

RAKENTEEN JÄLKIKRIITTISEN TILAN MÄÄRITTÄMINEN ELEMENTTIMENETELMÄLLÄ

Reijo Kouhia

Rakenteiden Mekaniikka, Vol. 20
Nro 1 1987, s. 12...30

TIIVISTELMÄ: Artikkelissa tarkastellaan elementtimenetelmällä diskreetoitujen geometrisesti epälineaaristen rakennemallien kriittisten pisteiden määritysmenetelmiä ja tapoja rakenteen jälkikriittisen vasteen analysoimiseksi. Esimerkkeinä on laskettu muutamia yksinkertaisia kehärakenteita.

JOHDANTO

Tarkasteltavana on rakenteen tasapainoyhtälöiden diskretoinnin tuloksena syntynyt epälineaarinen algebrallinen yhtälösystemi

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{\Lambda}) = \mathbf{0}. \quad (1)$$

Systemissä (1) on n yhtälöä, joka on myös siirtymävektorin \mathbf{u} komponenttien lukumäärä. Parametrivektorin $\mathbf{\Lambda}$ dimensio on $m \geq 1$. Nämä parametrit voivat kuvata esimerkiksi rakenteen kuormituksen suuruutta ja vaikutussuuntaa. Yhtälön (1) toteuttavaa pintaa $n+m$ ulotteisessa avaruudessa kutsutaan rakenteen tasapainopinnaksi. Tässä kirjoituksessa rajoitetaan kuitenkin tapauksiin, joissa parametrivektori koostuu yhdestä ainoasta komponentista. Tätä parametria λ kutsutaan kuormaparametriksi ja yhtälö (1) voidaan kirjoittaa nyt muodossa

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}, \lambda) = \lambda \mathbf{P}_{ref} - \mathbf{R}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}, \quad (2)$$

jossa \mathbf{P}_{ref} on kuormaparametrin arvoa $\lambda = 1$ vastaava referenssikuormavektori ja \mathbf{R} on sisäisten voimien vektori.

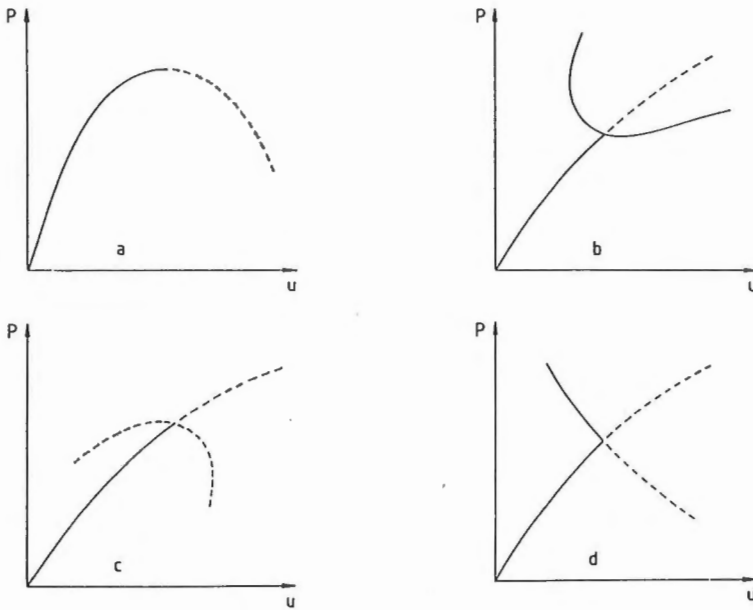
Yhtälöä (2) ratkaistaan usein lisäämällä kuormaa askeleittain ja ratkaisemalla yhtälöstä (2) muodostettu linearisoitu yhtälösystemi. Linearisoinnista aiheutuva virhettä voidaan korjata esim. Newton-Raphson tyyppisellä iteraatiolla.

Lähestyttäessä tasapainopolun kriittisiä pisteitä, joissa systeemin (2) tangentti-jäykkymatriisi

$$K = \frac{\partial R}{\partial u} \quad (3)$$

on singulaarinen, on turvaututtava lisäkeinoihin kriittisen pisteen määrittämiseksi ja jälkikriittisen tilan seuraamiseksi.

Rakenteiden stabiiliusteoriassa kriittiset pisteet jaotellaan rajapisteisiin ja haarautumis- eli bifurkaatiopisteisiin. Haarautumispisteet voidaan vielä jakaa kolmeen luokkaan /1/: symmetriseen stabiiliin, symmetriseen epästabiiliin ja antisymmetriseen haarautumiseen. Periaatteellinen esitys erityyppisistä singulariteeteistä on kuvassa 1.



Kuva 1. Kriittisten pisteiden luokittelu: a) rajapiste, b) symmetrinen stabiili haarautuminen, c) symmetrinen epästabiili haarautuminen ja d) antisymmetrinen haarautuminen. Kuvassa yhtenäinen viiva merkitsee stabiilia tasapainopolkua ja katkoviiva epästabiilia polkua.

Alkeellisimpia menetelmiä rajapisteiden ohittamiseksi ovat ylimääräisten jousien menetelmä /2/, /3/, jossa läpilyöntiongelman poistetaan sijoittamalla rakeutee-

seen ylimääräisiä lineaarisia jousia, jotka pitävät tangenttijäykkymatriisiin positiivisesti definiittinä, sekä Bergauin /4/ ehdottama menettely luopua iteroinnista rajapisteiden läheisyydessä. Keliittyneenpää tapaa edustaa siirtymäohjaus /5/,/6/, jossa yksittäinen siirtymäkomponentti (tai joukko siirtymävapausasteita) on valittu kontrolliparametreiksi ja kuormaparametri on siirretty tuntemattomien joukkoon. Menetelmän käytön onnistuminen riippuu siitä, onko osattu valita siirtymä, joka kasvaa monotonisesti deformaation edetessä. Riks /7/,/8/ ja Wempner /9/ ovat esittäneet yleispätevämmän menetelmän rajapisteiden sekä myös haarautumispisteiden määrittämiseksi ja jälkikirittisen tasapainopolun seuraamiseksi.

MENETELMIÄ RAJAPISTEIDEN OHITTAMISEKSI

Siirtymäohjaus

Oletetaan, että rakenteen kuormitus annetaan pakkosiirtymänä. Tällöin iterointiyhtälöksi saadaan

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{d} \\ \Delta \mathbf{u}_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{P}_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_2 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

jossa $\Delta \mathbf{u}_c$ on etukäteen tunnettu osa siirtymävektorista. Ensimmäisellä iteraatiolla ratkaistaan tuntematon siirtymänlisäysvektori \mathbf{d} yhtälöstä

$$\mathbf{K}_{11} \mathbf{d} = -\mathbf{K}_{12} \Delta \mathbf{u}_c - \mathbf{R}_1. \quad (5)$$

Seuraavilla iteraatioilla käytetään samaa yhtälöä, jossa $\Delta \mathbf{u}_c = \mathbf{0}$, ja iteraation konvergoitua saadaan siirtymätilaa vastaava kuorma yhtälöstä

$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{R}_2. \quad (6)$$

Yksinkertainen yhden vapausasteen siirtymäinkrementointialgoritmi saadaan seuraavasti. Jaetaan iteratiivinen siirtymänlisäysvektori iteraatiolla $i + 1$ kahteen osaan

