

JÄÄVOIMAN AIHEUTTAMAT ARKTISEN ÖLJYNPORAUSRAKENTEEEN
ITSEHERÄTTEISET VÄRÄHTELYT

Raimo Rätty

Rakenteiden Mekaniikka, Vol. 19
No 4 1986, s. 52...78

TIIVISTELMÄ: Syvillä arktisilla vesillä monopodirakenne on käytökelpoinen öljyn- ja kaasunporausrakenteena. Jään murtolujuusominaisuuksista johtuen rakenne voi joutua itseherätteiseen värähtelytilaan. Muodostetun matemattisen mallin ja tietokoneohjelman avulla on mahdollista ennustaa systeemin dynaaminen vaste ja kaikki voimasuureet. Herätevoiman sijainnin vaikutusta rakenteen käyttäytymiseen tutkittiin numeerisesti.

JOHDANTO

Viime aikoina on arktisilla vesillä kuten Beaufortin merellä, Kanadan itärannikolla ja Neuvostoliiton pohjoisilla merialueilla tehty merkittäviä öljy- ja kaasulöytöjä. Tämän vuoksi on arktisten öljyn- ja kaasunporausrakenteiden tutkimus ja kehittäminen ollut huomattavan mielenkiinnon kohteena /1,2/. Arktisen avomerirakenteen oleellinen ominaisuus on kyky vastustaa jään aiheuttamia rasituksia. Jääkuorma voi aiheutua liikkuvasta kiintojäälautasta, ahtojäästä tai jäävuoresta. Eteläisillä arktisilla vesillä voivat myös aaltokuormat olla kesäaikaan merkittäviä. Yksivuotiset kiintojäälautat voivat tulla kahden metrin, monivuotiset jopa kuuden metrin paksuisiksi. Jäälautan halkaisija voi olla yli 10 km ja vauhti 1 ms^{-1} . Ahtojääkasautuma saattaa kasvaa 30 m korkeaksi. Jäävuoren massa voi olla 10 miljoonaa tonnia ja vauhti 0.5 ms^{-1} . On selvää, että nämä kohdistavat avomerirakenteisiin erittäin suuria voimia /3,4/.

Eräs hyvin käytökelpoinen ratkaisu arktiseksi öljynporausrakenteeksi on hiekasta ja sorasta rakennettu tekosaari

/5/. Näitä voidaan käyttää kahdenkymmenen metrin ja betonilla tai teräksellä vahvistettuna n. kolmenkymmenen metrin syvyyksiin asti. Syvemmissä vesissä tulee täyttöaineen suuri määrä ongelmaksi, sillä saaren (rannan kaltevuus ~ 1:10) tilavuus kasvaa voimakkaasti korkeuden kasvaessa. Aaltojen aiheuttama eroosio voi myös aiheuttaa ongelmia. Kun veden syvyys on 20-100 m, voidaan käyttää betonista ja/tai teräksestä valmistettua meren pohjaan kiinnitettyä yksijalkaista rakennetta, ns. monopodia /2/. Tämä voi olla sylinterin tai kartion muotoinen tai näiden yhdistelmä. Oleellista on, että rakenne voidaan tehdä pinnan läheisyydessä kapeaksi, jolloin jäävoimat jäävät pienemmiksi. Mikäli jääolosuhteet ovat helpot, saattaa öljynporauslaivan käyttö tulla kyseeseen /6/.

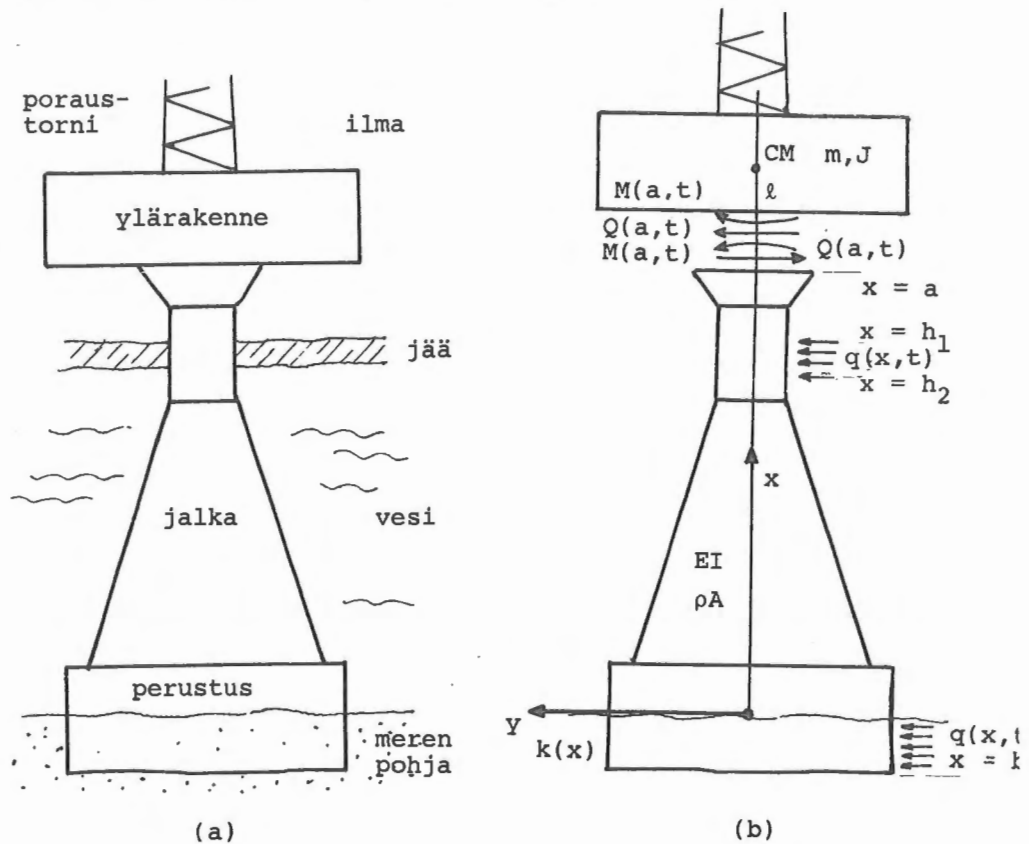
Kun jäälautta törmää rakenteeseen, voi jään murtuminen tapahtua pääasiallisesti kahdella eri tavalla /7/. Jos rakenteen seinämä on pystysuora tai lähes pystysuora, tapahtuu jään murskaantuminen seinämää vasten ja tuloksena on pientä jäämurskaa. Jos taas seinämä on riittävän kalteva, jään reuna alkaa kohota sitä pitkin, kunnes taivutusmomentti katkaisee jään ja syntyy suurehkoja jään palasia. Jään murtumislujuus on edellisessä tapauksessa selvästi suurempi kuin jälkimmäisessä. Toisaalta kaltevaseinäisissä rakenteissa (esim. kartio) rakenteen pinta-ala jään kohdalla saattaa tulla suuremmaksi ja ne ovat myös kalliimpia kuin yksinkertaiset pystysuorat rakenteet (esim. lieriö).

Kenttämittauksissa on havaittu, että jään murskaantuessa rakennetta vasten rakenne voi joutua itseherätteiseen värähtelytilaan /8,9/. Tällöin pieni poikkeama tasapainotilasta kasvattaa poikkeamaa edelleen (ts. tasapainoasema on epästabili) ja systeemi päättyy jatkuvaan värähtelytilaan, rajakäyrävärähtelyihin (limit cycle oscillations). Merkittävää on, että tällöin mm. rakenteen sisäiset jännitykset voivat huomattavasti poiketa staattisen tilan jännityksistä ja väsymisilmiö on otettava huomioon rakennetta suunniteltaessa. Tämän vuoksi on tärkeää kyetä ennustamaan rakenteen dynaaminen vaste mahdollisimman hyvin.

Tässä työssä tutkitaan monopodirakenteen dynaamista vastetta, kun jää rikkoutuu murskaantumalla vasten rakennetta.

