

NEWTONIN ITERAATIOT EPÄLINEAARISESSA RAKENNEANALYYSISSÄ

Reijo Kouhia

Rakenteiden Mekaniikka, Vol. 19
No 4 1987, s. 15...51

TIIVISTELMÄ: Artikkelissa tarkastellaan epälineaaristen rakenteiden elementtimenetelmäänalysoinnissa esiintyvien epälineaaristen algebrallisten yhtälösystemien ratkaisua. Erityisesti keskitytään kvasi-Newton tyyppisiin iteraatioihin. Ne asettuvat konvergenssinopeudeltaan täydellisen Newton-Raphson iteraation ja sen modifioituneen version väliin, mutta ovat usein kumpaakin edellämainittua standardimenetelmää taloudellisempia. Päivityskaavat on johdettu myös rajapisteiden ohituksiin kykenevän kaarenpituusmenetelmän tapauksessa, jossa konfiguraation muutosta rajoitetaan kuorma-siirtymä avaruudessa elliptisellä rajoite-ehdolla. Menetelmien suorituskykyä on vertailtu muutamien yksinkertaisten esimerkkilaskelmien avulla.

JOHDANTO

Epälineaarisen yhtälösystemin ratkaisemisella tarkoitetaan probleeman

$$\bar{F}(\bar{u}) = \bar{0} \quad (1)$$

ratkaisemista, missä kuvaus $\bar{F}:R^n \rightarrow R^n$ on \bar{u} :n epälineaarinen funktio (pystyvektoria merkitään tässä kirjoituksessa asettamalla kyseiselle symbolille yläviiva). Koska yhtälön (1) analyyttinen ratkaisu on aivan yksinkertaisimpia tapauksia lukuunottamatta mahdotonta, on turvaututtava numeerisiin menetelmiin. Oden /1/ luokittelee ratkaisualgoritmit jonomenetelmiin (sequential methods) ja satunnaishakumenetelmiin (nonsequential methods). Jonomenetelmissä määrätyillä ope-

raatioilla muodostetaan ratkaisua kohti suppeneva jono $\{\bar{u}_i\}$. Satunnaishakumenetelmissä poimitaan ratkaisukandidaatit menetelmän nimen mukaisesti satunnaisesti. Tyypillisesti jonomenetelmissä joudutaan ensimmäinen testipiste \bar{u}_0 valitsemaan, ja tarkennettu arvio ratkaisulle saadaan iteroimalla

$$\bar{u}_i = \bar{u}_{i-1} + \bar{d}_i, \quad (2)$$

missä \bar{u}_i on yhtälön (1) ratkaisun estimaatti i :nnen iteraation jälkeen. Joissain lähteissä käytetään merkintätapaa

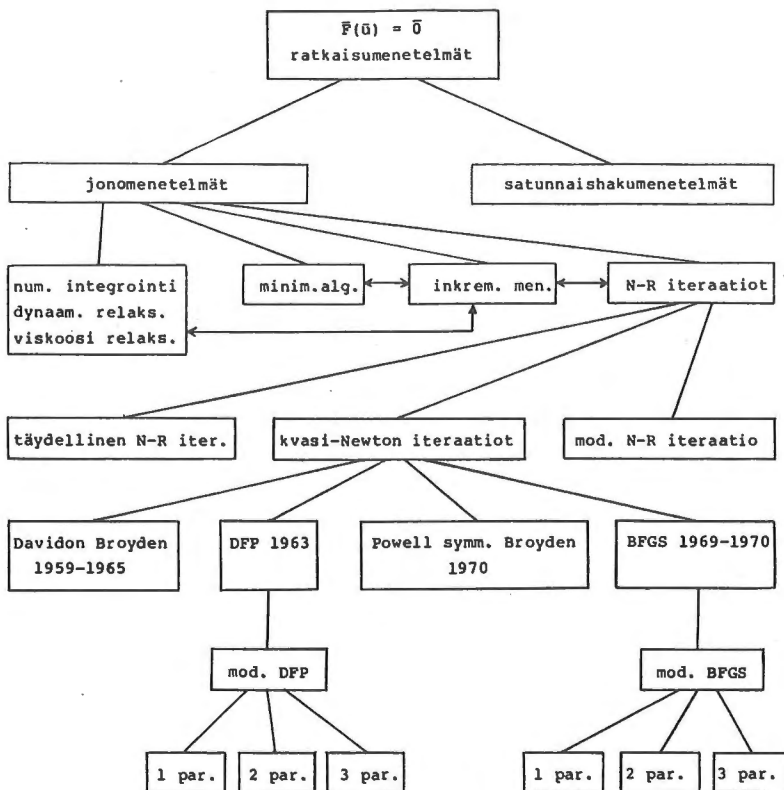
$$\bar{u}_i = \bar{u}_{i-1} + \bar{d}_{i-1}, \quad (3)$$

ja sanotaan, että \bar{u}_i on ratkaisun estimaatti $(i-1)$:nnen toisto-askelen eli iteraation jälkeen. Näin ajatellen pidetään askelta $\bar{u}_0 \rightarrow \bar{u}_1$ funktiosta F muodostetun vastaavan lineaarinen tehtävän ratkaisuna, jota tämän askelen jälkeisillä "varsinaisilla" iteraatioilla tarkennetaan vastaamaan \bar{F} :n oikeata ratkaisua. Tässä artikkelissa käytetään kuitenkin yhtälön (2) mukaista merkintää ja sen ohessa selvitettyä merkitystä sanalle iteraatioaskel.