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{i+1} &= \mathbf{K}_i^{-1} \mathbf{F}_i = \mathbf{K}_i^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{u}_i, \lambda_i + \delta \lambda_{i+1}) \\ &= \mathbf{K}_i^{-1} [\mathbf{F}(\mathbf{u}_i, \lambda_i) + \delta \lambda_{i+1} \mathbf{P}_{ref}] \\ &= \mathbf{D}_{i+1} + \delta \lambda_{i+1} \mathbf{q}_{i+1}. \end{aligned} \quad (7)$$

Inkrementaalinen siirtymänlisäys vapausasteelle k (annettu siirtymäkomponentti) on $\Delta \tilde{u}_k$. Ensimmäisellä iteraatiokierroksella saadaan kuorman muutokseksi

$$\delta \lambda_1 = \frac{\Delta \tilde{u}_k}{(q_k)_1}, \quad (8)$$

jonka jälkeen kuorman muutos saadaan kaavasta

$$\delta\lambda_i = \frac{(D_k)_i}{(q_k)_i}. \quad (9)$$

Normaalitasomenetelmät

Muodostettaessa yhtälöä kuormaparametrin muutoksen laskemiseksi vaaditaan tangenttitason vektorin \mathbf{t} ja normaalitason vektorin \mathbf{n} kohtisuoruus /10/ (ks. kuva 2):

$$\mathbf{t}_i^T \mathbf{n}_i = 0, \quad (10)$$

jossa

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_i &= [\Delta \mathbf{u}_i \ \alpha \Delta \lambda_i]^T, \\ \mathbf{n}_i &= [\mathbf{d}_{i+1} \ \alpha \delta \lambda_{i+1}]^T. \end{aligned} \quad (11)$$

Skalaari α on kerroin, joka voidaan määrittellä ensimmäisen askeleen ensimmäisellä iteraatiolla ehdosta

$$\alpha^2 = \mathbf{q}_1^T \mathbf{q}_1, \quad (12)$$

(vasen yläindeksi ilmoittaa askeleen ja oikea alaindeksi iteraatiokierroksen) tällöin saadaan kuormaparametri skaalattua samaan suuruusluokkaan siirtymäsuureiden kanssa.

Sijoittamalla määritelmät (11) ja iteraatioaskeleen lauseke (7) yhtälöön (10), saadaan kuormaparametrin muutos ratkaistua yhtälöstä

$$\delta\lambda_{i+1} = -\frac{\Delta \mathbf{u}_i^T \mathbf{D}_{i+1}}{\Delta \mathbf{u}_i^T \mathbf{q}_{i+1} + \alpha^2 \Delta \lambda_i}. \quad (13)$$

Tätä algoritmia kutsutaan päivitettyksi normaalitasomenetelmäksi, ja sen havainnollinen esitys yksidimensioisessa tapauksessa on esitetty kuvassa 2a.

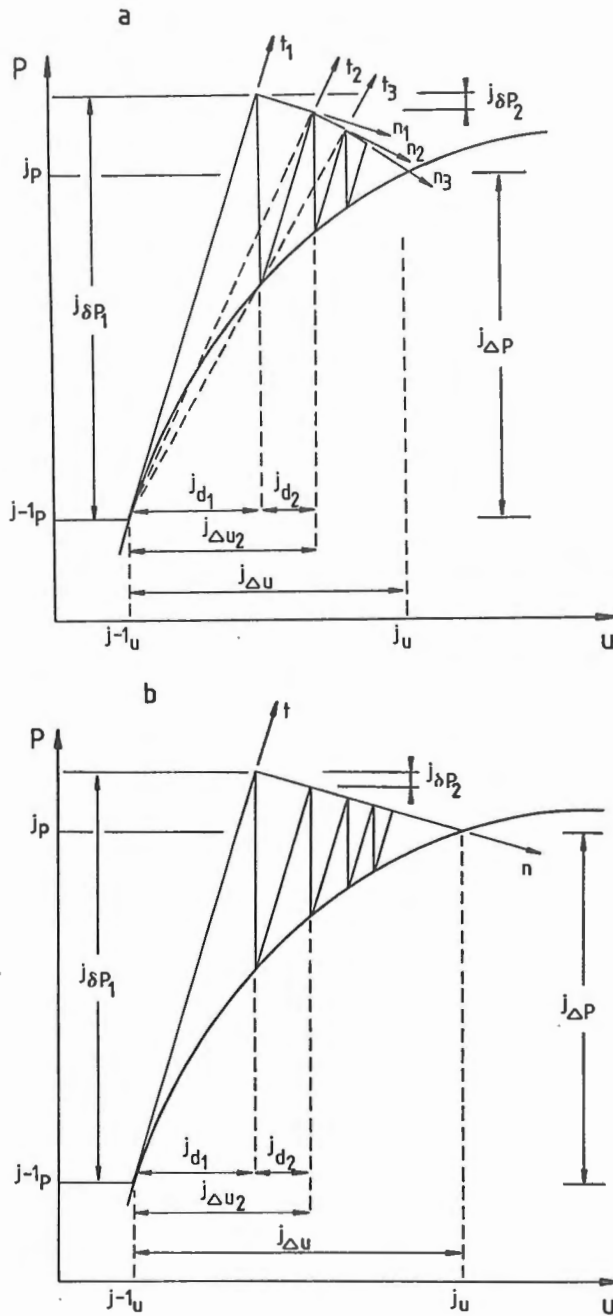
Mikäli tangenttitason vektori pidetään vakiona askeleen ajan, eli asettamalla

$$\mathbf{t}_i = \mathbf{t}_1 = [\Delta \mathbf{u}_1 \ \Delta \lambda_1]^T = [\mathbf{d}_1 \ \Delta \lambda_1]^T, \quad (14)$$

saadaan kuormaparametrin muutos lausekkeesta

$$\delta\lambda_{i+1} = -\frac{\mathbf{d}_1^T \mathbf{D}_{i+1}}{\mathbf{d}_1^T \mathbf{q}_{i+1} + \alpha^2 \Delta \lambda_1}. \quad (15)$$

Tätä tapaa kutsutaan pelkästään normaalitasomenetelmäksi ja sitä on havainnollistettu kuvassa 2b.



Kuva 2. Päivitetty normaalitasomenetelmä (a) ja normaalitasomenetelmä (b) yhdistettynä modifioituun Newton-Raphson iteraatioon.

Kaarenpituusmenetelmät

Kaarenpituusmenetelmissä on rajoiteyhtälö kuorma-siirtymä avaruudessa

neliöllinen

$$\|\Delta \mathbf{u}\|^2 + \alpha^2 (\Delta \lambda)^2 = (\Delta s)^2, \quad (16)$$

jossa $\|\cdot\|$ on tavallinen Euklidinen vektorinormi $\|\mathbf{u}\| = (\mathbf{u}^T \mathbf{u})^{1/2}$. Mikäli siirtymävektori \mathbf{u} sisältää sekä rotaatio- että translaatiopausasteita, ei Euklidinen normi ole paras mahdollinen. Tällöin on syytä käyttää painotettua normia $\|\mathbf{u}\|_C = (\mathbf{u}^T \mathbf{C} \mathbf{u})^{1/2}$, jossa diagonaalimatriisi \mathbf{C} valitaan sopivasti yhteismitallistamaan siirtymävektorin alkioita $1/2$. Tätä matriisiä voidaan pitää vakiona koko laskennan ajan tai päivittää jokaisen askeleen alussa, jolloin algoritmin voisi olettaa paremmin sopeutuvan ratkaistavaan ongelmaan, erityisesti mikäli ratkaisun käyttäytymisessä tapahtuu paikallisesti suuria muutoksia.