YKSIJALKKAISEN ÖLJYNPORAUSRAKENTEEEN KUVAUS

Kuvassa 1(a) on esitetty tyyppillinen monopodirakenne. Se koostuu poraustornista, ylärakenteesta (majoitustilat, varastot yms.), jalasta sekä meren pohjaan kiinnitetystä perustuksesta. Kuvan tapauksessa jalka ja perustus muodostuvat sylinterin- ja kartionmuotoisista palkeista, mutta ne voivat olla myös muunlaisia suoria palkkirakenteita. Mikäli meren pohja on kovaa kalliota, voidaan jalka ankkuroida siihen jäykästi esim. vaijereita ja pultteja käyttäen. Valittu koordinaatisto, yläosan vapaakappalekuvio ja rakenneparametrit (ks. kohta liikeyhtälöt) on esitetty kuvassa 1(b).



Kuva 1. (a) Tyyppillinen öljyporausrakenteen monopodirakenne. (b) Koordinaatisto, vapaakappalekuvio ja rakenneparametrit.

JÄÄVOIMA

Vuorovaikutuksen eri vaiheet

Kun vauhdilla V ajelehtiva jäälautta kohtaa monopodin, kohdistaa se tähän jääkuorman $q(x,t)$, mikä saa aikaan palkkirakenteen taipumisen. Kosketuksen voimakkuudesta riippuen voidaan erottaa seuraavat jään ja rakenteen vuorovaikutuksen eri vaiheet:

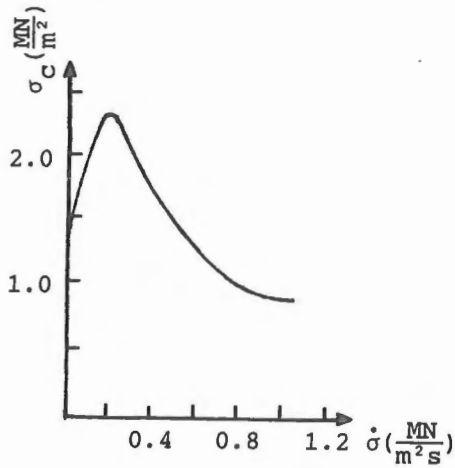
- ei jääkosketusta eli vapaa vaihe, jolloin $q(x,t) \equiv 0$
- jääkosketus ilman jään murtumista eli kuljetusvaihe (kinemaattinen vaihe), jolloin jään kohdalla $\dot{y}(x,t) = V$
- jääkosketus jään murtuessa eli murtovaihe (kineettinen vaihe), jolloin $q(x,t) = f(\dot{y}(x,t))$.

Vapaa vaihe on ilmeisen selvä. Kuljetusvaiheessa jään kosketuskohta liikkuu vauhdilla V , ja jääkuorman $q(x,t)$ määrää rakenteen dynaaminen käyttäytyminen. Ensimmäisen värähtelymuodon tapauksessa tämä kuorma on yksinkertainen kasvava ajan funktio, mutta yleisessä tilanteessa se voi olla voimakkaasti oskilloiva. Murtovaiheessa jääkuorma on rakenteen paikallisen nopeuden $\dot{y}(x,t)$ funktio. Edellä mainitut kolme vaihetta voivat vuorotella jaksonaikana useita kertoja. Myös on mahdollista, että ensimmäinen tai ensimmäinen ja toinen vaihe puuttuvat.

Jääkuorma murtovaiheen aikana

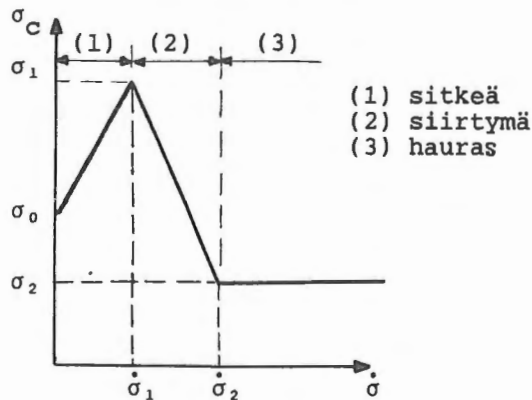
Oleellinen tekijä jään ja rakenteen vuorovaikutuksessa on jään murtolujuuden σ_c riippuvuus jään jännityksen aikaderivaatasta $\dot{\sigma}$. Tätä riippuvuutta on tutkittu kokeellisesti erittäin paljon. Tyypillinen tulos on esitetty kuvassa 2. Nähdään, että oltaessa käyrän maksimin vasemmalla puolella jään lujuus kasvaa kuormitusnopeuden kasvaessa ja maksimin oikealla puolella käy päinvastoin.

Koska jään lujuuteen liittyy suuri määrä parametreja, ei kuvan 2 relaatio ole kaikissa tilanteissa täysin eksakti,



Kuva 2. Jään murtolujuus jään jännityksen aikaderivaatan funktiona /10/.

mutta käytännöllisesti katsoen kaikki mittaustulokset osoittavat, että murtolujuuskäyrällä on kuvan 2 tapaan maksimi /7/. Tämä on itseherätteisten värähtelyjen perimmäinen syy! Kuvan 2 käyrää voidaan kuvata varsin tarkasti sopivalla polynomiesityksellä, mutta tässä työssä käytetään murtolujuuskäyrälle kuvan 3 mukaista paloittain lineaarista approksimaatiota /8/. Tästä on mm. se hyöty, että kuvan 3 parametrien merkitys on selväpiirteinen ja niiden vaikutusta systeemin käyttäytymiseen voidaan helposti tutkia. Murtolujuuskäyrässä



Kuva 3. Jään murtolujuuskäyrän paloittain lineaarinen approksimaatio.

voidaan erottaa sitkeä, siirtymä ja hauras alue. Kullakin alueella kuvaaja on suora, joten voidaan kirjoittaa

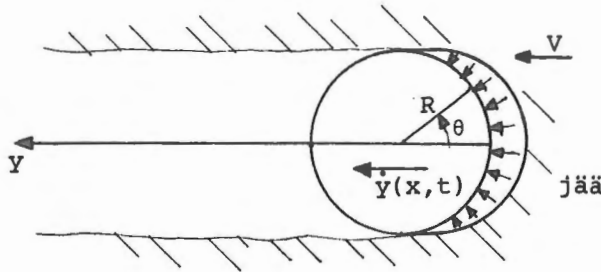
$$\sigma_c = \alpha_j + \beta_j \dot{\sigma} \quad (j = 1, 2, 3) , \quad (1)$$

missä $\alpha_1 = 1.67$, $\alpha_2 = 3.06$, $\alpha_3 = 0.83 \text{ MN/m}^2$ ja $\beta_1 = 4.15$, $\beta_2 = -2.78$ ja $\beta_3 = 0.0 \text{ s}$.

Yhtälössä (2) on esitetty Blenkarn-Määttäsen mallin /8,11/ mukainen relaatio jään murtolujuuden laskemiseksi sylinterimäiselle rakenteelle (kuva 4)

$$\dot{\sigma} = (V - \dot{y}(x, t)) \cos^2 \theta \frac{4\sigma_c(\dot{\sigma})}{\pi R} , \quad (2)$$

missä R on poikkileikkausympyrän säde ja $V - \dot{y}(x, t)$ jään suhteellinen nopeus rakenteeseen nähden. Yhtälö (2) määrää murtolujuuden σ_c rakenteen nopeuden $\dot{y}(x, t)$ funktiona. Käyttäen



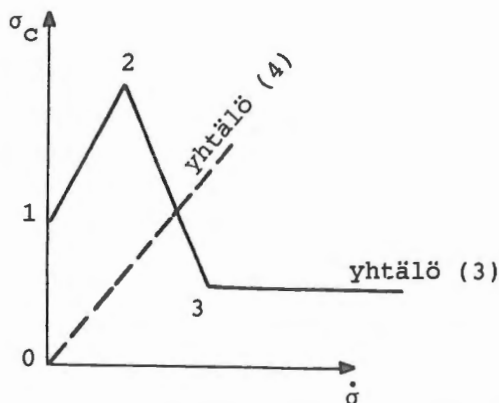
Kuva 4. Jään murtuminen sylinterimäistä rakennetta vasten.

paloittain lineaarista approksimaatiota (1) voidaan yhtälö (2) esittää parina

$$\sigma_c = \alpha_j + \beta_j \dot{\sigma} , \quad (3)$$

$$\sigma_c = \frac{\pi R}{4(V - \dot{y}) \cos^2 \theta} \dot{\sigma} . \quad (4)$$

Tämä voidaan tulkita graafisesti kuvan 5 osoittamalla tavalla. Murtovaiheessa on voimassa $\dot{y} \leq V$. Murtovaiheen alkaessa



Kuva 5. Yhtälöparin (3), (4) graafinen esitys.