Tärkeimmistä jonomenetelmissä voidaan mainita inkrementaalisen ratkaisun periaate, Newton-Raphson tyyppiset iteraatiomenetelmät ja vektorimuuttujan skalaarifunktion minimointialgoritmeihin perustuvat ratkaisutavat. Epälineaarisen yhtälösystemin ratkaisu on läheistä sukua optimointitehtävälle: etsi $\bar{x} \in DCR^n$, kun vaaditaan

$$h(\bar{x}) \leq h(\bar{u}), \quad \forall \bar{u} \in D, \quad (4)$$

ja kuvaus $h: R^n \rightarrow R$ on annettu. Voidaan tyytyä minimointitehtävään, sillä $\max(h(\bar{u})) = \min(-h(\bar{u}))$. Muodostetaan funktiosta \bar{F} lauseke: $h(\bar{u}) = \bar{F}(\bar{u})^T \bar{F}(\bar{u})$, ja todetaan, että $h(\bar{u}) \geq 0$, ja h :n pienin arvo saavutetaan kun $\bar{F}(\bar{u}) = \bar{0}$. Epälineaaristen rakenteiden analysoinnissa yhdistetään inkrementaalinen menettely usein Newton-Raphson tyyppiin iteraatioihin, ja tässä artikkelissa keskitytäänkin näihin menetelmiin. Myös numeerista integrointia voidaan monin tavoin käyttää staattisen probleeman analysointiin. Ratkaisumenetelmien luokittelua ja keskinäistä suhdetta havainnollistaa kuvan 1 kaavioesitys.



Kuva 1. Epälineaarisen yhtälösystemin ratkaisumenetelmiä.

INKREMENTAALINEN MENETTELY

Tarkastellaan aluksi inkrementaalista menetelmää. Oletetaan konservatiivinen kuormitustapaus, jolloin ulkoisten kuormien vektori \bar{F} on riippumaton siirtymätilasta \bar{u} ja on esitettävissä yhden parametrin eli n.s. kuormaparametrin λ funktiona. Tällöin kuvaus \bar{F} , joka merkitkään tasapainoa ulkoisten ja sisäisten voimien välillä, voidaan kirjoittaa muodossa

$$\bar{F}(\bar{u}) = \lambda \bar{P}_{\text{ref}} - \bar{R}(\bar{u}), \quad (5)$$

missä \bar{R} on sisäisten voimien vektori ja \bar{P}_{ref} on kuormaparametrin arvoa $\lambda=1$ vastaava referenssikuorma.

Inkrementaalisisessa menetelmässä jaetaan tutkittavan tapauksen haluttu kuormitusväli $(\lambda_{\text{min}}, \lambda_{\text{max}})$ sopiviin askeliin, eli

$$\bar{P}_j = (\lambda_{j-1} + \Delta\lambda_j) \bar{P}_{\text{ref}}. \quad (6)$$

Käytännössä joudutaan, ainakin ensimmäisellä laskentakerralla, aloittamaan laskenta kuormittamattomasta tilasta $\lambda = \lambda_0 = 0$. Tällöin on mahdollista löytää ratkaisumenetelmien suppenevuuden saavuttamiseksi vaadittava riittävän hyvä alkuarvo ratkaisulle. Kyseessä on siirtymätön alkutila $\bar{u}_0 = \bar{0}$.

Inkrementaalisisessa menetelmässä haetaan ratkaisua kohti maksimi-kuorman arvoa λ_{max} linearisoimalla \bar{F} paloittain. Ratkaisuyhtälöksi saadaan

$$\bar{u}_n = \bar{u}_0 + \sum_{j=1}^n \bar{d}_j, \quad (7)$$

missä toistoaskel \bar{d}_j määritetään kaavasta

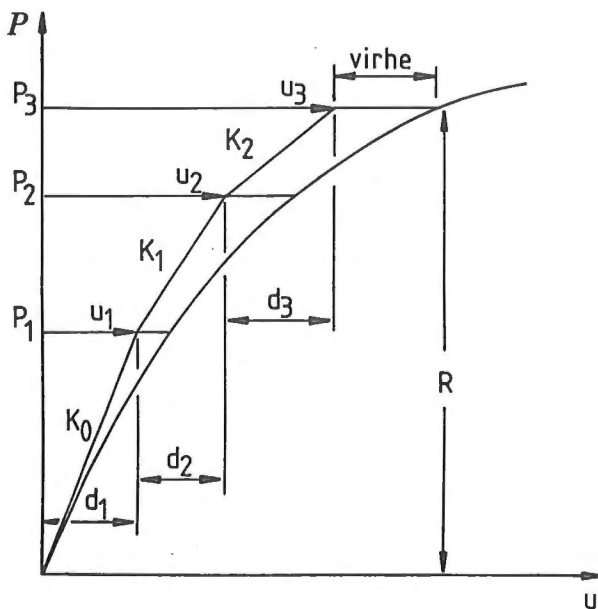
$$\bar{d}_j = \Delta\lambda_j \underline{K}_{j-1}^{-1} \bar{P}_{\text{ref}}, \quad (8)$$

$$\underline{K}_{j-1} = \frac{\partial \bar{R}}{\partial \bar{u}} \Big|_{\bar{u}_{j-1}} = - \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{u}} \Big|_{\bar{u}_{j-1}} = \underline{J}_{j-1}, \quad (9)$$

ja jossa kuormainkrementtien on toteutettava ehto

$$\lambda_{\text{max}} = \sum_{j=1}^n \Delta\lambda_j + \lambda_0. \quad (10)$$

Matriisia K nimitetään tangenttijäykkymatriisiksi, joka on muodostettu yhtälössä (9) siirtymien \bar{u}_{j-1} arvolla. Viiva symbolin alla identifioi jatkossakin neliömatriisia. Kuten kuvasta 2 voidaan havaita, etäännyy ratkaisu todelliselta tasapainopolulta kuorman kasvaessa. Jotta tarkkuus pysyisi hyvänä suurillakin kuorman arvoilla, joudutaan kokonaiskuorma jakamaan hyvin pieniin osiin, jolloin laskenta-ajat myös vastaavasti suurenevät.



