Funktionaalin Π_P^{mod} stationaarisuusehto voidaan symbolisesti kirjoittaa

$$\delta \Pi_P^{mod}(v, \lambda; \hat{v}, \hat{\lambda}) = \left(\frac{d}{d\epsilon} + \frac{d}{d\eta} \right) \Pi_P^{mod}(v + \epsilon \hat{v}, \lambda + \eta \hat{\lambda})|_{\epsilon=\eta=0} = 0, \quad (13)$$

josta seuraa

$$\begin{aligned} \sum_e \int_{I^e} (EI v'' \hat{v}'' - p \hat{v}) dx + \sum_i [\lambda_i (\hat{v}'_{i-} - \hat{v}'_{i+})] &= 0, \\ \sum_i [\hat{\lambda}_i (v'_{i-} - v'_{i+})] &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Valitaan v^e :lle esitys

$$v^e = \varphi_1 v(x_1^e) + \varphi_2 v(x_2^e) + \varphi_3 v(x_3^e), \quad (15)$$

jossa φ_i ovat tavanomaiset isoparametriset muotofunktiot, eli

$$\begin{aligned} \varphi_1(\xi) &= \frac{1}{2} \xi(\xi - 1), \\ \varphi_2(\xi) &= 1 - \xi^2, \\ \varphi_3(\xi) &= \frac{1}{2} \xi(\xi + 1), \\ \xi &= \frac{2(x - x_2^e)}{h^e}, \\ x_2^e &= \frac{1}{2}(x_3^e - x_1^e), \\ I^e &= [x_1^e, x_3^e], \end{aligned} \quad (15')$$

jolloin yhdelle elementille saadaan

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^e & \mathbf{\Lambda}^e \\ \mathbf{\Lambda}^{eT} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{v}^e \\ \boldsymbol{\lambda}^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{p}^e \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}, \quad (16)$$

jossa

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^e &= \frac{16EI}{h^{e3}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{\Lambda}^{eT} &= \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -2 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{p}^e &= [p_1 \quad p_2 \quad p_3]^T, \quad p_i = \int_{I^e} p \varphi_i dx, \\ \mathbf{v}^e &= [v_1 \quad v_2 \quad v_3]^T, \\ \boldsymbol{\lambda}^e &= [\lambda_1 \quad \lambda_3]^T. \end{aligned} \quad (16')$$

C^0 - E-B elementti Timoshenkon palkkiteorian avulla

Leikkausmuodonmuutokset huomioonottavan Timoshenkon palkkiteorian potentiaalienergian funktionaali on

$$\Pi_P(v, \theta) = \frac{1}{2} \int_a^b \left(\frac{M^2}{EI} + \frac{Q^2}{kGA} \right) dx - \int_a^b p v dx. \quad (17)$$

Ottamalla huomioon, että $M = -EI\theta'$ ja $Q = kGA\gamma$ sekä $v' = \theta + \gamma$, voidaan funktionaali (17) kirjoittaa muotoon

$$\Pi_P(v, \theta) = \frac{1}{2} \int_a^b [EI(\theta')^2 + kGA(v' - \theta)^2] dx - \int_a^b p v dx. \quad (18)$$

Lisätään funktionaaliin rajoite $v' - \theta = 0$ Lagrangen kertojan välityksellä, jolloin saadaan modifioitu funktionaali

$$\Pi_P^{mod}(v, \theta, \lambda) = \Pi_P(v, \theta) + \int_a^b \lambda(v' - \theta) dx. \quad (19)$$

Stationaarisuusehdosta

$$\delta \Pi_P^{mod}(v, \theta, \lambda; \hat{v}, \hat{\theta}, \hat{\lambda}) = \left(\frac{d}{d\epsilon} + \frac{d}{d\eta} + \frac{d}{d\zeta} \right) \Pi_P^{mod}(v + \epsilon \hat{v}, \theta + \eta \hat{\theta}, \lambda + \zeta \hat{\lambda}) \Big|_{\epsilon=\eta=\zeta=0} = 0 \quad (20)$$

saadaan systeemi

$$\begin{aligned} \int_a^b [EI\theta' \hat{\theta}' + kGA(\theta \hat{\theta} - v' \hat{v}) - \lambda \hat{\theta}] dx &= 0, \\ \int_a^b [kGA(v' \hat{v}' - \theta \hat{v}') + \lambda \hat{v}' - p \hat{v}] dx &= 0, \\ \int_a^b \hat{\lambda}(v' - \theta) dx &= 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Nyt voidaan sekä v :lle että θ :lle valita lineaariset muotofunktiot, jolloin yhden elementin yhtälöryhmä on

$$\begin{bmatrix} \frac{kGA}{h^0} & \frac{kGA}{2} & -\frac{kGA}{h^0} & \frac{kGA}{2} & -1 \\ & \frac{EI}{h^0} + \frac{kGAh^0}{3} & -\frac{kGA}{2} & -\frac{EI}{h^0} + \frac{kGAh^0}{6} & -\frac{h^0}{2} \\ & & \frac{kGA}{h^0} & -\frac{kGA}{2} & 1 \\ & & & \frac{EI}{h^0} + \frac{kGAh^0}{3} & -\frac{h^0}{2} \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ 0 \\ p_2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (22)$$

symm.