$\dot{y} = V$ ja yhtälö (4) esittää pystysuoraa. Tällöin ollaan murtolujuuskäyrällä pisteessä 1. Kun nyt \dot{y} alkaa pienetä, suoran (4) kulmakerroin pienenee ja "toimintapiste" siirtyy huipun 2 kautta hauralle alueelle pisteen 3 oikealle puolelle. Jään aiheuttama kuorma-alkio y -suunnassa Frederkingin /12/ kosinilaki huomioiden on

$$\sigma_c(\dot{\sigma}, \theta) R d\theta \cdot \cos\theta = \sigma_c(\dot{\sigma}) \cos^2\theta R d\theta, \quad (5)$$

joten murtovaiheen jääkuorma saa muodon ($\dot{\sigma} = \dot{\sigma}(\dot{y})$)

$$f(\dot{y}) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sigma_c(\dot{y}) \cos^2\theta R d\theta. \quad (6)$$

Murtolujuus $\sigma_c(\dot{y})$ voidaan ratkaista yhtälöistä (3) ja (4). Yhtälössä (6) esiintyvä integraali on mahdollista laskea suljetussa muodossa. Lausekkeet tulevat kuitenkin pitkiksi, joten on viisaampaa käyttää numeerista integrointia ja interpolointia. Huomattakoon vielä, että kuljetusvaiheessa toimintapiste on pisteiden 0 ja 1 välillä (kuva 5).

LIIEKEYHTÄLÖT

Rakenteen liikeyhtälöt muodostetaan kuvan 1(b) merkintöjä käyttäen. Ylärakennelmat idealisoidaan jäykäksi kappaleeksi, jonka massa on m , hitausmomentti massakeskipisteen suhteen J ja massakeskipisteen etäisyys jalan yläreunasta ℓ . Jalkaa ja perustusta käsitellään palkkina, jonka jäykkyys on $EI(x)$ ja massa pituusyksikköä kohti $\rho A(x)$. Merenpohjan alustakerroin on $k(x)$. Gravitaatiokiihtyvyyden g jätetään tarkastelusta pois, sillä painovoiman vaikutus poikittaisvärähtelyihin on muutaman prosentin suuruusluokkaa /13/. Taivutusmomentti $M(a,t)$ ja leikkausvoima $Q(a,t)$ ovat kuvan 1(b) suuntavaliinnoilla

$$M(a,t) = EI(a)y''(a,t) \quad (7)$$

ja

$$Q(a,t) = [EI(x)y''(x,t)]'_{x=a} \quad (8)$$

Jäykän kappaleen translaatio- ja rotaatioyhtälöt ovat (kulma $y'(a,t) \ll 1$)

$$m[\ddot{y}(a,t) + \ell\ddot{y}'(a,t)] = Q(a,t) \quad (9)$$

$$-J\ddot{y}'(a,t) = M(a,t) + \ell Q(a,t) \quad (10)$$

Palkin poikittaisvärähtelyjen osittaisdifferentiaaliyhtälö on

$$[EI(x)y''(x,t)]'' + c(x)\dot{y}(x,t) + \rho A(x)\ddot{y}(x,t) = q \quad (11)$$

missä pilkku tarkoittaa paikkaderivaattaa, piste aikaderivaattaa, $c(x)$ määrää palkkirakenteen vaimennuksen ja kuormalle q pätee

- vapaa vaihe: $q(x,t) \equiv 0$

- kuljetusvaihe: $q(x,t)$ määräytyy kinemaattisesta ehdosta, kun $h_2 \leq x \leq h_1$

$$q(x,t) = -ky(x,t), \text{ kun } b \leq x \leq 0$$

$$q(x,t) = 0 \text{ muualla}$$

- murtovaihe: $q(x,t) = f(\dot{y}(x,t))$, kun $h_2 \leq x \leq h_1$

$$q(x,t) = -ky(x,t), \text{ kun } b \leq x \leq 0$$

$$q(x,t) = 0 \text{ muualla.}$$

Palkin alapäässä taivutusmomentti ja leikkausvoima häviävät, joten alapään reunaehdot ovat

$$EI(b)y''(b,t) = 0, \quad (12)$$

$$[EI(x)y''(x,t)]'_{x=b} = 0. \quad (13)$$

Mikäli alapää on ankkuroitu kallioon jäykästi tai jos maa on erittäin kiinteää ($k \rightarrow \infty$), saadaan ehtojen (12) ja (13) tilalle ehdot

$$y(0,t) = 0, \quad (14)$$

$$y'(0,t) = 0. \quad (15)$$

Tehtävänä on ratkaista osittaisdifferentiaaliyhtälö (11) kun reunaehtoina ovat (9), (10), (12) ja (13) (tai (14) ja (15)).

LIIEKEYHTÄLÖIDEN RATKAISU ELEMENTTIMENETELMÄÄ KÄYTTÄEN

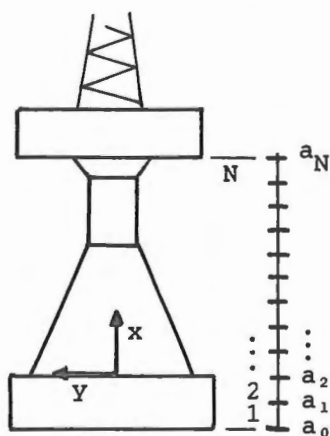
Koska jääkuorma q on monimutkainen ja voimakkaasti epälineaarinen, ei liikeyhtälöiden analyttinen ratkaiseminen ole mahdollista. Tämän vuoksi on käytettävä numeerisia menetelmiä, joista äärellisten elementtien menetelmä (FEM) on erittäin käyttökelpoinen.

Elementtimenetelmän mukainen ratkaisu voidaan suorittaa kahdella tavalla. Paikkamuuttujan eliminointi saadaan aikaan, kun yhtälö (11) kerrotaan puolittain muotofunktioilla ja suoritetaan integrointi palkin yli. Näin päädytään äärelliseen differentiaaliyhtälöryhmään, jossa aika on ainoa muuttuja. Toinen mahdollisuus on diskretoida itse rakenne ja muodostaa Lagrangen funktio ja pelkästään aikamuuttujaa sisältävät liikeyhtälöt /14/. Jälkimmäinen tapa on elegantti ja se esitetään seuraavassa.

Pidetään systeemiä aluksi konservatiivisena ja lisätään vaimennus yhtälöihin myöhemmin. Lagrangen funktioksi tulee

$$L = \int_b^a \frac{1}{2} [\rho A \dot{Y}^2 - EI Y''^2 - ky^2] dx + \frac{1}{2} m [\dot{Y}(a,t) + \lambda \dot{Y}'(a,t)]^2 + \frac{1}{2} J \dot{Y}'(a,t)^2 . \quad (16)$$

Diskretoidaan palkki kuvan 6 tapaan. Elementtien lukumäärä



Kuva 6. Palkkirakenteen diskretointi.

olkoon N . Merkitään elementin päiden siirtymiä ja kaltevuuk-
sia seuraavasti ($s = 1, \dots, N$)

$$y(a_{s-1}, t) = u_{1s}(t) , \quad (17)$$

$$y'(a_{s-1}, t) = u_{2s}(t) , \quad (18)$$

$$y(a_s, t) = u_{3s}(t) , \quad (19)$$

$$y'(a_s, t) = u_{4s}(t) . \quad (20)$$

Yhdistetään elementin päät käyrällä, jonka kaltevuus yhtyy
elementin kaltevuuteen molemmissa päissä. Tuloksena on funk-
tio

$$y_s(x, t) = \sum_{i=1}^4 \phi_{is}(x) u_{is}(t) , \quad a_{s-1} \leq x \leq a_s \quad (21)$$

missä muotofunktiot $\phi_{is}(x)$ ovat tiettynä kolmannen asteen
polynomeja /14/. Approksimoidaan todellista ratkaisua $y(x, t)$
välillä $[a_{s-1}, a_s]$ funktiolla $y_s(x, t)$ ($s = 1, \dots, N$). Tällöin
saadaan

$$L \approx \sum_{s=1}^N \int_{a_{s-1}}^{a_s} \frac{1}{2} [\rho A \dot{y}_s^2 - EI y_s''^2 - ky_s^2] dx + \frac{1}{2} m [\dot{y}_N(a, t) + \ell \dot{y}_N'(a, t)]^2 + \frac{1}{2} J \dot{y}_N'(a, t)^2 . \quad (22)$$