Sijoittamalla yhteydet $\Delta \mathbf{u}_i = \Delta \mathbf{u}_{i-1} + \mathbf{D}_i + \delta \lambda_i \mathbf{q}_i$ ja $\Delta \lambda_i = \Delta \lambda_{i-1} + \delta \lambda_i$ yhtälöön (16), saadaan toisen asteen polynomiyhtälö kuormaparametrin muutoksen ratkaisemiseksi:

$$a_i (\delta \lambda_i)^2 + 2b_i \delta \lambda_i + c_i = 0, \quad (17)$$

jossa

$$\begin{aligned} a_i &= \alpha^2 + \mathbf{q}_i^T \mathbf{C} \mathbf{q}_i, \\ b_i &= (\Delta \mathbf{u}_{i-1} + \mathbf{D}_i)^T \mathbf{C} \mathbf{q}_i + \alpha^2 \Delta \lambda_{i-1}, \\ c_i &= (2\Delta \mathbf{u}_{i-1} + \mathbf{D}_i)^T \mathbf{C} \mathbf{D}_i \end{aligned} \quad (18)$$

Mikäli yhtälössä (16) käytetään Euklidista vektorinormia, on matriisi \mathbf{C} tietenkin korvattava identiteettimatriisilla yhtälöissä (18).

Matriisi \mathbf{C} määritetään ensimmäisen iteraation jälkeen yhtälöstä

$$C_{kk} = [{}^1(q_k)_1]^{-2}. \quad (19)$$

Päivitettyä muodossa sitä muutetaan vektorin

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial s} \quad (20)$$

avulla yhtälöistä

$$\begin{aligned} {}^j \tilde{C}_{kk} &= {}^{j-1} C_{kk} \frac{|{}^j v_k|}{|{}^{j-1} v_k|}, \\ {}^j C_{kk} &= \xi^j \tilde{C}_{kk}, \end{aligned} \quad (21)$$

jossa kerroin ξ määritetään ehdosta

$$tr^j \mathbf{C} = tr^{j-1} \mathbf{C}. \quad (22)$$

Yhtälöstä (17) seuraa kuormaparametrin muutokselle kaksi arvoa. Sopiva juuri valitaan siten, että kyseisellä askeleella iteraatioilla $i - 1$ ja i syntyneiden inkrementaalisten siirtymävektoreiden välinen kulma $\theta = \Delta \mathbf{u}_{i-1}^T \Delta \mathbf{u}_i$ on positiivinen. Mikäli molemmat kulmat ovat positiivisia valitaan se juuri, joka on lähinnä yhtälöstä (17) muodostettua lineaarista ratkaisua /11/.

Numeerisissa laskelmissa on havaittu tilanteita, joissa yhtälöllä (17) ei ole reaalisia ratkaisuja. Tällöin voitaisiin palata askeleen alkuun ja pienentää kaarenpituutta (polkuparametrin inkrementtiä) esimerkiksi puoleen. Toinen mahdollisuus on ajatella kaarenpituutta iteraation aikana muuttuvana suureena. Osoitetaan, että on olemassa kaarenpituuden Δs arvo, jolloin yhtälöllä (17) on reaaliset ratkaisut. Tällöin rajoiteyhtälö on muotoa

$$(\Delta \mathbf{u}_i)^T \mathbf{C} \Delta \mathbf{u}_i + \alpha^2 (\Delta \lambda_i)^2 = (\Delta s_i)^2, \quad (23)$$

jossa

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u}_i &= \Delta \mathbf{u}_{i-1} + \mathbf{D}_i + \delta \lambda_i \mathbf{q}_i, \\ \Delta \lambda_i &= \Delta \lambda_{i-1} + \delta \lambda_i, \\ \Delta s_i &= (\beta_{i-1} + \delta \beta_i) \Delta s_1. \end{aligned} \quad (24)$$

Uusi parametri β säätelee nyt kaarenpituuden muuttumista iteraation aikana. Yhtälön (17) kertoimet a_i ja b_i pysyvät samoina, mutta kerroin c_i on

$$c_i = (2\Delta \mathbf{u}_{i-1} + \mathbf{D}_i)^T \mathbf{C} \mathbf{D}_i - [2\beta_{i-1} \delta \beta_i + (\delta \beta_i)^2] (\Delta s_1)^2. \quad (25)$$

Yhtälön (17) diskriminantti on nyt

$$\begin{aligned} D_i &= b_i^2 - a_i c_i \\ &= a_i (\Delta s_1)^2 (\delta \beta_i)^2 + 2a_i \beta_{i-1} (\Delta s_1)^2 \delta \beta_i + b_i^2 - a_i \tilde{c}_i, \end{aligned} \quad (26)$$

jossa

$$\tilde{c}_i = (2\Delta \mathbf{u}_{i-1} + \mathbf{D}_i)^T \mathbf{C} \mathbf{D}_i. \quad (27)$$

Diskriminantin (26) lauseke on siis toisen asteen polynomi $\delta \beta_i$:n suhteen, ja jonka neliöllisen termin kerroin on aina positiivinen. Täten diskriminantti (26) on joko aina positiivinen $\forall \delta \beta$ tai löytyy äärellinen väli $I = (\delta \beta_{i1}, \delta \beta_{i2})$ jolloin se on negatiivinen. Yhtälöstä $D_i = 0$ saadaan

$$\delta \beta_{i1,2} = -\beta_{i-1} \pm \sqrt{\beta_{i-1}^2 + \frac{\tilde{c}_i}{(\Delta s_1)^2} - \frac{b_i^2}{a_i (\Delta s_1)^2}}. \quad (28)$$

Kun $\delta \beta_i$ valitaan $\delta \beta_i = \max\{\delta \beta_{i1}, \delta \beta_{i2}\}$ löydetään yhtälölle (17) reaalin ratkaisu ja laskentaa voidaan jatkaa. Iteraation aikana muuttuvaa kaarenpituutta voidaan

myös käyttää, mikäli halutaan kohdistaa kuormataso tiettyyn arvoon esim. tulostusta varten.

Muita menetelmiä

Karamanlidis & al /13/ samoin kuin Bathe & al /14/ ovat käyttäneet ulkoisen työn vakioinkrementtiä

$$\Delta W = (\lambda_0 + \frac{1}{2}\Delta\lambda_1)\mathbf{P}_{ref}^T\mathbf{q}_1, \quad (29)$$

jota pidetään vakiona iteraation aikana eli

$$\mathbf{P}_{ref}^T(\mathbf{D}_i + \delta\lambda_i\mathbf{q}_i) = 0, \quad (30)$$

josta seuraa kuormaparametrin iteratiiviseksi muutokseksi

$$\delta\lambda_i = \frac{\mathbf{P}_{ref}^T\mathbf{D}_i}{\mathbf{P}_{ref}^T\mathbf{q}_i}. \quad (31)$$

Lähellä rajapistettä vakiotyöinkrementin käyttö voi johtaa hyvin suuriin muutoksiin siirtymässä ($\Delta\lambda \cong 0$). Tämä haitta voidaan välttää, kun siirtymänlisäykset lasketaan ensimmäisellä iteraatiolla käyttäen rajoiteyhtälöä (16). Mikäli ulkoinen kuormavektori \mathbf{P}_{ref} sisältää vain yhden komponentin, kontrolloivat yhtälöt (29)-(31) vain yhden vapausasteen suureiden muuttumista.