Sekaelementit

Hajoitetaan E-B palkin differentiaaliyhtälö $EIv^{(4)} = p$ kahden yhtälön systeemiksi seuraavasti

$$\begin{aligned} v'' &= -\frac{M}{EI} \\ -M'' &= p. \end{aligned} \quad (23)$$

Variaatioformulaatio saadaan kun kerrotaan ylempi yhtälöistä testifunktioilla \hat{M} ja alempi vastaavasti \hat{v} :llä ja suoritetaan integrointi välin $I = [a, b]$ yli. Integroimalla kerran osittain saadaan

$$\int_a^b \frac{M\hat{M}}{EI} dx - \int_a^b v'\hat{M}' dx = 0, \quad (24)$$

$$- \int_a^b M'\hat{v}' dx + \int_a^b p\hat{v} dx = 0.$$

Suorittamalla elementtimenetelmän mukainen approksimointi

$$v^e = \sum_i \varphi_i v_i, \quad M^e = \sum_k \psi_k M_k, \quad (25)$$

saadaan yhtälösystemi

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}^e & -\mathbf{C}^e \\ -\mathbf{C}^{eT} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{M}^e \\ \mathbf{v}^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{p}^e \end{Bmatrix}, \quad (26)$$

jossa

$$H_{ik}^e = \int_{I^e} \frac{\psi_i \psi_k}{EI} dx, \quad C_{ii}^e = \int_{I^e} \psi_i' \varphi_i' dx. \quad (26')$$

Käytettäessä lineaarisia funktioita sekä φ :ssä että ψ :ssä ovat matriisit \mathbf{H}^e ja \mathbf{C}^e

$$\mathbf{H}^e = \frac{h^e}{6EI} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}^e = \frac{1}{h^e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (27)$$

Vastaavasti parabolisilla muotofunktioilla (15) saadaan

$$\mathbf{H}^e = \frac{h^e}{30EI} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}^e = \frac{1}{3h^e} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix}. \quad (27')$$

Matriiseista (27) ja (27') havaitaan, että \mathbf{H}^e on säännöllinen mutta \mathbf{C}^e singulaarinen.

Mikäli taipumalle v otaksutaan kuubiset C^0 muotofunktiot ja momentille M lineaarinen approksimaatio, on matriisi \mathbf{C}^e

$$\mathbf{C}^e = \frac{1}{h^e} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (28)$$

Kuten myöhemmin todetaan, ei tällainen approksimaatio toimi.

Johdetaan seuraavaksi sekaelementti lähtien Hellingerin-Reissnerin funktio-naalista (3), joka E-B palkin tapauksessa on

$$\Pi_{HR}(M, v) = \int_a^b \left(-Mv'' - \frac{1}{2} \frac{M^2}{EI} - pv \right) dx, \quad (29)$$

ja jossa varioitavia suureita ovat M ja v . Stationaarisuusehdosta

$$\delta \Pi_{HR}(M, v; \hat{M}, \hat{v}) = \left(\frac{d}{d\epsilon} + \frac{d}{d\eta} \right) \Pi_{HR}(M + \epsilon \hat{M}, v + \eta \hat{v})|_{\epsilon=\eta=0} = 0 \quad (30)$$

saadaan systeemi

$$\begin{aligned} \int_a^b (v^n \hat{M} + \frac{M \hat{M}}{EI}) dx &= 0, \\ \int_a^b (M \hat{v}^n + p \hat{v}) dx &= 0, \end{aligned} \quad (31)$$

joka diskretoinnin jälkeen on muodossa

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}^e & \mathbf{C}^e \\ \mathbf{C}^{eT} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{M}^e \\ \mathbf{v}^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{p}^e \end{Bmatrix}, \quad (32)$$

jossa

$$H_{ik}^e = \int_{I^e} \frac{\psi_i \psi_k}{EI} dx, \quad C_{ii}^e = \int_{I^e} \psi_i \varphi_i^n dx. \quad (32')$$

Jos taivutusmomenttia M approksimoidaan lineaarisilla polynomeilla ja taipumalle käytetään C^1 jatkuvia muotofunktioita (9) saadaan matriisiksi \mathbf{C}^e

$$\mathbf{C}^e = \frac{1}{h^e} \begin{bmatrix} -1 & -h^e & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & h^e \end{bmatrix}. \quad (33)$$

Suorittamalla lausekkeissa (31) osittaisintegrointi, saadaan samat yhtälöt kuin (24):ssä, jolloin diskretoinnin tuloksena päädytään systeemiin (26).