Nyt voidaan paikkaintegrointi suorittaa, jolloin L saadaan
lausutuksi funktioiden $u_{is}(t)$ ja $\dot{u}_{is}(t)$ ($i = 1, \dots, 4; s =$
 $1, \dots, N$) avulla. Valitaan systeemin yleistetyiksi koor-
dinaateiksi funktiot (huomaa yhteys $u_{3s} \equiv u_{1(s+1)}$, $u_{4s} \equiv$
 $u_{2(s+1)}$)

$$U_{2s-1}(t) = u_{1s}(t) , \quad (23)$$

$$U_{2s}(t) = u_{2s}(t) , \quad s = 1, \dots, N+1 \quad (24)$$

ja lausutaan Lagrangen funktio näiden avulla. Tulos voidaan kirjoittaa muotoon

$$L = \frac{1}{2} \{\dot{U}\}^T [M] \{\dot{U}\} - \frac{1}{2} \{U\}^T ([EI] + [k]) \{U\} + \frac{1}{2} m [\dot{U}_{2N+1} + \ell \dot{U}_{2N+2}]^2 + \frac{1}{2} J \dot{U}_{2N+2}^2, \quad (25)$$

missä $\{U\}$ on pystyvektori $\{U_1, U_2, \dots, U_{2N+2}\}^T$ ja $(2N+2) \times (2N+2)$ -matriisit $[M]$, $[EI]$ ja $[k]$ löytyvät viitteestä /14/. Nyt voidaan kirjoittaa Lagrangen liikeyhtälöt

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{U}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial U_i} = Q_i \quad (i = 1, \dots, 2N+2). \quad (26)$$

Tässä Q_j on potentiaalienergiaan sisältymättömien voimien aiheuttama yleistetty voima. Mikäli alapäässä esiintyy kinemaattisia reunaehtoja (esim. $U_1 = U_2 = 0$), sijoitetaan nämä Lagrangen funktioon, jolloin kyseiset pakkovoimat määräytyvät vastaavista yhtälöistä (26).

Yleistetyt voimat saadaan laskemalla ensin kuorman ja muotofunktioiden avulla integraalit

$$f_{is} = \int_{a_{s-1}}^{a_s} q(x,t) \phi_{is}(x-a_{s-1}) dx \quad (i = 1, \dots, 4; s = 1, \dots, N). \quad (27)$$

Muodostamalla pystyvektorit $\{f\}_s = \{f_{1s}, f_{2s}, f_{3s}, f_{4s}\}^T$ ja käyttämällä viitteen /14/ $[A]_s$ -matriiseja saadaan

$$\begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_{2N+2} \end{Bmatrix} = \sum_{s=1}^N [A]_s^T \{f\}_s. \quad (28)$$

Jos kuormana on ainoastaan kohdassa $x = h \in [a_{M-1}, a_M]$ vaikuttava pistevoima $F(t)\delta(x-h)$, yksinkertaistuvat integraalit (27) muotoon

$$f_{iM} = F\phi_{iM}(h-a_{M-1}) \quad (i = 1, \dots, 4) \quad (28')$$

$$f_{iS} = 0 \quad (i = 1, \dots, 4; s \neq M),$$

jolloin yhtälön (28) summaan jää ainoastaan yksi termi.

Idealisoidaan jäävoima kohdassa $h = (h_1+h_2)/2$ eli jään keskikohdalla vaikuttavaksi pistevoimaksi. Jäävoimalle F eri vaiheissa pätee

- vapaa vaihe: $F(t) = 0 \quad (29)$

- kuljetusvaihe: $F(t) = K\{V(t-t_0) - [y(h,t)-y(h,t_0)]\}, \quad (30)$

missä t_0 on kuljetusvaiheen alkuhetki.

Rajalla $K \rightarrow \infty$ tämä vastaa kinemaattista ehtoa $\dot{y}(h,t) = V$.

- murtovaihe: Koska jäälautan paksuus rakenteen korkeuteen nähden on verraten pieni, voidaan jään kosketusalueella approksimoida $\dot{y}(x,t) \approx \dot{y}(h,t)$. Jäävoima pituusyksikköä kohti lasketaan kaavasta (6). Jäävoimaksi tulee

$$F(t) = f(\dot{y}(h,t))(h_2-h_1). \quad (31)$$

Käyttäen merkintöjä $[M]_{ij} = M_{ij}$, $[EI]+[k] = [K]$ ja $[K]_{ij} = K_{ij}$ saadaan Lagrangen yhtälöt (26) muotoon

$$\sum_{j=1}^{2N+2} M_{ij} \ddot{U}_j + \sum_{j=1}^{2N+2} K_{ij} U_j = Q_i \quad (i = 1, \dots, 2N)$$

$$\sum_{j=1}^{2N+2} M_{2N+1,j} \ddot{U}_j + \sum_{j=1}^{2N+2} K_{2N+1,j} U_j + m(\ddot{U}_{2N+1} + \ell \ddot{U}_{2N+2}) = Q_{2N+1} \quad (32)$$

$$\sum_{j=1}^{2N+2} M_{2N+2,j} \ddot{U}_j + \sum_{j=1}^{2N+2} K_{2N+2,j} U_j + m\ell(\ddot{U}_{2N+1} + \ell \ddot{U}_{2N+2}) + J \ddot{U}_{2N+2} = Q_{2N+2}.$$

Matriisimuodossa differentiaaliyhtälöryhmä (32) on

$$[\tilde{M}]\{\ddot{U}\} + [\tilde{K}]\{U\} = \{Q\} . \quad (33)$$

Liiketyhtälöihin on vielä lisättävä rakenteen vaimennus. Tämän tarkka kuvaaminen on erittäin vaikeaa. Yleensä käytetään ekvivalenttia ortogonaalista viskoosia vaimennusta $[\tilde{C}]\{\dot{U}\}$. Liiketyhtälöt (33) täydentyvät siis muotoon

$$[\tilde{M}]\{\ddot{U}\} + [\tilde{C}]\{\dot{U}\} + [\tilde{K}]\{U\} = \{Q\} . \quad (34)$$

Suoritetaan vielä yhtälöryhmän (34) vasemman puolen diagonalisointi. Olkoon $[\tilde{P}]$ yhtälöryhmän (33) vapaiden värähtelyjen ($\{Q\} = \{0\}$) painotettu modaalimatriisi. Tehdään koordinaattimuunnos

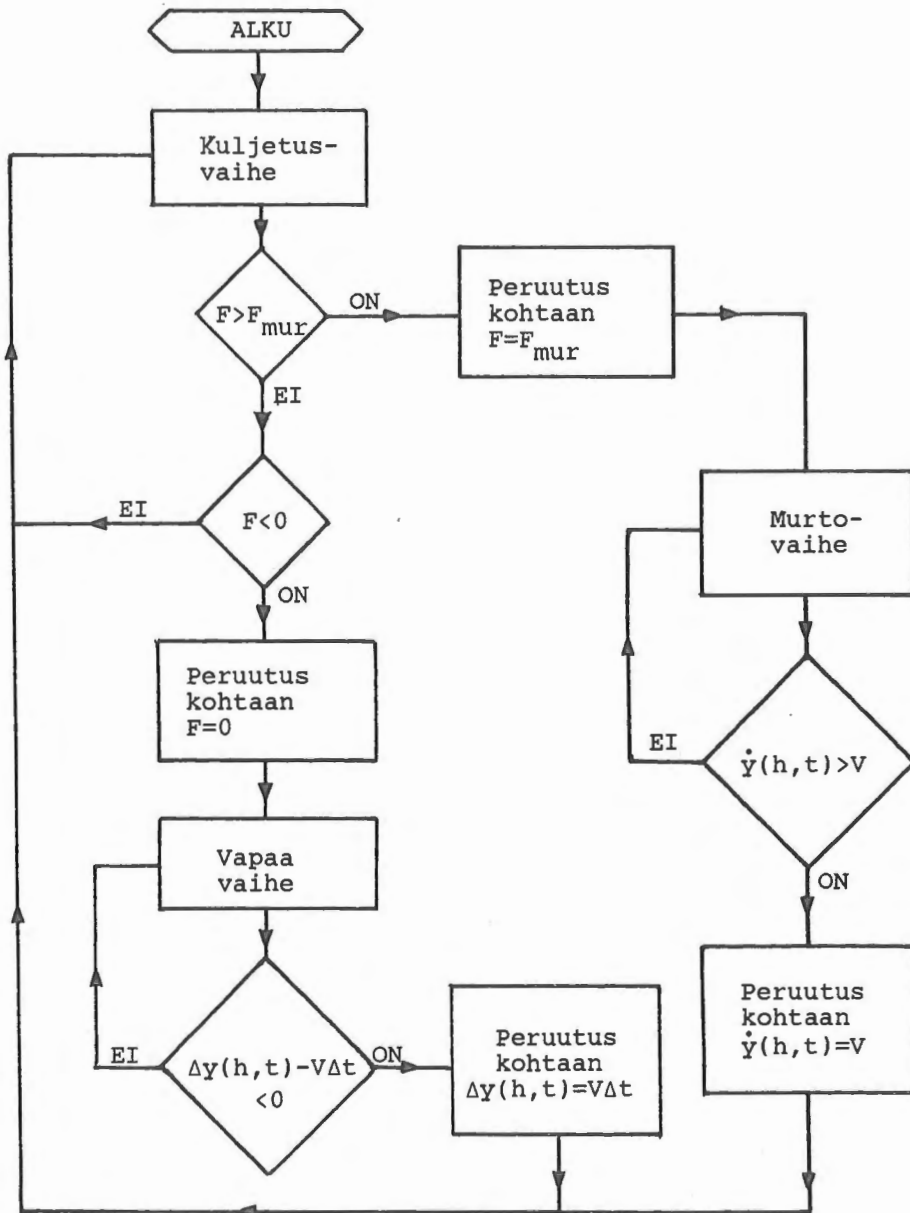
$$\{U\} = [\tilde{P}]\{\xi\} \quad (35)$$