SINGULARITEETTIENTIEN MÄÄRITYS

Tarkastellaan yhtälösystemiä (2). Välttämätön ja riittävä ehto systeemin stabiilille tasapainotilalle on se, että ominaisarvotehtävän

$$\mathbf{K}\Phi_i = \omega_i\Phi_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (32)$$

kaikki ominaisarvot ω_i ovat positiivisia ja nolasta poikkeavia. Stabiiliusraja on saavutettu kun

$$0 = \omega_1 = \dots = \omega_k < \omega_{k+1} \leq \dots \leq \omega_n. \quad (33)$$

Tässä esityksessä rajoitutaan yksinkertaisen kriittisen pisteen tapauksiin eli $k = 1$. Sovellutusten kannalta tärkeä ehto kriittisen pisteen olemassaololle on

$$\det(\mathbf{K}) = \prod_{i=1}^n \omega_i = 0. \quad (34)$$

Determinantti voidaan helposti laskea \mathbf{K} :n kolmiohajotelmasta $\mathbf{K} = \mathbf{LDL}^T$

$$\det(\mathbf{K}) = \prod_{i=1}^n d_{ii}, \quad (35)$$

missä d_{ii} on diagonaalimatriisin \mathbf{D} i:s termi. Kuten yhtälöstä (34) voidaan todeta, voi determinantti saada arvon nolla esimerkiksi tilanteessa jossa $\omega_1 < \omega_2 = 0 < \omega_3 \leq \dots \leq \omega_n$. Täten ehtoa (35) voidaan luonnehtia välttämättömäksi mutta ei riittäväksi ehdoksi kriittiselle pisteelle. Tämä vaikeus voidaan unohtaa mikäli kriittinen tila on saavutettu stabiilista tasapainotilasta lähtien (esikriittinen tasapainopolku).

Välttämätöntä on myös erottaa raja- ja haarautumispiste toisistaan. Tässä tehtävässä on polkuparametri s hyvin käyttökelpoinen suure,

$$j_s = \sum_{k=1}^j k \Delta s. \quad (36)$$

Rajapistettä karakterisoi ehto

$$\frac{\partial \lambda}{\partial s} = 0. \quad (37)$$

Haarautumispistettä kuvaa vastaavasti yhtälö /1/

$$\left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \lambda}\right)^T \Phi_1 = 0, \quad (38)$$

jossa Φ_1 on yhtälön (32) alinta ominaisarvoa $\omega_1 = 0$ vastaava ominaisvektori.

Koska ominaisarvotehtävän ratkaisu on työläs toimenpide, pyritään sitä välttämään. Mikäli askelten j ja $j+1$ välillä tangenttijäykkymatriisin merkki on vaihtunut, eli

$$\det({}^j \mathbf{K}) \det({}^{j+1} \mathbf{K}) < 0, \quad (39)$$

eikä faktoroidun jäykkymatriisiin $\mathbf{K} = \mathbf{LDL}^T$ diagonaalitermeistä löydy parillista määrää negatiivisia alkioita, tarkastetaan tällöin ensin yhtälön (37) toteutuminen. Jos nyt löytyy s_{cr} , joka toteuttaa yhtälön (37) ja jolle pätee

$$j_s \leq s_{cr} \leq {}^{j+1} s, \quad (40)$$

on rakenteen tasapainopolulla rajapiste. Mikäli yhtälöt (37) ja (40) toteuttavaa arvoa s_{cr} ei löydy, ratkaistaan linearisoitu ominaisarvotehtävä /15/

$${}^j \mathbf{K} \Phi_i = \omega_i \Delta \mathbf{K} \Phi_i, \quad (41)$$

jossa

$$\Delta \mathbf{K} = {}^j \mathbf{K} - {}^{j+1} \mathbf{K}, \quad (42)$$

ja tutkitaan ehdon (38) toteutunista. Mikäli yhtälö (38) toteutuu, saadaan kriittinen kuorma lausekkeesta

$$\lambda_{cr} = {}^j \lambda + \omega_1 ({}^{j+1} \lambda - {}^j \lambda), \quad (43)$$

jossa ω_1 on yhtälön (41) alin ominaisarvo.

Haarautuminen sekundaaripolulle

Siirtyminen sekundaariselle tasapainopolulle bifurkaatiopisteen jälkeen vaatii hieman lisätoimenpiteitä. Otaksutaan, että kriittiselle pisteelle on löydetty tyydyttävä approksimaatio $(\mathbf{u}_{cr}, \lambda_{cr})$. Ilmaistaan (\mathbf{u}, λ) kriittisen pisteen läheisyydessä parametrin r potenssisarjana

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \mathbf{u}_{cr} + \sum_i \mathbf{v}_i r^i, \\ \lambda &= \lambda_{cr} + \sum_i \eta_i r^i,\end{aligned}\tag{44}$$

ja vastaavasti

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}, \lambda) = \mathbf{F}(\mathbf{u}_{cr}, \lambda_{cr}) + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial r} r + \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial r^2} r^2 + \dots = 0.\tag{45}$$

Ketjuderivoimalla saadaan lausekkeet

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial r} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}} \frac{d\mathbf{u}}{dr} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{dr} = -\mathbf{K}\mathbf{v}_1 + \eta_1 \mathbf{P}_{ref},\tag{46}$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}^2} \frac{d\mathbf{u}}{dr} \left(\frac{d\mathbf{u}}{dr}\right)^T + 2 \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u} \partial \lambda} \frac{d\mathbf{u}}{dr} \frac{d\lambda}{dr} + \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial \lambda^2} \left(\frac{d\lambda}{dr}\right)^2 + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}} \frac{d^2 \mathbf{u}}{dr^2} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \lambda} \left(\frac{d^2 \lambda}{dr^2}\right)\tag{47}$$

Derivaattojen (46) ja (47) on hävittävä, jolloin (46):sta saadaan

$$\mathbf{K}\mathbf{v}_1 = \eta_1 \mathbf{P}_{ref}.\tag{48}$$

Yhtälö (48) on ratkaistavissa, mikäli matriisi \mathbf{K} ei ole singulaarinen. Käytännössä näin voidaan olettaa tapahtuvan. Rajatapauksena, mikäli \mathbf{K} on singulaarinen, on yhtälöllä $\mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{P}_{ref}$ ratkaisu vain mikäli vektori \mathbf{P}_{ref} on kohtisuorassa matriisin \mathbf{K} välittämän lineaarikuvauksen ydinjoukkoa vastaan, eli

$$\mathbf{P}_{ref} \perp \text{Ker}(\mathbf{K}) = \{\mathbf{x} \in R^n | \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{0}\},\tag{49}$$

joka toteutuu bifurkaation tapauksessa yhtälön (38) mukaan. Ratkaisu \mathbf{q}_1 on vielä yksikäsitteinen, mikäli vaaditaan, että $\mathbf{q}_1 \perp \Phi_1$. Derivaatan (47) häviämisestä saadaan

$$\mathbf{K}\mathbf{v}_2 = \eta_1 \mathbf{P}_{ref} + \left(\frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}^2} \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1^T + 2\eta_1 \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u} \partial \lambda} \mathbf{v}_1 + \eta_1^2 \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial \lambda^2} \right),\tag{50}$$

ja jotta yhtälö (50) olisi ratkaistavissa on myös sulkulausekkeen hävittävä. Yhtälöstä (49) havaitaan, että vektori \mathbf{v}_1 on muotoa

$$\mathbf{v}_1 = \xi_1 \Phi_1 + \eta_1 \mathbf{q}_1, \quad \mathbf{q}_1^T \Phi_1 = 0.\tag{51}$$