Hybridisekaelementti

Variaatioperiaatteen (29) soveltaminen vaatii taipuman yritefunktiolta C^1 jatkuvuutta. Mikäli halutaan käyttää C^0 muotofunktioita joudutaan modifioituaan Hellingerin-Reissnerin funktionaaliin

$$\Pi_{HR}^{mod}(M, v, \lambda) = \Pi_{HR}(M, v) + \sum_i \lambda_i (v'_{i-} - v'_{i+}). \quad (34)$$

Stationaarisuusehdosta

$$\delta \Pi_{HR}^{mod}(M, v, \lambda; \hat{M}, \hat{v}, \hat{\lambda}) = 0 \quad (35)$$

saadaan systeemi

$$\begin{aligned} \sum_e \int_{I^e} (v^n \hat{M} + \frac{M \hat{M}}{EI}) dx &= 0, \\ \sum_e \int_{I^e} (M \hat{v}^n + p \hat{v}) dx + \sum_i \lambda_i (\hat{v}'_{i-} - \hat{v}'_{i+}) &= 0, \\ \sum_i \hat{\lambda} (v'_{i-} - v'_{i+}) &= 0. \end{aligned} \quad (36)$$

Valitsemalla taipumalle v ja taivutusmomentille M sopiva approksimaatio saadaan yhden elementin yhtälöiksi

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}^e & \mathbf{C}^e & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}^{eT} & \mathbf{0} & \mathbf{\Lambda}^e \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Lambda}^{eT} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{M}^e \\ \mathbf{v}^e \\ \lambda^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{p}^e \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}. \quad (37)$$

Elementtimatriisin diagonaali sisältää useita nolla-alkioita. Tämä saattaa vaikeuttaa yhtälöryhmän suoraa ratkaisua. Systemin globaali matriisi on samanmuotoinen kuin (37). Tällöin systeemin (37) ylintä yhtälöä vastaa

$$\mathbf{H}\mathbf{M} + \mathbf{C}\mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (38)$$

ja koska matriisi \mathbf{H} on säännöllinen, voidaan sen kääntematriisilla operoida vasemmalta. Sijoittamalla nyt \mathbf{M} :n lauseke keskimmäiseen yhtälöistä (37) saadaan

$$-\mathbf{C}^T\mathbf{H}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{v} + \mathbf{\Lambda}\lambda = -\mathbf{p}. \quad (39)$$

Taipumien \mathbf{v} kerroinmatriisi on edelleen säännöllinen, joten se voidaan eliminoida ja sijoittaa alimpaan yhtälöistä (37), jolloin saadaan systeemi, josta viimein voidaan Lagrangen kertojat λ ratkaista

$$\mathbf{\Lambda}^T[\mathbf{C}^T\mathbf{H}^{-1}\mathbf{C}]^{-1}\mathbf{\Lambda}\lambda = -\mathbf{\Lambda}^T[\mathbf{C}^T\mathbf{H}^{-1}\mathbf{C}]^{-1}\mathbf{p}. \quad (40)$$

Kun Lagrangen kertojat on ratkaistu yhtälöstä (40), saadaan taipumat ja taivutusmomentit määritettyä yhtälöiden (38) ja (39) avulla. Kuvattu menettely systeemin (37) ratkaisemiseksi on hyvin työläs.

BABUŠKA-BREZZI STABILIUZEHTO

Tarkastellaan aluksi variaatiomuotoa (8)

$$\int_a^b EI v'' \hat{v}'' dx - \int_a^b p \hat{v} dx = 0,$$

Käytetään sille lyhennysmerkintää

$$a(v, \hat{v}) = L(\hat{v}).$$

Yhtälön (8) on oltava voimassa kaikille testifunktiolle \hat{v} , jotka kuuluvat probleemalle ominaiseen Hilbert-avaruuteen V ja jonka normia merkittäköön $\|\cdot\|_V$.

Suoritetaan elementtimenetelmän mukainen approksimaatio eli etsitään ratkaisua V :n äärellisulotteisesta aliavaruudesta V_h , ja käytetään V_h :n kantafunktioita myös testifunktioille \hat{v} . Probleema (8) voidaan nyt formuloida: etsi $v_h \in V_h$ siten, että

$$a(v_h, \hat{v}) = L(\hat{v}) \quad \forall \hat{v} \in V_h. \quad (41)$$

Menetelmän stabiiliuden osoittamisessa oleellista on bilineaarimuodon $a(\cdot, \cdot)$ V -elliptisyys (koersiivisuus), eli että on olemassa positiivinen reaalilukuvakio α siten, että

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V.$$

Tällöin yhdessä funktionaalin L jatkuvuusolettamuksen avulla saadaan

$$\begin{aligned} a(v_h, v_h) &= L(v_h) \\ \alpha \|v_h\|_V^2 &\leq |L(v_h)| \\ \alpha \|v_h\|_V^2 &\leq C_1 \|v_h\|_V \\ \|v_h\|_V &\leq C_2, \end{aligned}$$

jossa vakiot C_i riippuvat kuormituksesta p mutta ovat riippumattomia ratkaisusta v_h .