ja kerrotaan (34) vasemmalta matriisilla $[\tilde{P}]^T$, jolloin saadaan /15/

$$\{\ddot{\xi}\} + [2\xi\omega]\{\dot{\xi}\} + [\omega^2]\{\xi\} = [\tilde{P}]^T\{Q\} , \quad (36)$$

missä $[2\xi\omega]_{ii} = 2\zeta_i\omega_i$, $[\omega^2]_{ii} = \omega_i^2$, ω_i ja ζ_i ovat vapaan värähtelyn i :n moodin ominaiskulmataajuus ja suhteellinen vaimennusvakio. Suhteellinen vaimennusvakio on helppo mitata kullekin moodille ja sille voidaan myös muodostaa analyytisiä lausekkeita /16/.

Jään ja rakenteen vuorovaikuttaessa integroidaan yhtälöitä (36) numeerisesti. Koko ajan tarkkaillaan, mikä vuorovaikutuksen vaihe on meneillään ja valitaan voima sen mukaisesti. Kuvassa 7 on tilanne esitetty lohkokaaavion muodossa. Kussakin vaiheessa tarkistetaan jokaisen aika-askeleen jälkeen, onko vielä saman vaiheen ehto voimassa. Jos näin ei ole, haetaan vaiheen vaihdon rajakohta ja siirrytään seuraavaan vaiheeseen. Lisäksi joka vaiheessa talletetaan systeemin käyttäytymisen kannalta oleellista tietoa.



Kuva 7. Jään ja rakenteen vuorovaikutuksen lohkokaavio.

F_{mur} on jään murtumisen rajavoima. $\Delta y(h,t)$ ja $V\Delta t$ ovat rakenteen ja jään vapaassa vaiheessa kulkemat matkat.

DIMENSIOTARKASTELU

Tarkastellaan merenpohjaan jäykästi kiinnitettyä monopodia, jonka jalkaosa on suora sylinteri. Taulukossa 1 on lueteltu probleemassa esiintyvät suureet sekä niiden dimensiottomat vastineet. Näihin on päästy sylinterin suureisiin a , ρA ja EI suhteuttamalla. Voidaan helposti osoittaa, että siirtymällä laaduttomiin suureisiin (myös derivaatat laaduttomien aika- ja paikkamuuttujien suhteen) probleeman kaikki yhtälöt säilyttävät alkuperäisen muotonsa, kunhan vain niissä suoritetaan korvaus $a \rightarrow 1$, $\rho A \rightarrow 1$ ja $EI \rightarrow 1$. On kuitenkin huomattava, että laadullisissa yhtälöissä esiintyvillä luonnonvakioilla α_j ja β_j ($j = 1, 2, 3$) on kiinteät arvot, kun taas laaduttomat suureet $\tilde{\alpha}_j = \frac{a^4}{EI} \alpha_j$ ja $\tilde{\beta}_j = \sqrt{\frac{EI}{a^4} \frac{1}{\rho A}} \beta_j$ ovat muuttuvia parametreja. Jos laadulliset (todelliset) parametrit on annettu, määräävät ne laaduttomat suureet yksikäsitteisesti. Jos taas laaduttomien parametrien arvot tunnetaan, määräytyvät $\frac{a^4}{EI}$ ja ρA yksikäsitteisesti ja loput yhtä parametria vaille yksikäsitteisesti (kaikkiaan 10 yhtälöä 11:n parametrin välillä). Näin ollen yksi laaduttoman yhtälön ratkaisu sisältää laadullisen yhtälön vastaavaa parametrijoukkoa vastaavat ratkaisut. Pienoismallikokeita ajatellen tilanteen tekee epäedulliseksi se, että suuretta ρA ei voi skaalata "ylös". Mikäli mallia yksinkertaistetaan asettamalla $\beta_j = 0$, on luonteva skaalaus mahdollinen ja todellisiin parametreihin jää kaksi vapausastetta. Mikäli mallissa olisi esiintynyt vielä vähintään yksi luonnonvakio γ , jota vastaava dimensioton suure ei olisi ollut muotoa $f(\frac{a^4}{EI}, \frac{1}{a^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}) \gamma$, ei minkäänlainen skaalaus olisi enää ollut mahdollista.

Taulukko 1. Probleemassa esiintyvät laadulliset ja laadut-
tomat suureet, kun sylinterimäinen monopodi on
juurestaan jäykästi kiinnitetty.

	Suure	Symboli	Vastaava laadu- ton suure
muuttujat	pituuskoordinaatti	x	x/a
	poikkeama	y	y/a
	aika	t	$\frac{1}{a^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} t$
rakenneparametrit	sylinterin säde	R	R/a
	" pituus	a	1
	" massatiheys	ρA	1
	" jäykkyys	EI	1
	vaimennus	c	$\frac{a^2}{\sqrt{EI\rho A}} c$
	suhteellinen vaimennus	ζ_i	ζ_i
	yläosan massakeskipisteen etäisyys	ℓ	ℓ/a
yläosan massa	m	m/ρAa	
" hitausmomentti	J	J/ρAa ³	
jääparametrit	jään vaikutuskohta	h	h/a
	" paksuus	Δh	Δh/a
	" vauhti	v	$a \sqrt{\frac{\rho A}{EI}} v$
	" lujuusparametri	α_j	$\frac{a^4}{EI} \alpha_j$
	" "	β_j	$\frac{1}{a^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \beta_j$
muita suureita	voima	Q	$\frac{a^2}{EI} Q$
	momentti	M	$\frac{a}{EI} M$

MUUTAMIA ANALYSOINTITULOKSIA

Esitetyn teorian pohjalta laadittiin numeerisen ratkaisun suorittava tietokoneohjelma. Aikaintegroinnissa käytettiin Runge-Kutta-Vernerin viidennen ja kuudennen kertaluvun menetelmää. Taulukosta 1 nähdään, että jo sylinterimäisen monopodin tapauksessa rakenne- ja jääparametrien määrä on toista kymmentä, joten ongelman kokonaisvaltainen hahmottaminen olisi todella laaja tehtävä.