Kuva 1. Inkrementaalinen menetelmä.

STANDARDI NEWTON-RAPHSON ITERAATIOIOT

Jotta numeerinen ratkaisu ei etäännyisi todelliselta tasapainopolulta sovelletaan Newton-Raphson (N-R) iteraatiota jokaisella kuorma-askeleella tarkentamaan paloittaista menettelyä. Tällöin toistoaskeleen lausekkeeksi saadaan askeleella j

$$j_{d_{i+1}} = j_{K_i}^{-1}(j_{\bar{P}-\bar{R}}(j_{\bar{u}_i})), \quad (11)$$

ja kokonaissiirtymiksi

$${}^j\bar{u}_{i+1} = {}^{j-1}\bar{u}_k + {}^j\Delta\bar{u}_{i+1} = {}^j\bar{u}_0 + {}^j\Delta\bar{u}_i + {}^j\bar{d}_{i+1}, \quad (12)$$

missä on oletettu, että askeleella $j-1$ tasapaino sisäisten ja ulkoisten voimien välillä on saavutettu k :nnella iteraatiolla. Merkintä ${}^j\Delta\bar{u}_i$ tarkoittaa inkrementillä j iteraatioon i mennessä syntynyttä siirtymänlisäystä. Sekaannuksen välttämiseksi on kuorma-askelta osoittava indeksi j kirjoitettu symbolin vasempaan ylä-nurkkaan (poiketen kaavoista 6-10) ja iteratiivista toistoaskelta osoittava indeksi i oikeaan alanurkkaan. Tätä merkintätapaa noudatetaan jatkossa, tosin kuorma-askelta osoittava indeksi jätetään usein merkitsemättä, mikäli operoidaan vain saman tilan suureilla. Yhtälössä (11) olevaa käänteismatriisia (kuten myös yhtälössä (8)) ei käytännössä tarvitse muodostaa, kun lisäykset.

$${}^j\bar{d}_{i+1} = {}^j\bar{u}_{i+1} - {}^j\bar{u}_i \quad (13)$$

lasketaan yhtälöstä

$${}^j\mathbf{K}_i {}^j\bar{d}_{i+1} = {}^j\bar{\mathbf{F}} - \bar{\mathbf{R}}({}^j\bar{u}_i), \quad (14)$$

käyttäen hyväksi Gaussin algoritmia, Choleskyn dekompositiota $\mathbf{K} = \mathbf{L}\mathbf{U}$, tai modifioitua Choleskyn hajotelmaa $\mathbf{K} = \mathbf{LDU}$.

Menetelmän etuna on nopea konvergenssi, tietyn otaksumin /2/ suppenemisnopeus on kvadraattista eli on voimassa ehto

$$\| \bar{u}_{i+1} - \bar{x} \| \leq \beta \| \bar{u}_i - \bar{x} \|^2, \quad (15)$$

missä β on vakio ja \bar{x} tarkoittaa yhtälön (1) ratkaisua. Lisäksi menetelmä on itsekorjaava, mikä tarkoittaa sitä, että \bar{u}_{i+1} riippuu vain kuvauksesta $\bar{\mathbf{F}}$ ja pisteestä \bar{u}_i . Tällöin edellisen iteraation mahdolliset huonot vaikutukset eivät ulotu eteenpäin.

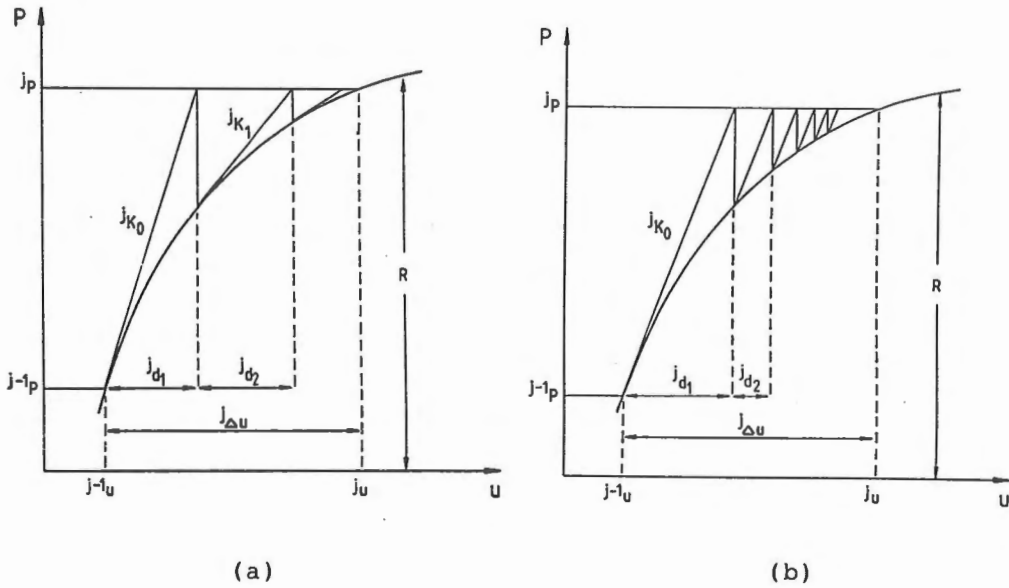
Newton-Raphson iteroinnin pahin haittatekijä on sen vaatima suuri laskutoimitusten määrä. Jokaisella iteraatioaskeleella on muodostettava tangentiaalinen jäykkymatriisi ja suoritettava sen hajotelma.