Sekamenetelmälle (24) ei stabiilius seuraa yhtä helposti. Käytetään sekamenetelmäformulaatiolle

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{M\hat{M}}{EI} dx - \int_a^b v'\hat{M}' dx &= 0 \quad \forall \hat{M} \in W \\ - \int_a^b M'\hat{v}' dx + \int_a^b p\hat{v} dx &= 0 \quad \forall \hat{v} \in V \end{aligned}$$

lyhennysmerkintää

$$\begin{aligned} a(M, \hat{M}) + b(v, \hat{M}) &= 0 \\ b(\hat{v}, M) &= -L(\hat{v}). \end{aligned} \quad (42)$$

Olettamuksilla

$$\begin{aligned} a) \quad a(M, M) &\geq \alpha \|M\|_W^2 \\ b) \quad \sup_{M \neq 0} \frac{b(v, M)}{\|M\|_W} &\geq \beta \|v\|_V \\ c) \quad |L(v)| &\leq C \|v\|_V, \end{aligned}$$

jossa α, β ja C ovat positiivisia reaalilukuvakioita, voidaan elementtimenetelmäapproksimaation stabiilius osoittaa. Oletamus b) on Babuška-Brezzi ehto, jota voidaan pitää eräänlaisena bilineaarimuodon $b(\cdot, \cdot)$ "elliptisyysominaisuuden korvikkeena".

Yhtälöistä (42) saadaan elementtimenetelmäformulaatio, kun korvataan $M \rightarrow M_h$ ja $v \rightarrow v_h$. Jätetään mukavuussyistä alaindeksi h merkitsemättä seuraavassa osoituksessa.

Valitaan (42):ssa $\hat{M} = M, \hat{v} = v$, ja vähennetään alempi puolittain yleimmästä yhtälöstä, jolloin saadaan

$$\alpha \|M\|_W \leq a(M, M) = L(v) \leq C \|v\|_V.$$

Babuška-Brezzi ehto voidaan kirjoittaa muodossa /3/: $\exists \bar{M}$ s.e.

$$\begin{aligned} b(v, \bar{M}) &\geq \beta \|v\|_V^2 \\ \|\bar{M}\|_W &\leq C \|v\|_V. \end{aligned}$$

Valitaan nyt $\hat{M} = M + \delta \bar{M}$, jossa δ on reaaliluku ja $\hat{v} = v$ ja sijoitetaan yhtälöihin (42), jonka jälkeen vähennetään alempi puolittain yleimmästä yhtälöstä. Ottamalla huomioon $a(\cdot, \cdot)$:n ja $b(\cdot, \cdot)$:n bilineaarisuus, saadaan

$$a(M, M) + \delta a(M, \bar{M}) + \delta b(v, \bar{M}) = L(v).$$

Nyt yllä olevan yhtälön vasenta puolta voidaan arvioida alaspäin

$$\begin{aligned} &a(M, M) + \delta a(M, \bar{M}) + \delta b(v, \bar{M}) \\ &\geq \alpha \|M\|_W^2 + \delta \beta \|v\|_V^2 + \delta a(M, \bar{M}) \\ &\geq \alpha \|M\|_W^2 + \delta \beta \|v\|_V^2 - \frac{\delta C}{2} (\epsilon \|M\|_W^2 + \frac{1}{\epsilon} \|\bar{M}\|_W^2) \\ &\geq (\alpha - \frac{\delta C \epsilon}{2}) \|M\|_W^2 + \delta (\beta - \frac{C}{2\epsilon}) \|v\|_V^2. \end{aligned}$$

Ensimmäiselle sulkausekkeelle pätee $(\alpha - \frac{\delta C \epsilon}{2}) \geq \frac{\alpha}{2}$, jos $\delta \leq \frac{\alpha}{C\epsilon}$ ja toiselle $(\beta - \frac{C}{2\epsilon}) \geq \frac{\beta}{2}$, jos $\epsilon \geq \frac{C}{\beta}$. Nyt on siis saatu epäyhtälö

$$\begin{aligned} C_1 (\|M\|_W^2 + \|v\|_V^2) &\leq L(v) \leq C_2 \|v\|_V \\ &\leq C_2 (\|v\|_V^2 + \|M\|_W^2)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

josta viimein saadaan toivottu tulos

$$\|v\|_V + \|M\|_W \leq C_3.$$

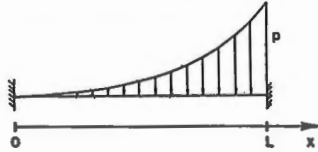
Babuška-Brezzi ehdosta seuraa, että probleemalla (42), matriisimuodossa (26) tai (32), on oltava voimassa seuraava ehto. Systeemillä

$$C^T v = 0 \quad v \neq 0$$

ei ole ratkaisua, ts. C^T :n pystyvektoreiden on oltava lineaarisesti riippumattomia. Esimerkiksi matriiseista (28) koottu globaali matriisi ei toteuta tätä ehtoa.