Sijoittamalla (51) yhtälön (50) sulkulausekkeeseen ja ottamalla pistetulo Φ_1 :n kanssa saadaan yhtälö skalaarikertoimien ξ_1 ja η_1 ratkaisemiseksi

$$a_1 \xi_1^2 + 2a_2 \xi_1 \eta_1 + a_3 \eta_1^2 = 0, \quad (52)$$

jossa

$$\begin{aligned} a_1 &= \Phi_1^T \left(\frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}^2} \Phi_1 \Phi_1^T \right), \\ a_2 &= \Phi_1^T \left(\frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}^2} \Phi_1 \mathbf{q}_1^T \right), \\ a_3 &= \Phi_1^T \left(\frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}^2} \mathbf{q}_1 \mathbf{q}_1^T \right). \end{aligned} \quad (53)$$

Edellä mainittujen lausekkeiden muodostaminen käyttäen hyväksi \mathbf{F} :n toisia derivaattoja ei ole mielekästä. Kertoimille (53) voidaan muodostaa approksimaatioita käyttäen hyväksi raja-arvoja

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{\Phi_1^T \mathbf{F}(\mathbf{u}_{cr} + \mu \Phi_1)}{\mu^2}, \\ a_3 &= 2 \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{\Phi_1^T \mathbf{F}(\mathbf{u}_{cr} + \mu \mathbf{q}_1)}{\mu^2}, \\ a_2 &= \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{\Phi_1^T \mathbf{F}(\mathbf{u}_{cr} + \mu(\Phi_1 + \mathbf{q}_1))}{\mu^2} = \frac{1}{2}(a_1 + a_3). \end{aligned} \quad (54)$$

Esimerkiksi a_2 :n lauseke saadaan kehittämällä $\mathbf{F}(\mathbf{u}_{cr} + \mu(\Phi_1 + \mathbf{q}_1))$ Taylorin sarjaksi $\mathbf{F}(\mathbf{u}_{cr})$:n ympäristössä

$$\begin{aligned} \phi_i F_i(\mathbf{u}_{cr} + \mu(\Phi_1 + \mathbf{q}_1)) &= \phi_i [F_i(\mathbf{u}_{cr}) + F_{i,j}(\mathbf{u}_{cr})(\phi_j + q_j)\mu \\ &\quad + \frac{1}{2} F_{i,j,k}(\mathbf{u}_{cr})(\phi_j + q_j)(\phi_k + q_k)\mu^2 + \dots]. \end{aligned} \quad (55)$$

Koska $F_i(\mathbf{u}_{cr}) = 0$ ja $F_{i,j}(\mathbf{u}_{cr})\phi_j = 0$ ja $\phi_i F_{i,j}(\mathbf{u}_{cr})q_j = 0$ saadaan yhtälöstä (55) lauseke (54)₃.

Kertoimesta a_1 nähdään onko bifurkaatio symmetrinen vaiko antisymmetrinen. Mikäli $a_1 = 0$ /1/, /7/ on kyseessä symmetrinen haarautuminen ja tällöin voidaan valita $\eta_1 = 0$ ja $\xi_1 = \Delta s$. Mikäli $a_1 \neq 0$ etsitään ratkaisua muodossa.

$$\mathbf{d}_1 = \mathbf{v}_1 = \epsilon(\tilde{\xi}_1 \Phi_1 - \mathbf{q}_1). \quad (56)$$

Negatiivista \mathbf{q}_1 :n etumerkkiä voidaan perustella sillä, että antisymmetrisen bifurkaation jälkeinen sekundaaripolun tasapainotila on epästabiili. Sijoittamalla (56) yhtälöön (52) saadaan $\tilde{\xi}_1$ ratkaistua

$$\tilde{\xi}_1 = \frac{a_2 \pm \sqrt{a_2^2 - a_1 a_3}}{a_1}, \quad (57)$$

josta valitaan itseisarvoltaan suurempi juuri. Vektorin \mathbf{d}_1 pituuden määrittävä kerroin ϵ saadaan rajoiteyhtälöstä

$$\|\mathbf{d}_1\|^2 + \alpha^2 \epsilon^2 = (\Delta s)^2, \quad (58)$$

jolloin kuormaparametrin muutos on

$$\delta \lambda_1 = -\epsilon = -\sqrt{\frac{(\Delta s)^2}{\xi_1^2 + \|\mathbf{q}_1\|^2 + \alpha^2}}. \quad (59)$$

Askelkoon määrittäminen

Ensimmäisen askeleen ensimmäisellä iteraatiolla määritetään kaarenpituuden alkuarvo

$${}^0 \Delta s = {}^0 \Delta \lambda \sqrt{\|\mathbf{q}_1\|^2 + \alpha^2}. \quad (60)$$

Jotta rakenteen vastetta pystyttäisiin seuraamaan tarkasti, ja algoritmiin toiminnan luotettavuuden ja laskentatyön määrän kannalta on usein edullista muuttaa kaarenpituuden arvoa laskennan aikana.

Yksinkertainen ja usein hyväksi havaittu keino seuraavan askeleen $j + 1$ kaarenpituuden määrittämiseksi on sitoa se edellisen askeleen tasapainoiteraatioiden lukumäärään /10/. Kaavan muodossa

$${}^{j+1} \Delta s = {}^j \Delta s \sqrt{\frac{I_d}{jI}}, \quad (61)$$

jossa I_d on haluttu iteraatiomäärä askelta kohden ja jI on iteraatioiden lukumäärä askeleella j .

Lähestyttäessä tasapainopolun singulaarisia pisteitä, on havaittu hyväksi pienentää askelpituutta. Kriittisen pisteen läheisyyttä voidaan estimoida esimerkiksi ekstrapoloimalla jäykkymatriisin determinantin ja polkuparametrin välistä riippuvuutta.