Modifioidussa eli yksinkertaistetussa N-R menetelmässä muodostetaan tangenttijäykkymatriisi vain esimerkiksi kerran jokaisen kuorma-askeleen alussa. Tällöin laskentatyön määrä useissa

tapauksissa pienenee vaikka suppeneminen hidastuu. Ratkaisuyhtälöksi saadaan nyt yhtälö

$$j_{K_0} j_{d_{i+1}} = j_{P-R}(j_{u_i}). \quad (16)$$

Menetelmiä on havainnollistettu yhden vapausasteen systeemille kuvassa 3.



Kuva 3. Newton-Raphson- (a) ja modifioitu Newton-Raphson iterointi (b).

KVASI-NEWTON MENETELMÄT

Peruseriaatteet

Kvasi-Newton menetelmissä pyritään parantamaan modifioidun Newton-Raphson (mN-R) iteraation suppenevuusominaisuuksia ja vähentämään ratkaisun työmäärää täydelliseen N-R iteraatioon verrattuna. Perusajatuksena on kyetä päivittämään tangenttijäykkyyssmatriisia siten, että uuden iteraatioaskeleen muodostamiseen tarvittava laskentatyö olisi huomattavasti uuden jäykkyyssmatriisin kokoamista ja sen kolmiohajotelman suorittamista pienempi. Täten päivitystä ei milloinkaan suoriteta eksplisiittisenä operaationa päivitettävään tangenttijäykkyyssmatriisiin.

Ongelmana on nyt miten määrittää hyvä approksimaatio tangenttijäykkyydelle. Luonnollinen valinta on vaatia sekanttiyhtälön

$$\tilde{\mathbf{K}}(\overset{j}{\bar{\mathbf{u}}}_i - \overset{j}{\bar{\mathbf{u}}}_{i-1}) = \bar{\mathbf{F}}(\overset{j}{\bar{\mathbf{u}}}_i) - \bar{\mathbf{F}}(\overset{j}{\bar{\mathbf{u}}}_{i-1}) \quad (17)$$

toteuttamista. Yhtälöiden yksinkertaistamiseksi käytetään myös lyhennysmerkintöjä

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{F}}(\overset{j}{\bar{\mathbf{u}}}_i) &= \overset{j}{\bar{\mathbf{F}}}_i, \\ \overset{j}{\bar{\mathbf{G}}}_i &= \overset{j}{\bar{\mathbf{F}}}_i - \overset{j}{\bar{\mathbf{F}}}_{i-1}. \end{aligned} \quad (18)$$

Yhtälöä (17) kutsutaan myös kvasi-Newton yhtälöksi.

Yhden vapausasteen systeemille yhtälö (17) määrää yksikäsitteisesti $\tilde{\mathbf{K}}$:n, joka tällöin on skalaari, mutta kun systeemin tuntemattomien lukumäärä n kasvaa yli yhden, vaaditaan lisäehtoja yksikäsitteisyyden saavuttamiseksi. Tällöin on luontevaa vaatia, että päivitetty matriisi $\tilde{\mathbf{K}}$ on lähellä alkuperäistä matriisia \mathbf{K}_{i-1} . Tätä läheisyyttä mitataan normeilla ja ongelmana on nyt löytää ehdokas, joka toteuttaisi yksikäsitteisesti ehdon

$$\min \{ \|\tilde{\mathbf{K}} - \mathbf{K}_{i-1}\| : \tilde{\mathbf{K}} \bar{\mathbf{a}}_i = \bar{\mathbf{G}}_i \}. \quad (19)$$

Yhtälössä (19) esiintyvänä normina käytetään kvasi-Newton menetelmiä johdettaessa usein Frobeniuksen normia

$$\|\underline{K}\|_F^2 = \text{tr} (\underline{K}^T \underline{K}), \quad (20)$$

tai painotettua normia

$$\|\underline{K}\|_{M,F} = \|\underline{MKM}\|_F, \quad (21)$$

missä matriisi \underline{M} on ei-singulaarinen ja symmetrinen.

Soveltuakseen käytettäväksi elementtimenetelmä sovellutuksiin, on kvasi-Newton päivityksen toteutettava vielä perinnöllisen symmetrisyyden ja positiividefiniittiyden vaatimukset, eli

$$\underline{K}_{i-1} = \underline{K}_{i-1}^T \rightarrow \underline{\tilde{K}} = \underline{\tilde{K}}^T \quad (22)$$

ja

$$\bar{x}^T \underline{K}_{i-1} \bar{x} > 0 \rightarrow \bar{x}^T \underline{\tilde{K}} \bar{x} > 0, \quad \forall \bar{x} \neq \bar{0}. \quad (23)$$

Parhaiten vaatimukset (17), (19), (22) ja (23) toteuttavia menetelmiä ovat Davidonin-Fletcherin-Powell'n (DFP) päivitys (24) ja Broydenin-Fletcherin-Goldfarbin-Shannon (BFGS) päivitys (25), joista jälkimmäistä pidetään yleisesti parhaimpana kvasi-Newton päivityksenä /3/.