ESIMERKKI

Tarkastellaan kuvan 2 mukaista rakennetta.



$$p(x) = p\left(\frac{x}{L}\right)^3$$

$$EI = \text{vakio}$$

Kuva 2. Jäykästi kiinnitetty tasajäykkä palkki.

Taipuman v analyttinen lauseke on

$$v(x) = \frac{pL^4}{EI} \left[\frac{1}{840} \left(\frac{x}{L}\right)^7 - \frac{1}{168} \left(\frac{x}{L}\right)^3 + \frac{1}{210} \left(\frac{x}{L}\right)^2 \right],$$

ja taivutusmomentin lauseke on

$$M(x) = pL^2 \left[-\frac{1}{20} \left(\frac{x}{L}\right)^5 + \frac{1}{28} \left(\frac{x}{L}\right) - \frac{1}{105} \right].$$

Käytettäessä normaalia C^1 palkkielementtiä (11') saadaan taipuman arvot tarkasti solmupisteissä. Tong /4/ on osoittanut, että yksidimensioiselle skalaariselle probleemalle, jonka positiivisesti definiitin funktionaalin Eulerin yhtälön homogeenisen osan ratkaisuja käytetään interpolaatiofunktioina, saadaan solmupisteissä tarkka ratkaisu riippumatta elementtien lukumäärästä tai yksityisratkaisun muodosta.

Mitataan virhettä L_2 -normin mielessä sekä taipumalle että momentille

$$e(v) = \left[\int_0^L (v - v_h)^2 dx \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$e(M) = \left[\int_0^L (M - M_h)^2 dx \right]^{\frac{1}{2}},$$

jolloin vastaavasti suhteelliset virheet ovat

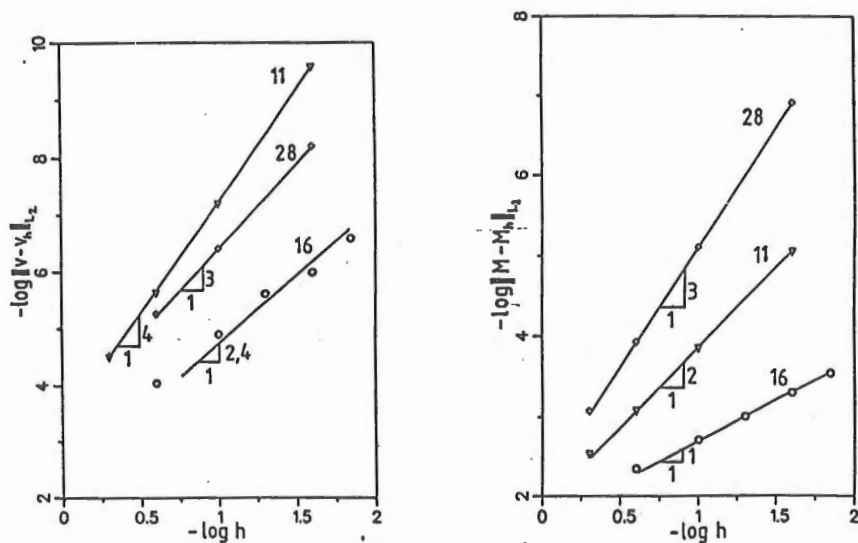
$$e_r(v) = 100 \frac{e(v)}{\left[\int_0^L v^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}},$$

$$e_r(M) = 100 \frac{e(M)}{\left[\int_0^L M^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Taulukossa 2 on esitetty suhteellisen virheen arvoja C^1 elementille (11'), C^0 hybridielementille, lineaariselle sekaelementille (27) sekä paraboliselle sekaelementille (28). Kuvaan 3 on piirretty numeerisen suppenemisnopeustarkastelun tulokset.