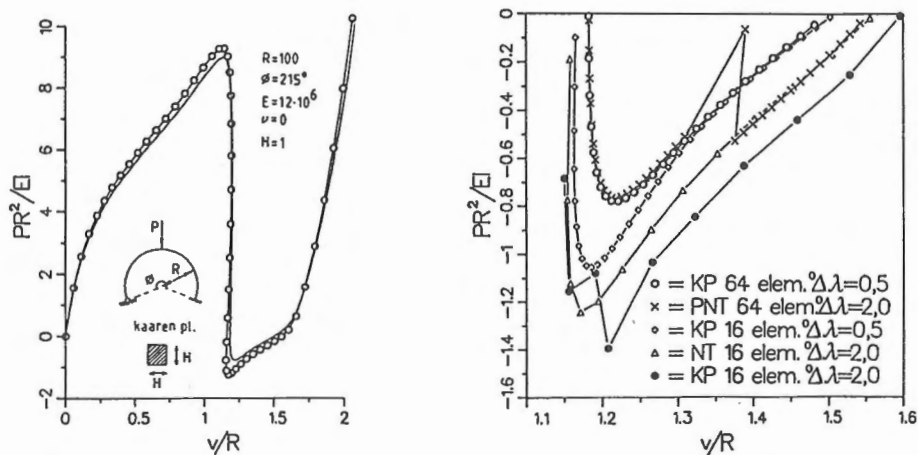
NUMEERISET ESIMERKIT

Yleistä

Esimerkkeinä on analysoitu tasokehiä, ja elementtinä on käytetty Timoshenkon palkkiteoriaan perustuvaa kehäsauvaelementtiä, jossa siirtymiä u, v ja ϕ on approksimoitu lineaarisilla polynomeilla /16/. Materiaalin otaksutaan noudattavan Hooken lakia. Elementin tasapainoyhtälöt on muodostettu päivitetyn (inkrementaalisen) Lagrangen tarkastelutavan mukaan. Esimerkkilaskelmat on suoritettu opetusministeriön VAX 8600 tietokoneella.

Syvä kaari

Eri normaalitaso- ja kaarenpituusmenetelmien muotoja on vertailtu analysoimalla syvää ympyränkaarta /17/. Laskenta suoritettiin jakamalla kaari sekä 16 että 64 elementtiin. Tiheämmällä elementtijaolla analysoituna käytettiin myös pientä askelkokoa ${}^0\Delta\lambda = 0,5EI/R^2$. Kaarenpituusmenetelmät (KP) ja normaalitasomenetelmä (NT) toimivat tällöin hyvin, mutta päivitetyllä normaalitasomenetelmällä laskettaessa (PNT) tapahtui toisen rajapisteen jälkeen yllättävä poikkeama tasapainopolutta (ks. kuva 3b).



Kuva 3. Syvä kaari: a) lakipisteen pystysiirtymä. Yhtenäinen viiva: 64 elementtiä, alkuaskel $0,5EI/R^2$, ketjuviiva 16 elementtiä, alkuaskel $2,0EI/R^2$. b) Yksityiskolha toisen rajapisteen läheisyydestä.

Käytettäessä suurta askelkokoa ${}^0\Delta\lambda = 2EI/R^2$ ja harvempaa elementtiverkkoa saavutettiin paras tulos yllättäen NT-menetelmällä, kun taas PNT-menetelmällä laskettuna iteraatio hajaantui ennen toista rajapistettä. Suppenemistoleranssina on käytetty $TOLD = 10^{-4}$ ja suppenemista testattiin epäyhtälöllä

$$\frac{q}{1-q} \|\mathbf{d}_i\| < TOLD \|\Delta \mathbf{u}_i\|,$$

jossa

$$q = \max\left(\frac{\|\mathbf{d}_i\|}{\|\mathbf{d}_{i-1}\|}, \frac{\|\mathbf{d}_{i-1}\|}{\|\mathbf{d}_{i-2}\|}\right), \quad q \in \left[\frac{1}{2}, 1\right).$$

KP-menetelmissä jouduttiin toisen rajapisteen läheisyydessä tilanteisiin joissa kuormaparametrin muutokselle ei ollut reaalista ratkaisua. Mikäli tällöin palattiin askeleen alkuun ja pienennettiin kaarenpituuden inkrementtiä puoleen, jolhti menettely hyvin pieniin askeliin. Kun diskriminantin (26) negatiivisuus vältettiin kasvattamalla kaarenpituuden arvoa iteraatioprosessin aikana, tapahtui yllättävä poikkeama tasapainopolulta (ks. kuva 3b). Käytettäessä yhtälöiden (30) ja (31) mukaista menettelyä, hajaantui iteraatio askelkoosta riippumatta hieman ensimmäisen rajapisteen jälkeen. Varmimpaan tulokseen päästiin kun kaarenpituuden inkrementtiä pienennettiin lähestyttäessä rajapistettä ja sen jälkeen asteittain kasvattamalla. Lyhyt yhteenveto on esitetty taulukossa 1.

Taulukko 1. Syvä kaari, eri menetelmien vertailua, 16 elementtiä.

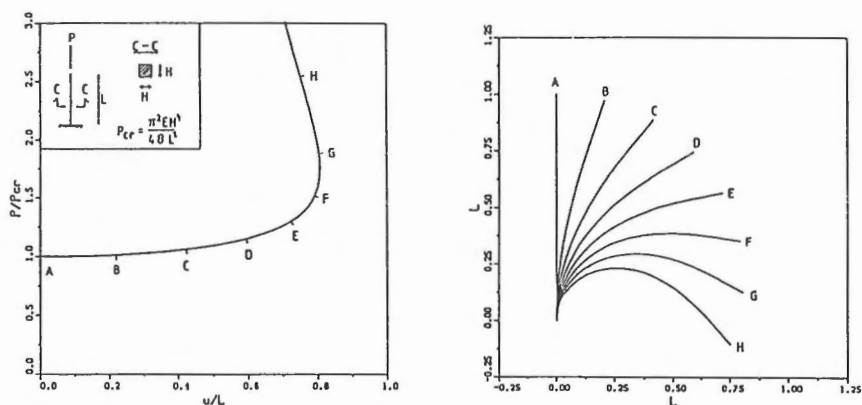
men.	$^0 \Delta \lambda [EI/R^2]$	N	I	cpu [s]	ND	huom.
KP(I)	0,5	153	709	142	29	
KP(C)	0,5	104	530	106	15	
NT	0,5	-	-	-	-	div. askel. 141 jälk.
PNT	0,5	210	973	191	-	ajaut. pois tsp. pol.
KP(I)	2,0	39	256	49	3	ajaut. pois tsp. pol.
KP(C)	1,5	35	254	49	2	ajaut. pois tsp. pol.
NT	2,0	50	345	64	-	
PNT	2,0	-	-	-	-	div. askel. 31 jälk.
KP(I)	1,5	51	314	61	4	
KP(C)	1,0	50	313	61	2	

N on askelten ja I vastaavasti iteraatioiden lukumäärä. ND on niiden iteraatioiden lukumäärä, joilla havaittiin negatiivinen diskriminantti.

Nurjaldussauva

Yksinkertainen testiesimerkki symmetrisestä stabiilista haarautumisesta on ulokepalkki, jota kuormitetaan pistekuormalla palkin akselin suunnassa sen vapaassa päässä. Rakenne jaettiin neljään yhtäsuureen elementtiin. Alkuaskeleena käytettiin $^0 \Delta \lambda = 0,3P/P_{cr}$ ja kaarenpituutta muutettiin kaavan (61) mukaisesti, jossa $I_d = 4$. Maksimiaskelkooksi asetettiin $\Delta \lambda_{max} = 4P/P_{cr}$. Minimiaskelkookoa ei rajoitettu.

Laskenta maksimikuorman arvoon $3P_{cr}$ vaati 102 askelta ja 367 Newton--Raphson iteraatiota kun $TOLD = 10^{-4}$. Mikäli kaarenpituuden inkrementtiä ei olisi muutettu laskennan aikana, olisi laskenta vaatinut useita tuhansia askeleita.