Tunnetusti värähtelymuotojen herääminen riippuu paljolti siitä, mistä kohdasta heräte annetaan. Seuraavissa esimerkeissä varioidaan jään vaikutuskohtaa h ja pidetään muita parametrejä kiinteinä. Oletetaan 40 m korkea teräksinen monopodin jalkaosa, jonka päässä on n. 3 m korkea pinta-alaltaan 400 m² laaja ylärakenne. Parametrien arvoiksi valittiin (SI-järjestelmä)

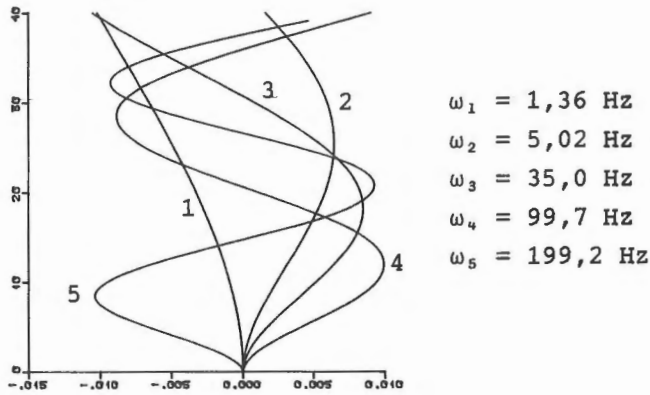
$$\begin{array}{lll}
 R = 1,25 & \zeta_1 = 0,03 & \ell = 1,50 \\
 a = 40,00 & \zeta_2 = 0,05 & m = 4,38 \cdot 10^5 \\
 \rho A = 3,68 \cdot 10^4 & \zeta_3 = 0,05 & J = 1,30 \cdot 10^7 \\
 EI = 3,95 \cdot 10^{11} & \zeta_4 = 0,07 & \Delta h = 2,50 \\
 & \zeta_{5,6,\dots} = 0,10 & \nu = 0,20
 \end{array} \quad (37)$$

ja jään vaikutuskohtaa h varioitiin välillä 18-40 m 2 m:n välein. Elementtien lukumääräksi valittiin viisi. Tämä oli täysin riittävä määrä, sillä neljäs ja viides värähtelymuoto eivät tarkastelluissa tapauksissa heränneet käytännöllisesti katsoen lainkaan.

Kuvassa 8 on esitetty rakenteen viisi ensimmäistä värähtelyn ominaismuotoa sekä niiden ominaiskulmataajuudet. Voidaan helposti osoittaa, että yhtälöiden (34) ratkaisu $\{U\}$ on

$$\{U\} = \sum_n \xi_n \{U\}_n, \quad (38)$$

missä $\{U\}_n$ on ominaismuotoa n vastaava pystyvektori ja ξ_n ($n = 1, \dots, 2N+2$) on ryhmän (36) ratkaisu. Ratkaisun tulkit-

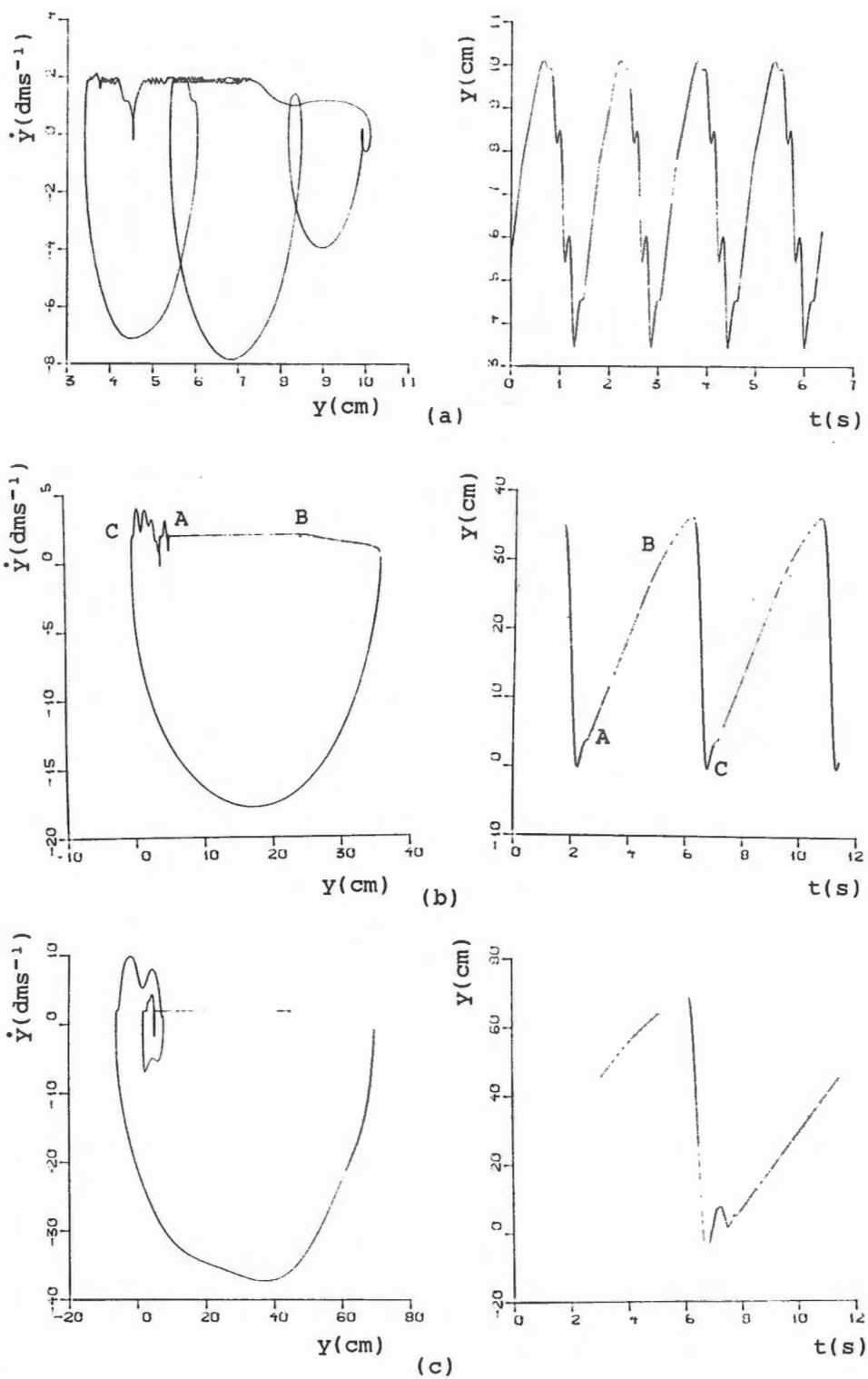


Kuva 8. Monopodirakenteen viisi ensimmäistä ominaisuotoa ja niiden kulmataajuudet. Ylärakenteita ei ole piirretty näkyviin.

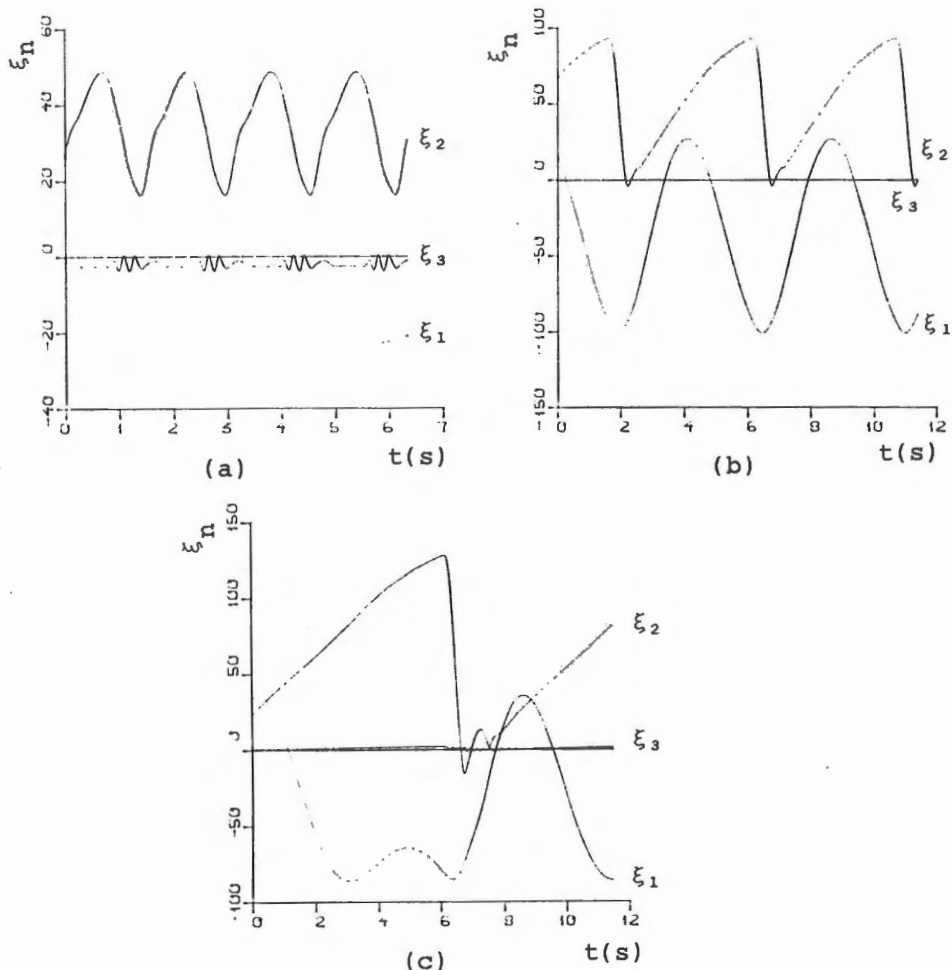
seminen ominaisuotojen lineaarikombinaationa helpottaa tulosten analysointia.