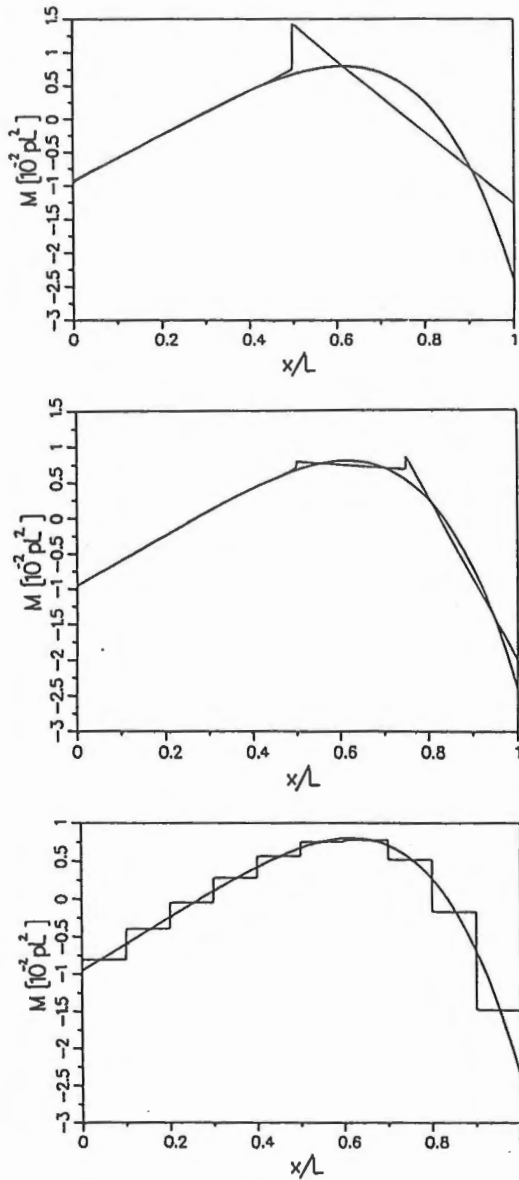
Taulukko 1. Suhteellinen virhe, tasajakoinen elementtiverkko

N	C^1 - elem.		C^0 - hybr.		parab. sekael.		lin. sekael.	
	$e_r(v)$	$e_r(M)$	$e_r(v)$	$e_r(M)$	$e_r(v)$	$e_r(M)$	$e_r(v)$	$e_r(M)$
2	10,92	41,2	100	100	10,11	11,57	16,62	47,98
4	0,79	11,7	30,4	63,4	1,82	1,62	9,82	14,07
10	0,02	2,0	4,2	27,2	0,13	0,11	1,93	2,34
40	0,00	0,1	0,3	7,0	0,00	0,00	0,12	0,15



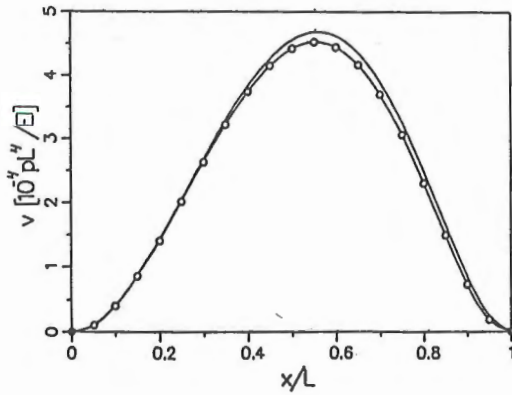
Kuva 3. Numeerinen suppenemisnopeustesti.

Viimeisen vuosikymmenen aikana on a posteriori virhearvioita ja niihin perustuvaa adaptiivista menettelyä tutkittu intensiivisesti /5/. Perusajatuksena näissä menetelmissä on kyetä saadusta elementtiratkaisusta arvioimaan virheen suuruutta halutuissa suureissa, ja tihentää verkkoa tai korottaa approksimaation astetta niissä elementtiverkon osissa, joissa edeltäkäsinn annettu virhetoleranssi ei toteudu. Esitetään nyt yksinkertainen tapa arvioida virhettä sekamenetelmässä (26), jossa

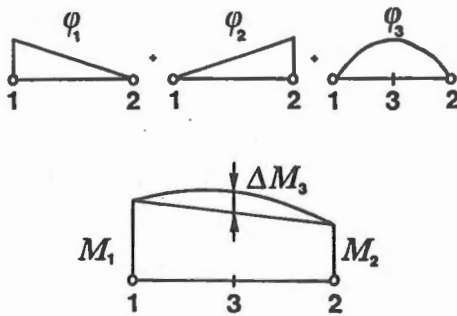


Kuva 4. Momentin approksimaatio kahdella ja neljällä C^1 elementillä sekä kymmenellä C^0 hybridielementillä.

on käytetty lineaarista approksimaatiota. Otetaan käyttöön hierarkinen muoto-funktio $\varphi_3 = 1 - \xi^2$, ks. kuva 6. Tällöin yhtälö (26) muuttuu muotoon



Kuva 5. Taipuman approksimaatio kymmenellä C^0 hybridielementillä.