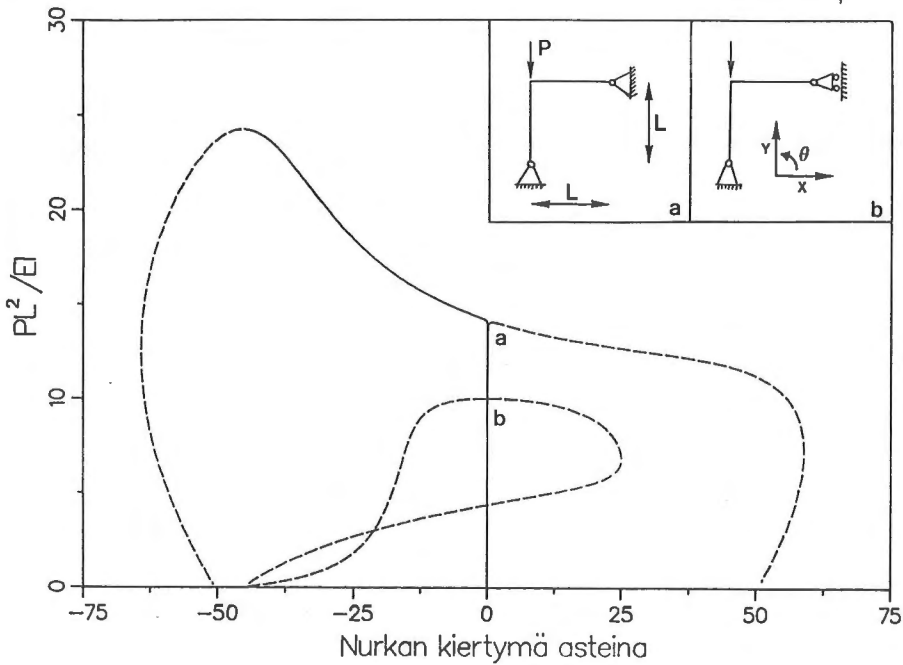
Kuva 4. Nurjhdussauvan vapaan pään vaakasiirtymä ja rakenteen taipumamuotoja jälkikriittisessä tilassa.

Nurjhduskuormaksi saatiin $1,026P_{cr}$, ja virhe vapaan pään vaakasiirtymässä kuorma arvolla $2,541P_{cr}$ oli alle 2%.

Roordan kehä

Tasapainopolun antisymmetristä haarautumismuotoa edustaa kuvan 5 nivelpäisen suorakulmkehän vaste. Kyseistä kehää on Roorda /1/ tutkinut sekä kokeellisesti että teoreettisesti. Mikäli sauvojen aksiaalijäykkyys oletetaan äärettömän suureksi, on tasapainopolulla haarautumispiste kuorman arvolla $P_{cr} = 13,886EI/L^2$. Todellisissa rakenteissa, kuten myös tässä esitetyissä laskelmissa on aksiaalijäykkyydellä äärellinen arvo. Tämä johtaa ideaalitapauksen bifurkaation muuttumiseen rajapisteeksi. Rakenne on hyvä testiesimerkki numeerisen algoritmin kyvystä erottaa raja- ja haarautumispiste toisistaan tapauksissa, missä niiden ero on hyvin pieni.

Numeeriset laskelmat suoritettiin jakamalla kehä 20:een yhtäsuureen elementtiin. Alkuaskel oli $3EI/L^2$ ja $I_d = 4$. Tasapainopolun stabiilille haaralle päästiin asettamalla nurkkapisteeseen (kuvassa 5 myötöpäivään pyörittävä) häiriömomentsi $M = eP$, missä epäkeskisyydeksi e valittiin $e = H/200$ (H sauvan poikkileikkauksen korkeus, $H = L/60$). Epäkeskisyyden $e = H/2000$ ei riittänyt kompensoimaan pilarin kokoonpuristumisesta aiheutuvaa vastapäivään kiertävää häiriömomenttia, ja tällöin rakenteen tasapainotila muuttui rajapisteen kautta stabiilista epästabiiliksi, samoin kuin häiriömomentittakin.



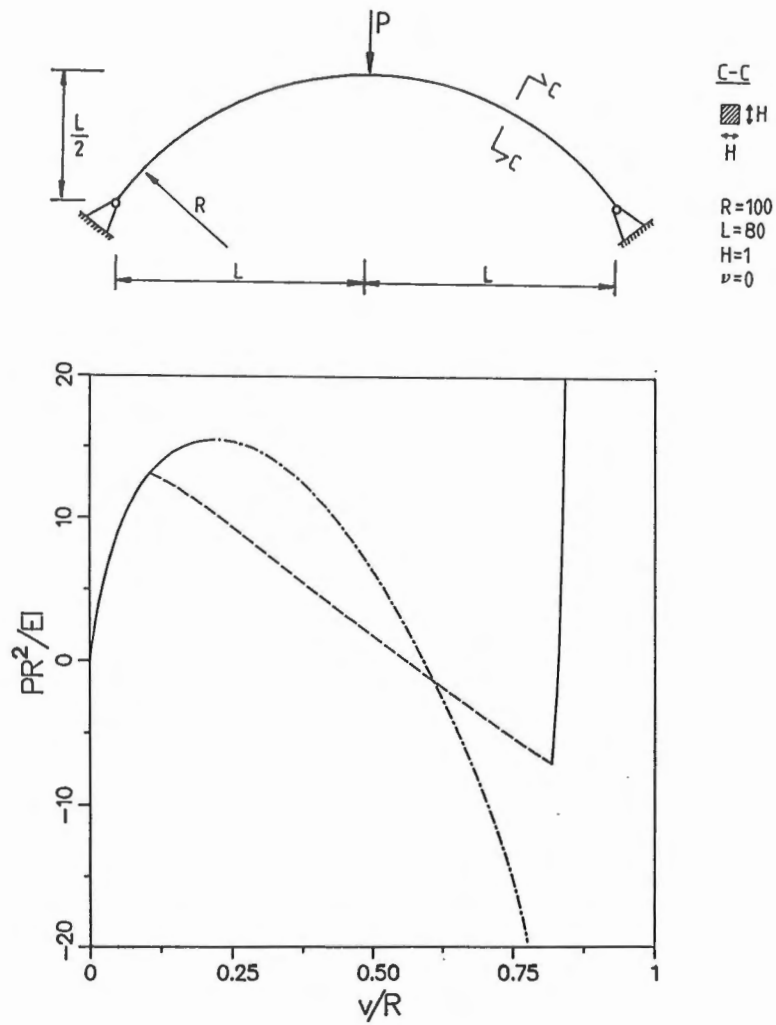
Kuva 5. Roordan kehän tasapainopolkuja.

Mikäli vaakapalkin pystytuki poistetaan (kuva 5, tapaus b) saadaan rakenne, jossa esiintyy symmetrinen epästabiili haarautuminen. Tälläisen rakenteen kriittinen kuorma on $P_{cr} = \pi^2 EI/L^2$. Vasemmanpuoleisen tasapainopolun haara on saatu käyttämällä yhtälössä (51) ominaisvektorina sen vastalukua.