$$\underline{K}_{DFP} = \underline{K}_{i-1} - \frac{\bar{G}_i \bar{d}_i^T \underline{K}_{i-1}}{\bar{G}_i^T \bar{d}_i} - \frac{\underline{K}_{i-1} \bar{d}_i \bar{G}_i^T}{\bar{G}_i^T \bar{d}_i} + \left(\frac{\bar{d}_i^T \underline{K}_{i-1} \bar{d}_i}{\bar{G}_i^T \bar{d}_i} - 1 \right) \cdot \frac{\bar{G}_i \bar{G}_i^T}{\bar{G}_i^T \bar{d}_i} \quad (24)$$

$$\underline{K}_{BFGS} = \underline{K}_{i-1} - \frac{\bar{G}_i \bar{G}_i^T}{\bar{G}_i^T \bar{d}_i} - \frac{\underline{K}_{i-1} \bar{d}_i \bar{d}_i^T \underline{K}_{i-1}}{\bar{d}_i^T \underline{K}_{i-1} \bar{d}_i} \quad (25)$$

Pelkistetysti voidaan yhtälöt (24) ja (25) esittää muodossa

$$\begin{aligned} \underline{K}_i &= \underline{K}_{i-1} + \Delta \underline{K}_i(\underline{K}_{i-1}, \bar{d}_i, \bar{G}_i) \\ &= \underline{K}_0 + \sum_{k=1}^i \Delta \underline{K}_k(\underline{K}_{k-1}, \bar{d}_k, \bar{G}_k). \end{aligned} \quad (26)$$

Yhtälön (26) soveltaminen johtaa kuitenkin matriisiin \underline{K}_i kolmiohajotelman suorittamiseen. Jotta tältä vältyttäisiin on päivityskaavan oltava esitettävissä korjauksena käänteismatriisiin, eli

$$\begin{aligned}\underline{K}_i^{-1} &= \underline{K}_{i-1}^{-1} + \Delta \underline{K}_i^{-1}(\underline{K}_{i-1}^{-1}, \bar{d}_i, \bar{G}_i) \\ &= \underline{K}_0^{-1} + \sum_{k=1}^i \Delta \underline{K}_k^{-1}(\underline{K}_{k-1}^{-1}, \bar{d}_k, \bar{G}_k).\end{aligned}\quad (27)$$

DFP-päivityskaava (24), lausuttuna operoimaan käänteismatriisiin, on /3/

$$\underline{K}_{DFP}^{-1} = \underline{K}_{i-1}^{-1} - \frac{\bar{d}_i \bar{d}_i^T}{\bar{G}_i^T \bar{d}_i} - \frac{\underline{K}_{i-1}^{-1} \bar{G}_i \bar{G}_i^T \underline{K}_{i-1}^{-1}}{\bar{G}_i^T \underline{K}_{i-1}^{-1} \bar{G}_i}, \quad (28)$$

ja vastaavasti BFGS-päivitys on

$$\underline{K}_{BFGS}^{-1} = \underline{K}_{i-1}^{-1} - \frac{\bar{d}_i \bar{G}_i^T \underline{K}_{i-1}^{-1}}{\bar{G}_i^T \bar{d}_i} - \frac{\underline{K}_{i-1}^{-1} \bar{G}_i \bar{d}_i^T}{\bar{G}_i^T \bar{d}_i} + \left(\frac{\bar{G}_i^T \underline{K}_{i-1}^{-1}}{\bar{G}_i^T \bar{d}_i} - 1 \right) \frac{\bar{d}_i \bar{d}_i^T}{\bar{G}_i^T \bar{d}_i}. \quad (29)$$

Kaavoista (24), (25), (28) ja (29) havaitaan, että DFP- ja BFGS-päivitykset ovat yhteydessä toisiinsa muunnosten

$$\bar{d} \leftrightarrow \bar{G} \quad \text{ja} \quad \underline{K} \leftrightarrow \underline{K}^{-1} \quad (30)$$

välityksellä. Tämän vuoksi näitä päivityksiä kutsutaan duaalisiksi tai komplementaariksi päivityksiksi.

Kaava (27) ei vielä sellaisenaan sovellu käytettäväksi elementtimenetelmän yhteydessä, koska käänteismatriisi ei yleensä ole nauhamainen vaikka itse matriisi olisikin. Lisäksi käänteismatriisin muodostaminen on huomattavasti normaalia lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisua työläämpi toimenpide. Voidaan osoittaa /4/, että päivitykset (28) ja (29) ovat esitettävissä tulomuodossa

$$\underline{K}_i^{-1} = (\underline{I} + \bar{w}_i \bar{v}_i^T) \underline{K}_{i-1}^{-1} (\underline{I} + \bar{w}_i \bar{v}_i^T)^T, \quad (31)$$

missä vektorit \bar{w}_i ja \bar{v}_i määritellään kaavoissa (35).

Yhtälöstä (31) huomataan, että jos \underline{K}_{i-1}^{-1} on positiivisesti definitti niin \underline{K}_i^{-1} on positiivisesti definitti, jos ja vain jos toteutuu

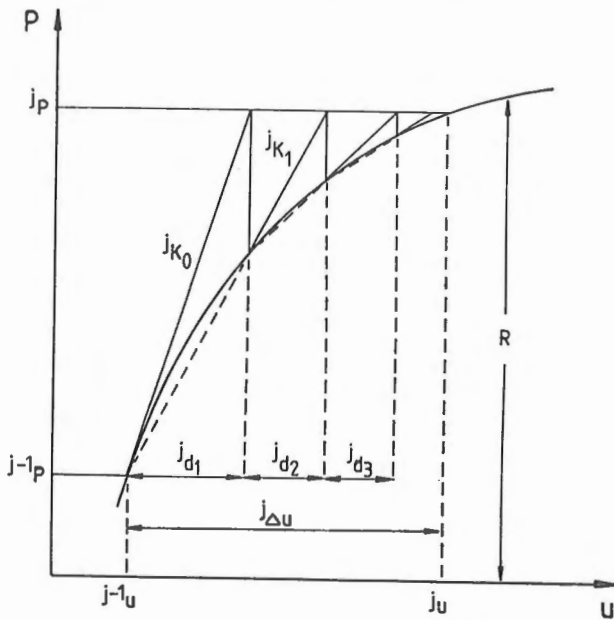
ehto

$$\det(\underline{I} + \bar{w}_i \bar{v}_i^T) = 1 + \bar{w}_i^T \bar{v}_i \neq 0, \quad (32)$$

koska determinantille pätee

$$\det(\underline{K}_i^{-1}) = \det(\underline{K}_{i-1}^{-1}) [\det(\underline{I} + \bar{w}_i \bar{v}_i^T)]^2. \quad (33)$$