Kuva 6. Parabolinen hierarkinen- ja tavanomaiset lineaariset muotofunktiot.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{SS} & \mathbf{H}_{SH} & -\mathbf{C}_{SS} & 0 \\ \mathbf{H}_{HS} & \mathbf{H}_{HH} & 0 & -\mathbf{C}_{HH} \\ -\mathbf{C}_{SS} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbf{C}_{HH} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{M}_S \\ \mathbf{M}_H \\ \mathbf{v}_S \\ \mathbf{v}_H \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\mathbf{p}_S \\ -\mathbf{p}_H \end{Bmatrix}, \quad (43)$$

jossa alaindeksi S viittaa standardi ja H hierarkisiin muotofunktioihin. Hierarkinen muutos $\mathbf{M}_H = \{\Delta M_3\}$ voidaan määrittää suoraan systeemin (43) alimmasta yhtälöstä. Nyt voidaan määrittellä elementtikohtainen virhe-estimaatti taivutus-

momentille

$$e^e = 100 \frac{\sqrt{\frac{1}{h^6} \int_{I^e} (\varphi_3 \Delta M_3)^2 dx}}{\sqrt{\sum_e \frac{1}{h^6} \int_{I^e} (\varphi_1 M_1 + \varphi_2 M_2 + \varphi_3 \Delta M_3)^2 dx}}, \quad (44)$$

ja sen tehokkuusindeksi

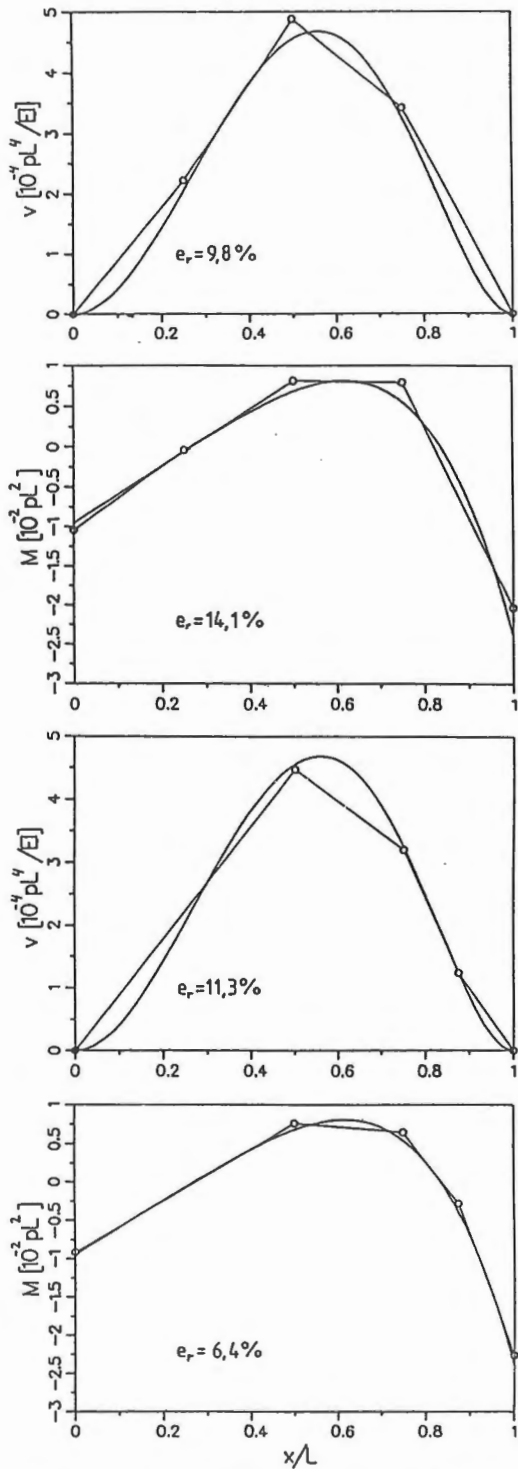
$$\theta = \frac{e^e}{e_{exact}^e}. \quad (45),$$

$$e_{exact}^e = 100 \frac{\sqrt{\frac{1}{h^6} \int_{I^e} (M - M_h)^2 dx}}{\sqrt{\sum_e \frac{1}{h^6} \int_{I^e} M^2 dx}}.$$

Sovelletaan adaptiivista menettelyä esimerkkitapaukseen. Käytetään verkon tihennystä ja pidetään polynomiapproksimaation aste samana (h-refinement). Lähdetään liikkeelle kahdella elementillä ja vaaditaan (44):n mukaisesti 20 %:n tarkkuus. Kuvassa 7 on esitetty verkon tihennysprosessi ja estimoidun virheen suhde todelliseen virheeseen.