Kaksinivelkaari

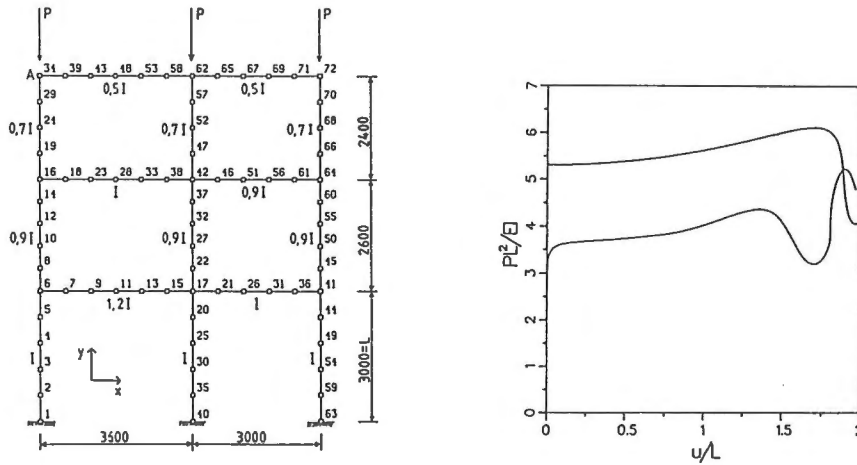
Kuvassa 6 on esitetty kannoistaan nivelöity ympyränkaari, jota kuormitetaan lakipisteestä pistekuormalla. Mikäli rakennetta ei tueta sivusuunnassa, esiintyy epälineaarisen esikriittisen tasapainopolun jälkeen antisymmetrinen bifurkaatio kuorman arvolla $P_{cr} = 13,0EI/R^2 / 18/$. Sivusuunnassa tuettua kaarta voidaan kuormittaa vielä tämän arvon yli, kunnes rakenteen tasapainotila muuttuu epästabiiliksi läpilyönnin seurauksena kuorman arvolla $P_{cr} = 15,2EI/R^2$.

Rakenne jaettiin 30:een yhtäsuureen elementtiin ja alkuaskel oli ${}^0\Delta\lambda = 3EI/R^2$, $TOLD = 10^{-5}$, $I_d = 4$. Bifurkaatio saavutettiin 10 askeleen jälkeen kuorman arvolla $P = 13,08EI/R^2$. Symmetristä läpilyöntiä analysoitiin käyttäen kaaren puolikkaalle 15 elementtiä. Rajapiste saavutettiin samaa alkuaskelta



Kuva 6. Kaksinivelkaari, geometriatiedot ja lakipisteen pystysiirtymä. Stabiili tasapainotila on merkitty ehyellä viivalla. Antisymmetrisen nurjahdusmuodon epästabiili haara on piirretty katkoviivalla, ja symmetrisen läpilyönnin jälkeinen epästabiili polku pistekatkoviivalla.

käyttään 12 askeleen jälkeen kuorman ollessa $P = 15,45EI/R^2$.



Kuva 7. Kolmikerroskehä, rakennetiedot ja elementtiverkko sekä keskipilarin yläpään vaakasiirtymät.

Kolmikerroskehä

Viimeisenä esimerkkinä tarkastellaan kolmikerroksista ja kaksilaivaista kehää, jota kuormittavat pistekuormat pilareiden yläpäässä. Nurjahduskuormaksi saadaan $P_{cr} = 5,31EI/L^2$, kun rakenne on jaettu 75 elementtiin kuvan 7 mukaisesti. Ero lähteessä /19/ esitettyyn arvoon on n. 6%.

Muuttamalla keskipilarin toisen kerroksen osan jäykkyyttä arvosta $0,9I \rightarrow 0,1I$ saadaan aikaan tilanne, jossa tämän rakennososan stabiiliudenmenetys on määräävä rakenteen kantokyvyn. Kuten kuvasta 7 havaitaan alkavat siirtymät kasvaa huomattavasti jo kuorman arvosta $P \cong 3,5EI/L^2$ lähtien.

KIRJALLISUUTTA

- [1] Thompson, J.M.T., Hunt, G.W., A general theory of elastic stability. John Wiley & sons, London 1973. 322 s.
- [2] Wright, E.W., Gaylord, E.H., Analysis of unbraced multistory steel rigid frames. J. Engng. Div., ASCE, Vol. 94 (1968), s. 1143-1163.
- [3] Sharifi, P., Popov, E.P., Nonlinear buckling analysis of sandwich arches. J. Engng. Div., ASCE, Vol. 97. (1971), s. 1397-1412.
- [4] Bergan, P.G., Horrigmoe, G., Kråkeland, B., Soreide, T.H., Solution

- techniques for non-linear finite element problems. IJNME, Vol. 12 (1978), s. 1677-1696.
- [5] Haisler, W.E., Strickling, J.A., Displacement incrementation in non-linear structural analysis by the self-correcting method. IJNME, Vol. 11 (1977), s. 3-10.
- [6] Batoz, J.L., Dhatt, G., Incremental displacement algorithms for nonlinear problems. IJNME, Vol. 14 (1979), s. 1262-1267.
- [7] Riks, E., The incremental solution of some basic problems in elastic stability. Report NLR TR 74005 U, National Aerospace Laboratory NLR, The Netherlands (1974), 62 s.
- [8] Riks, E., An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems. IJSS, Vol. 15 (1979), s. 529-551.
- [9] Wempner, G.A., Discrete approximations related to nonlinear theories of solids. IJSS, Vol. 7 (1971), s. 1581-1599.
- [10] Ramm, E., Strategies for tracing the nonlinear response near limit points. Proc. Europe-U.S. Workshop. Springer-Verlag, Berlin, 1981.
- [11] Crisfield, M.A., A fast incremental/iterative solution procedure that handles snap-through. Comp. & Struct., Vol. 13 (1981), s. 55-62.
- [12] Tuomala, M., Kouhia, R., Adaptive finite element analysis of geometrically nonlinear elasto-plastic structures. TTKK, rakennustekniikan osasto, rakennustatiikka, raportti 10, 1986, 20 s.
- [13] Karamanlidis, D., Honecker, K., Knothe, K., Large deflection finite element analysis of pre- and postcritical response of thin elastic frames. Proc. Europe-U.S. Workshop. Springer-Verlag, Berlin, 1981.
- [14] Bathe, K-J., Dvorkin, E.N., On the automatic solution of non-linear finite element equations. Comp. & Struct., Vol. 17 (1983), s. 871-879.
- [15] Fujikake, M., A simple approach to bifurcation and limit point calculations. IJNME, Vol. 21 (1985), s. 183-191.
- [16] Tuomala, M., Eräiden yksinkertaisten rakenteiden staattisen ja dynaamisen vasteen analysointi elementtimenetelmällä. TKK, rakennusinsinööriosasto, rakennetekniikan laitoksen julkaisu 30, Otaniemi 1980, 183 s.
- [17] DaDeppo, D.A., Schmitd, R., Instability of clamped hinged circular arches subjected to a point load. Trans. ASME. (Dec. 1975), s. 894-896.
- [18] Huddleston, J.V., Finite deflections and snap-through of high circular arches. J. Appl. Mech., Vol. 35 (1968), s. 763-769.
- [19] Yang, J.N., Shinozuka, M., Stability analysis of complex structures. IJSS, Vol. 7 (1971), s. 459-472.

Reijo Kouhia, dipl.ins., tutkimusassistentti, Suomen Akatemia