Sekanttiyhtälön (17) toteuttavaa menetelmää on havainnollistettu yksidimensioisessa tapauksessa kuvassa 4.



Kuva 4. Kvasi-Newton iteraatio (sekantti-
menetelmä).

BFGS-päivitys

Ratkaistavana on nyt yhtälösystemi (5): $\bar{F}(\bar{u}) = \bar{P} - \bar{R}(\bar{u})$. Käytetään BFGS-päivitystä, joissa korjaus operoidaan tangenttijäykkyysmatriisin käänteismatriisiin. Tällöin saadaan /5/

$$\underline{K}_i^{-1} = \underline{Q}_i \underline{K}_{i-1}^{-1} \underline{Q}_i^T, \quad (34)$$

missä

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}_i &= \mathbf{I} + \bar{\mathbf{w}}_i \bar{\mathbf{v}}_i^T, \\
\bar{\mathbf{v}}_i &= \bar{\mathbf{F}}_{i-1} \left[1 - \sqrt{\frac{\bar{\mathbf{d}}_i^T (\bar{\mathbf{F}}_{i-1} - \bar{\mathbf{F}}_i)}{\bar{\mathbf{d}}_i^T \bar{\mathbf{F}}_{i-1}}} \right] - \bar{\mathbf{F}}_i \\
\bar{\mathbf{w}}_i &= \frac{\bar{\mathbf{d}}_i}{\bar{\mathbf{d}}_i^T \bar{\mathbf{G}}_i}.
\end{aligned} \tag{35}$$

Käänteismatriisia \mathbf{K}_i^{-1} ei muodosteta eksplisiittisesti vaan askel $\bar{\mathbf{d}}_{i+1}$ saadaan seuraavasti

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{d}}_{i+1} &= \left(\prod_{j=1}^i \mathbf{Q}_j \right) \mathbf{K}_0^{-1} \left(\prod_{j=1}^i \mathbf{Q}_j^T \right) \bar{\mathbf{F}}(\bar{\mathbf{u}}_i) \\
&= \left[\prod_{j=1}^i (\mathbf{I} + \bar{\mathbf{w}}_j \bar{\mathbf{v}}_j^T) \right] \mathbf{K}_0^{-1} \left[\prod_{j=1}^i (\mathbf{I} + \bar{\mathbf{v}}_j \bar{\mathbf{w}}_j^T) \right] \bar{\mathbf{F}}(\bar{\mathbf{u}}_i).
\end{aligned} \tag{36}$$

Menetelmän haittapuolena on vektoreiden $\bar{\mathbf{w}}_j$ ja $\bar{\mathbf{v}}_j$ sisältämän tiedon tarve jokaisella iteraatiokierroksella, jolloin vektorit joudutaan varastoimaan keskusmuistitilan säästämiseksi ajonaikaiseen levytiedostoon. Tällainen tiedonsiirto kuluttaa suhteellisen paljon keskusyksikköaikaa.

BFGS-menetelmä toteuttaa vaatimuksen muodostaa perinnöllisesti positiivisesti definiittejä matriiseja vain, jos matriisi \mathbf{Q}_i ei ole singulaarinen, eli kun $1 + \bar{\mathbf{w}}_i^T \bar{\mathbf{v}}_i \neq 0$. Numeerisissa laskelmissa on epätodennäköistä että näin tapahtuisi, mutta tilanteissa joissa matriisi \mathbf{Q} on huonokuntoinen, lähes singulaarinen, on syytä pidättäytyä kaavan (34) päivitykseltä, ja käyttää edellisen iteraation jäykkyydematriisia. Ehto päivitykselle voidaan antaa rajoituksena matriisin \mathbf{Q} häiriöalttiudelle. Lähteessä /4/ on osoitettu, että pätee

$$\frac{1}{[C_2(\mathbf{Q}_i)]^2} \leq \frac{C_2(\mathbf{K}_i^{-1})}{C_2(\mathbf{K}_{i-1}^{-1})} \leq [C_2(\mathbf{Q}_i)]^2, \tag{37}$$

missä $C_2(\mathbf{Q}) = \|\mathbf{Q}\|_2 \|\mathbf{Q}^{-1}\|_2$ on matriisin \mathbf{Q} häiriöalttius spektraalinormissa $\|\cdot\|_2$. Matriisin $\mathbf{Q} = \mathbf{I} + \bar{\mathbf{w}}\bar{\mathbf{v}}^T$ häiriöalttiudelle on johdettu lauseke /4/

$$C_2(\underline{Q}) = \left[\frac{\underline{Q}^T \underline{Q}:n \text{ suurin ominaisarvo}}{\underline{Q}^T \underline{Q}:n \text{ pienin ominaisarvo}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (38)$$

$$= \frac{\left\{ (\bar{w}^T \bar{w})^{\frac{1}{2}} (\bar{v}^T \bar{v})^{\frac{1}{2}} + [(\bar{w}^T \bar{w}) (\bar{v}^T \bar{v}) + 4(1 + \bar{v}^T \bar{v})]^{\frac{1}{2}} \right\}^2}{4(1 + \bar{v}^T \bar{w})}$$