Rakenteen poikkeama $y(h,t)$ jatkuvassa tilassa ja tätä vastaava faasitason (\dot{y} -tason) rajakäyrä on esitetty kuvassa 9 kolmella eri $h:n$ arvolla. Tarkastellaan liikkeen yhtä jaksoa kuvasta 9(b). Kuljetusvaihe alkaa pisteestä A. Tällöin siirtymävauhti on sama kuin jäällä. Kuljetusvaiheessa voi myös esiintyä pieniamplitudista "värinää", jolloin itse asiassa kuljetusvaihe ja murtovaihe seuraavat toisiaan nopeassa tahdissa. Pisteessä B on rakennetta palauttava voima kasvanut niin suureksi, että jää alkaa murtua, jolloin toimintapiste jään murtolujuuskäyrällä (kuva 3) siirtyy kohti maksimikohtaa. Heti kun tämä on ohitettu, jäävoima alkaa pienetä ja siirtyy nopeasti kohti haurasta aluetta. Nyt rakenne voi palata takaisin. Murtovaiheen lopussa siirtymävauhti on taas positiivinen ja ylittää kohdassa C jään vauhdin, jolloin alkaa vapaa vaihe. Välillä CA tapahtuu vielä kaksi törmäystä jään ja rakenteen välillä, minkä jälkeen sykli alkaa alusta.

Kuvasta 9 voidaan todeta, että tapaus (a) poikkeaa selvästi tapauksesta (b). Ero johtuu kolmannen ominaisuodon heittämisestä. Kuvaan 10 on piirretty viiden ensimmäisen ominaisuodon amplitudit ξ_1, \dots, ξ_5 (ks. (38)). Tapauksessa (a)



Kuva 9. Rakenteen poikkeama $y(h,t)$ jatkuvassa tilassa ja vastaava faasitason rajakäyrä. Parametrin h arvot: 71 (a) 20 m, (b) 30 m ja (c) 38 m.

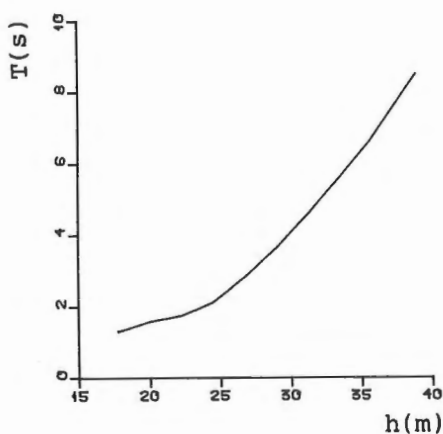


Kuva 10. Oinaismuotoamplitudit ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 , ξ_4 ja ξ_5 .
 Parametrin h arvot: (a) 20 m, (b) 30 m ja (c) 38 m.
 ξ_4 ja ξ_5 ovat käytännöllisesti katsoen nolliä.

on ξ_3 kuljetusvaiheen aikana suurin piirtein vakio, mutta murtovaiheessa siihen syntyy nopeita heilahteluja. Tämä aiheuttaa faasitason rajakäyrään neljä silmukkaa. Kolmannen ominaismuodon lisäksi heräävät ensimmäinen ja toinen, mutta korkeammat muodot eivät vaikuta liikkeeseen käytännöllisesti katsoen lainkaan. Tapauksessa (b) herää ainoastaan kaksi ensimmäistä muotoa ja tapauksessa (c) lisäksi kolmas muoto, mutta niin pienellä amplitudilla, että silmukoita ei rajakäyrään synny. Kolmannen ominaismuodon käyttäytyminen voidaan ymmärtää sen kuvaajan avulla. Tapauksessa (a) jää työntää rakennetta kohdassa $h = 20$ m, joka on lähellä kolmannen muodon harjaa. Kuljetusvaiheessa jää rakenteen massiivinen ylä-

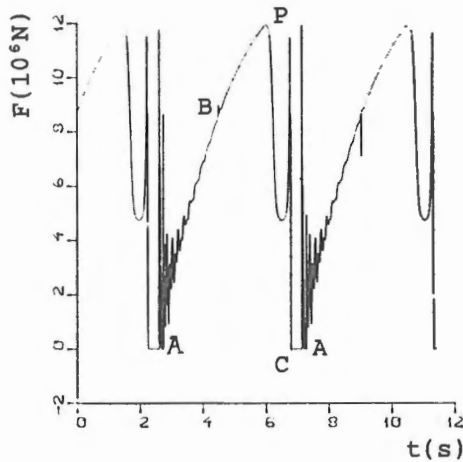
osa hitauden vaikutuksesta hieman jälkeen. Kolmas ominaismuoto virittyy tällöin suurin piirtein staattisesti (kuva 10). Murtovaiheen alussa jäävoima ensin vielä kasvaa ja pienenee sitten nopeasti, jolloin staattinen viritys (alkuehto) muuttuu kolmannen muodon värähtelyiksi. Kun $h = 30$ m, vaikuttaa jää lähellä kolmannen muodon solmupistettä, joten muoto ei voi herätä. Tapauksessa $h = 38$ m on voima jälleen lähellä harjaa, mutta kolmas muoto ei juurikaan herää, sillä jalkaosan keskiosaan ei luontevasti synny toista harjaa (massiivinen kappale keskivaiheilla muuttaisi tilanteen).

Kuvasta 10 nähdään, että siirryttäessä tapauksesta (a) tapaukseen (b) funktion ξ_1 laajuus kasvaa huomattavasti ja sen muoto on lähes harmoninen. Kyseessä on ensimmäisen värähtelymuodon resonanssi, sillä liikkeen jaksonaikaa (kuva 11) vastaava kulmataajuus on $2\pi/4,53$ s = 1,39 Hz, joka on varsin lähellä ominaistajuutta $\omega_1 = 1,36$ Hz. Tapauksessa (c) on liikkeen kulmataajuus $2\pi/8,30$ s = 0,76 Hz jo kaukana ominaistajuuksista ω_1 ja ω_2 , jolloin ξ_1 ja ξ_2 ovat varsin epäharmonisia. Tämä tuo selvästi esille sen, että kyseessä on ulkoisen voiman aiheuttama pakkoliike.



Kuva 11. Jatkuvan tilan ratkaisun jaksonaika T herätekorkeuden h funktiona.