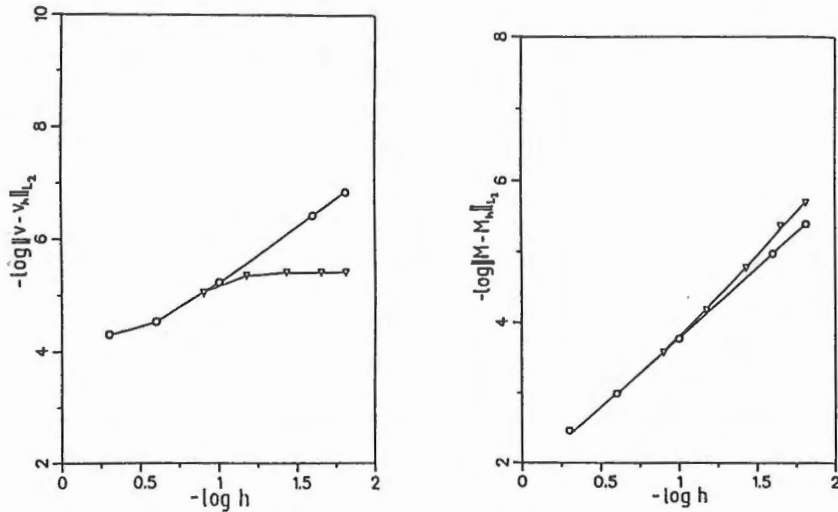
1. verkko				
e	7,2	129,0	%	
e _{exact}	29,6	61,0	%	
θ	0,24	2,11		
2.				
e	7,9	19,8	53,7	%
e _{exact}	6,7	12,4	23,7	%
θ	1,18	1,59	2,27	
3.				
e	8,0	20,0	10,7	16,5 %
e _{exact}	3,3	9,7	6,9	6,9 %
θ	2,44	2,05	1,56	2,39

Kuva 7. Adaptiivinen verkontihennys.



Kuva 8. Taipuman ja taivutusmomentin kuvaajia laskettuna tasavälisellä verkolla ja adaptiivisesti pyrittäessä 20 %:n tarkkuuteen taivutusmomenteissa.

Laskelmista havaitaan, että momentin suppenemisnopeus paranee tasaiseen tihennykseen verrattuna, mutta taipuman suppeneminen vastaavasti hidastuu. Tämä on kuitenkin selviö, kun tarkastellaan momentin ja taipumaviivan muotoja. Momentin muutokset ovat suurimmat oikean tuen läheisyydessä, jolloin momentin kuvaamiseen lineaarisella approksimaatiolla vaaditaan tiheämpää solmujakoa. Vastaavasti vasemman tuen läheisyydessä saadaan momentti kuvattua hyvin tarkasti lineaarisella approksimaatiolla, mutta taasen taipuman kuvaaminen jäykän tuen läheisyydessä ei onnistu hyvin lineaarisilla muotofunktioilla. Kuvissa 8 on esitetty momentin ja taipuman kuvaajia, ja kuvassa 9 on numeerisen suppenemisnopeustestin tulokset.



Kuva 9. Numeerinen suppenemisnopeustarkastelu lineaariselle sekaelementille. Ympyröidyt pisteet ovat laskentatulokset tasavälisellä verkolla ja kolmiot vastaavasti tulokset adaptiivisesta verkon tihennysmenettelystä, jossa tihennys perustuu virhe-estimaattiin taivutusmomentin suhteen.

Kuvasta 9 havaitaan että adaptiivisella menettelyllä saavutetaan momentille

suppenemisnopeus, joka noudattaa ehtoa

$$\|M - M_h\|_{L_2} \leq Ch^{2,4},$$

kun optimaalinen tulos tasaväliselle verkolle on

$$\|M - M_h\|_{L_2} \leq Ch^2.$$

Mikäli virhettä arvioidaan pelkästään taipuman osalta, hidastuu momentin suppeneminen. Tarkkailtaessa molempia suureita yhtäaikaan saadaan likimain sama tulos kuin tasavälisellä verkon tihennyksellä kyseisessä esimerkkiprobleemassa.

Kiitokset

vs. apul. prof. Jukka Aallolle ja TkT Rolf Stenbergille hyödyllisistä keskusteluista ja neuvoista.

VIITTEET

- [1] Proceedings of the International Symposium on Hybrid and Mixed Finite Element Methods, April 8-10, 1981 Atlanta, Ga, USA.
- [2] Washizu, K., Variational Methods in Elasticity & Plasticity, 3rd ed. Pergamon Press, 1982. 630 s.
- [3] Stenberg, R., suullinen tiedonanto.
- [4] Tong, P., Exact Solution of Certain Problems by Finite-Element Method, AIAA Journal, 7 1969, s.178-180.
- [5] Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in Finite Element Computations, Ed. Babuška, I. et. al., John Wiley & sons, 1986, 393 s.

Reijo Kouhia, dipl.ins., tutkimusassistentti, Suomen Akatemia