MODIFIOIDUT KVASI-NEWTON MENETELMÄT

Perusteet

Modifioituja BFGS-päivityskaavaan perustuvia kvasi-Newton algoritmeja on ensimmäisenä johtanut ja käyttänyt Crisfield /5,7/. Perusajatuksena näissä menetelmissä on välttyä vektoreiden \bar{w}_j ja \bar{v}_j , $j=1, \dots, i-1$, kaava (35), käytön haitoilta. Päivitystä ei kohdisteta edelliseen päivitettyyn matriisiin vaan esimerkiksi askeleen alussa muodostettuun tangenttijäykkymatriisiin. Modifioiduille kvasi-Newton menetelmille saadaan siis yhtälöt

$$\underline{K}_i = \underline{K}_O + \underline{K}_i(\underline{K}_O, \bar{d}_i, \bar{G}_i), \quad (39)$$

$$\underline{K}_i^{-1} = \underline{K}_O^{-1} + \underline{K}_i^{-1}(\underline{K}_O^{-1}, \bar{d}_i, \bar{G}_i), \quad (39')$$

$$\underline{K}_i^{-1} = \underline{Q}_i \underline{K}_O^{-1} \underline{Q}_i^T. \quad (39'')$$

Modifioidut BFGS-iteraatiot

Käyttämällä päivityskaavaa (29) periaatteen (39') mukaisesti, saadaan uuden iteraatioaskeleen lausekkeeksi

$$\begin{aligned} \bar{d}_{i+1} &= \underline{K}_i^{-1} \bar{F}_i \\ &= \alpha_i^1 \bar{D}_{i+1} + \alpha_i^2 \bar{d}_i + \alpha_i^3 \bar{D}_i, \end{aligned} \quad (40)$$

missä

$$\begin{aligned} \bar{D}_{i+1} &= \underline{K}_O^{-1} \bar{F}_i, \\ \alpha_i^3 &= \frac{\bar{d}_i^T \bar{F}_i}{\bar{G}_i^T \bar{d}_i}, \end{aligned}$$

$$\alpha_i^1 = 1 - \alpha_i^3 = - \frac{\bar{d}_i^T \bar{F}_{i-1}}{\bar{G}_i^T \bar{d}_i} , \quad (41)$$

$$\alpha_i^2 = \alpha_i^3 \left[\frac{\bar{G}_i^T (\bar{D}_{i+1} - \bar{D}_i)}{\bar{G}_i^T \bar{d}_i} - 1 \right] - \frac{\bar{G}_i^T \bar{D}_{i+1}}{\bar{G}_i^T \bar{d}_i} .$$

Yhtälöä (40) kutsutaan modifioidun BFGS-päivityksen kolmiparametrisiksi muodoksi, josta jatkossa käytetään kirjainlyhennettä mBFGS3.

Tekemällä yhtälöissä (40), (41) approksimaatio

$$\bar{D}_i \cong \bar{d}_i , \quad (42)$$

saadaan yhtälö

$$\bar{d}_{i+1} = \alpha_i^1 \bar{D}_{i+1} + \tilde{\alpha}_i^2 \bar{d}_i , \quad (43)$$

missä

$$\tilde{\alpha}_i^2 = \alpha_i^2 + \alpha_i^3 = \alpha_i^1 \left(1 - \frac{\bar{G}_i^T \bar{D}_{i+1}}{\bar{G}_i^T \bar{d}_i} \right) - 1 . \quad (44)$$

Yhtälö (43) on modifioidun BFGS-päivityksen kaksiparametrinen muoto (mBFGS2). Yksiparametrinen muoto (mBFGS1) saadaan kun jätetään termi $\tilde{\alpha}_i^2 \bar{d}_i$ pois, jolloin iteraatioaskeleen lausekkeeksi seuraa

$$\bar{d}_{i+1} = \alpha_i^1 \bar{D}_{i+1} . \quad (45)$$

Yksiparametrisessa versiossa tarvitaan ainoastaan yhden lisävektorin tila (\bar{F}_{i-1}), kun taas kaksi- ja kolmiparametrisissä versioissa tarvitaan vastaavasti tila kahdelle (\bar{F}_{i-1} , \bar{d}_i) tai kolmelle (\bar{F}_{i-1} , \bar{d}_i , \bar{D}_i) lisävektorille.

Kaksi- ja kolmiparametriset muodot saattavat joissain tapauksissa toimia huonommin kuin mN-R iteraatio. Näin tapahtuu, jos termin \bar{D}_{i+1} kerroin α_i^1 poikkeaa huomattavasti arvosta $\alpha_i^1=1$, tai jos termien \bar{D}_i ja \bar{d}_i kertoimet ovat suuria \bar{D}_{i+1} :n kertoimeen verrattuna. Tämäntapaisia tilanteita varten päivitystä suoritetaan vain, jos epäyhtälöt

$$R_1 > \alpha_i^1 > \frac{1}{R_1}, \quad (46)$$

$$R_2 > \frac{\alpha_i^2 + \alpha_i^3}{\alpha_i^1} > -\frac{1}{2} R_2$$

toteutuvat. Käytettyihin katkaisuparametrien R_1 ja R_2 arvoihin palataan numeeristen esimerkkien yhteydessä.