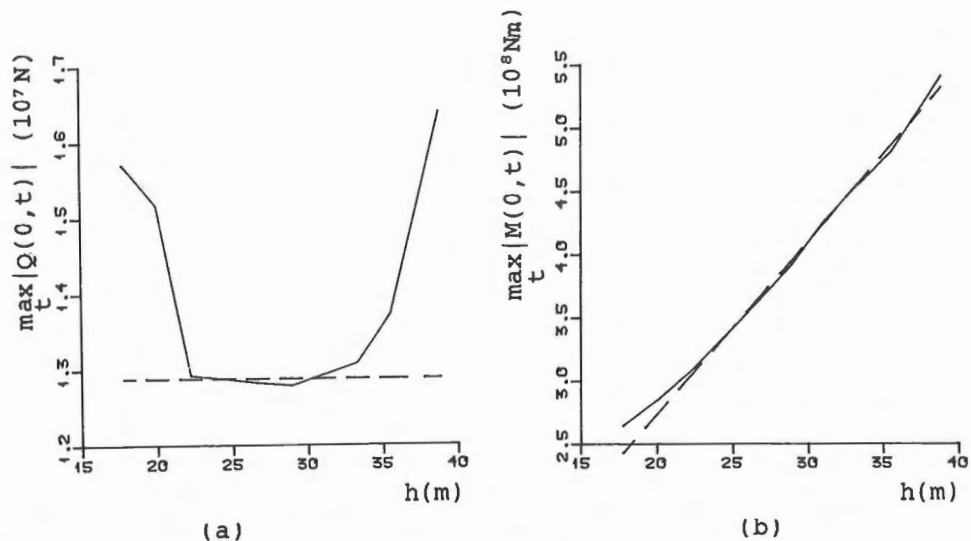
Jäävoima ajan funktiona ($h = 30$ m) on esitetty kuvassa 12. Syklin alkuvaiheessa A edeltävän törmäyksen jälkeen



Kuva 12. Jäävoima ajan funktiona jatkuvassa tilassa. Parametri $h = 30$ m. AB on kuljetusvaihe, BC murtovaihe, P "paalupiikki" ja CA vapaa vaihe, jossa kaksi törmäystä.

tapautuu nopeita voiman vaihteluita. Kuljetusvaiheen loppupuolella tilanne rauhoittuu. Murtovaihe alkaa kohdasta B, voiman huippuarvo ohitetaan ja siirrytään hauralle alueelle. Hieman ennen murtovaiheen loppua, jolloin rakenteen vauhti jää kohdalla lähestyy jään vauhtia, ohitetaan jälleen jään murtolujuuskäyrän maksimi, mikä ilmenee "paalupiikkinä P". Seuraavassa vapaassa vaiheessa on jäävoima nolla, minkä jälkeen näkyy kahden törmäyksen aiheuttamat piikit. Tämän jälkeen tilanne toistuu. Kuvan 12 jäävoimalla on tyypillinen sahalaitainen muoto, joka on havaittu myös monissa jäävoiman mittauksissa /10,11/.

Tarkastellaan lopuksi rakenteen rasituksia. Jos rakenteen poikkeama olisi staattinen, olisi pistevoiman alapuolella leikkausvoima vakio ja taivutusmomentti lineaarisesti kasvava saavuttaen suurimman arvonsa rakenteen juuressa. Pistevoiman yläpuolella olisivat kummatkin nolliä. Kuvassa 13 on esitetty näiden itseisarvojen suurimmat arvot jakson aikana suureen h funktiona. Havaitaan, että leikkausvoimalla on minimi välin keskivaiheilla. Suuret arvot välin alkupäässä johtuvat kolmannesta ominaisuudesta. Ominaisuutensa derivaatoista voi-



Kuva 13. Leikkausvoiman (a) ja taivutusmomentin (b) itseisarvojen suurimmat arvot jakson aikana herätevoiman vaikutuskohdan h funktiona. Katkoviivat esittävät vastaavia staattisen tilanteen kuvaajia.

daan nimittäin päätellä, että kolmas muoto antaa origossa huomattavasti suuremman leikkausvoiman kuin kaksi ensimmäistä, mutta taivutusmomentti origossa on samaa suuruusluokkaa kuin toisella muodolla. Kolmannen ominaismuodon lakatessa heräämästä näkyy tämä leikkausvoiman pienentymisenä, kun taas taivutusmomenttiin sillä ei juurikaan ole vaikutusta. Suuret arvot välin loppupäässä johtuvat taas siitä, että tällä alueella vapaan vaiheen jälkeiset törmäykset jääkenttään ovat rajuja (kuva 9(c)). Törmäys aiheuttaa (dispersiivisen) leikkausvoima-aallon, joka näkyy myös origossa. Kuvaan 13 on vielä piirretty katkoviivoilla staattista tilannetta vastaavat kuvaajat, kun poikkeuttavaksi voimaksi on otettu jään murtolujuuskäyrän maksimia vastaava arvo. Voidaan todeta, että dynaamisen vasteen vaikutus leikkausvoimaan on huomattava, mutta taivutusmomenttiin vähäinen.

YHTEENVETO

Syvillä arktisilla vesillä monopodirakenne on erittäin käyttökelpoinen öljyn- ja kaasunporausrakenteeksi. Jään murtolujuusominaisuuksista johtuen rakenne voi joutua itseherätteiseen värähtelytilaan. Muodostetun matemaattisen mallin ja tietokoneohjelman avulla on mahdollista ennustaa systeemin dynaaminen vaste ja kaikki voimasuureet. Merkittävää dynaamisen vasteen kannalta on se, mitkä ominaismuodot heräävät ja kuinka suurella amplitudilla. Tähän vaikuttaa ennen kaikkea herätevoiman sijainti ja jatkuvan tilan ratkaisun jaksonaika. Jos liikkeen laajuus kasvaa niin suureksi, että takaisinheilahdus ulottuu lähelle pystysuoraa asentoa tai jopa sen toiselle puolelle, on odotettavissa rakenteen irtoaminen jääkentästä. Tätä seuraava jään ja rakenteen törmäys voi olla raju, jolloin kiihtyvyydet ja voimat saavat suuria arvoja.

Mallissa on suuri määrä mielenkiintoisia parametreja, joiden vaikutuksen tutkiminen vaatii laajoja tietokonesimulaatioita. Mallin parantaminen edellyttäisi jään viskoelastisten ominaisuuksien sekä jään lujuuden satunnaisvaihteluiden huomioimista. Pienen täydennyksen jälkeen olisi mahdollista myöskin kuvata jäävuoren törmäystä rakenteeseen.

KIRJALLISUUSVIITTEET

- [1] The seventh international conference on port and ocean engineering under arctic conditions, Vols. 1-4 (Symposiums 27, 28, 37, 38). Valtion teknillinen tutkimuskeskus. Espoo, 1983. 2051 s.
- [2] Croasdale, K.R., The Present State and Future Development of Arctic Offshore Structures. Viite [1], Vol. 4, s. 489-518.
- [3] Cammaert, A.B. & Wong, T.T., Impact of Sea Ice on Offshore Gravity and Floating Platforms. Viite [1], Vol. 4, s. 519-536.
- [4] Danielewicz, B.W., Dunwoody, A.B. & Metge, M., On Estimating Large Scale Ice Forces from Deceleration of Ice Floes. Viite [1], Vol. 4, s. 537-546.
- [5] Neth, V.W., Smith, T. & Wright, B.D., Design, Construction and Monitoring of the Tarsiut Island. Viite [1], Vol. 4, s. 667-678.
- [6] Kotras, T., Baird, A. & Corona, E., Dynamic Response of a Moored Drillship to an Advancing Ice Cover. Viite [1], Vol. 3, s. 433-445.
- [7] Määttänen, M., Modelling the Interaction between Ice and Structures. Viite [1], Vol. 2, s. 745-759.
- [8] Määttänen, M., On Conditions for the Rise of Self-excited Ice-induced Autonomous Oscillations In Slender Marine Pile Structures. Winter Navigation Research Board (Finland and Sweden), Research Report No 25, 1978. 98 s.
- [9] Engelbrektson, A., Observations of a Resonance Vibrating Lighthouse. Viite [1], Vol. 2, s. 855-864.
- [10] Peyton, H.R., Sea Ice Forces. Conference on Ice Pressure against Structures, NRC Technical Memorandum No 92, Laval University, Quebec 1966.
- [11] Blenkarn, K.A., Measurement and Analysis of Ice Forces on Cook Inlet Structures, Offshore Technology Conference Dallas, Texas, 1970.

- [12] Frederking, R. & Gold, L., Ice Forces on an Isolated Circular Pile, POAC-71, Technical University of Norway, Trondheim 1971.
- [13] Lingener, A., Der Einfluss der Erdschwerkraft auf die Eigenfrequenzen von Bauwerken. Rakenteiden mekaniikka 15 (1982) 1, s. 22-32.
- [14] Meirovitch, L., Elements of Vibration Analysis. McGraw-Hill. New York, 1975. 495 s.
- [15] Thomson, W.T., Theory of Vibration with Applications. George Allen & Unwin. London, 1981. 467 s.
- [16] Blevins, R.D., Flow Induced Vibration. Van Nostrand Reinhold Company. New York, 1977. 363 s.

Raimo Rätty, dipl.ins., Teknillinen korkeakoulu, Mekaniikan laitos