Modifioidut DFP-menetelmät

Vastaavasti kuin BFGS-iteraatiolle, voidaan DFP-iteraatiolle johtaa yhtälöstä (28) lähtien periaatteen (39') mukaiset versiot. Uuden iteratiivisen siirtymänlisäyksen lausekkeeksi saadaan (kolmiparametrinen muoto mDFP3)

$$\bar{d}_{i+1} = \alpha_i^1 \bar{D}_{i+1} + \alpha_i^2 \bar{d}_i + \alpha_i^3 \bar{D}_i, \quad (47)$$

missä

$$\alpha_i^3 = \frac{\bar{G}_i^T \bar{D}_{i+1}}{\bar{G}_i^T (\bar{D}_{i+1} - \bar{D}_i)}, \quad (48)$$

$$\alpha_i^1 = 1 - \alpha_i^3 = \frac{\bar{G}_i^T \bar{D}_i}{\bar{G}_i^T (\bar{D}_i - \bar{D}_{i+1})},$$

$$\alpha_i^2 = -\frac{\bar{d}_i^T \bar{F}_i}{\bar{G}_i^T \bar{d}_i}.$$

Tekemällä approksimaatio (42) yhtälöihin (47, 48), saadaan kaksiparametrinen muoto (mDFP2)

$$\bar{d}_{i+1} = \tilde{\alpha}_i^1 \bar{D}_{i+1} + \tilde{\alpha}_i^2 \bar{d}_i, \quad (49)$$

missä

$$\tilde{\alpha}_i^1 = -\frac{\bar{G}_i^T \bar{d}_i}{\bar{G}_i^T (\bar{d}_i - \bar{D}_{i+1})},$$

$$\tilde{\alpha}_i^2 = \frac{\bar{G}_i^T \bar{D}_{i+1}}{\bar{G}_i^T (\bar{D}_{i+1} - \bar{d}_i)} - \frac{\bar{d}_i^T \bar{F}_i}{\bar{G}_i^T \bar{d}_i}, \quad (50)$$

Modifioidun DFP iteraation yksiparametrinen muoto mDFP1 on

$$\bar{d}_{i+1} = \alpha_i^1 \bar{D}_{i+1}. \quad (51)$$

Samasta syystä kuin modifioiduissa kaksi ja kolmiparametrisissa BFGS-iteraatioissa, on kaksi ja kolmiparametrisissa DFP-menetelmässä syytä pidättäytyä päivityksestä, mikäli epäyhtälöt

$$\begin{aligned} R_1 &> \tilde{\alpha}_i^1 > \frac{1}{R_1}, \\ R_2 &> \frac{\alpha_i^2 + \alpha_i^3}{\alpha_i^1} > -\frac{1}{2} R_2, \end{aligned} \quad \text{(mDFP3)} \quad (52)$$

$$\begin{aligned} R_1 &> \tilde{\alpha}_i^1 > \frac{1}{R_1}, \\ R_2 &> \frac{\tilde{\alpha}_i^2}{\tilde{\alpha}_i^1} > -\frac{1}{2} R_2 \end{aligned} \quad \text{(mDFP2)} \quad (53)$$

eivät toteudu. DFP-päivityksessä (28) tulee lisäksi olla voimassa ehto

$$\bar{G}_i^T \bar{d}_i < 0, \quad (54)$$

jotta päivitettävä matriisi säilyttäisi positiivisen definiittiytensä.

VIIVAHAKU

Viivahauulla (line search) tarkoitetaan menetelmää:

$$\text{etsi } \eta: G(\eta) = \bar{d}^T \bar{F}(\bar{u} + \eta \bar{d}) \approx 0. \quad (55)$$

Tavoitteena on parantaa modifioidun Newton-Raphson tai kvasi-Newton

menetelmien suppenevuutta. Viivahakua suoritetaan kunnes ehto

$$|G(\eta)| < \text{TOLVH}|G(0)| \quad (56)$$

toteutuu, missä haun toleranssi TOLVH (0,1). Menetelmä on kaksi-vaiheinen: 1) etsitään arvot η_1 ja η_2 , joille pätee $G(\eta_1) \cdot G(\eta_2) < 0$, 2) etsitään väliltä $[\eta_1, \eta_2]$ parannettu arvo η^* siten, että epäyhtälö (56) toteutuu. Haussa käytettyjä lineaariseen interpolointiin pohjautuvia menetelmiä on esitetty lähteissä /5,8,9/.

MUITA MENETELMIÄ

Modifioidun Newton-Raphson iteraation suppenemista voidaan hyvin yksinkertaisesti tehostaa esimerkiksi Aitkenin kiihdytysmenetelmällä /10/

$$\bar{d}_{i+1} = \text{diag} \underline{\alpha}_{i+1} \bar{D}_{i+1}, \quad (57)$$

missä diagonaalimatriisin $\underline{\alpha}$ k:s lävistäjäalkio on

$$(\alpha_k)_{i+1} = \frac{(d_k)_i}{(d_k)_i - (D_k)_{i+1}}. \quad (58)$$

Kaavalla (58) pyritään approksimoimaan sekanttijäykkyyttä. Yksidimensioisessa tapauksessa approksimaatio on tarkka, mutta useampi-dimensioisessa tilanteessa saadaan vain likiarvo sekanttijäykkyydelle. Tästä aiheutuvia virheitä pyritään vähentämään soveltamalla kiihdytystä vain joka toisella iteraatiolla. Kiihdytystä voitaisiin myös suorittaa yhtälöllä

$$(\alpha_k)_{i+1} = \frac{(D_k)_i}{(D_k)_i - (D_k)_{i+1}}. \quad (58')$$

Numeerisissa laskelmissa ei kuitenkaan ole havaittu eroa eri Aitkenin kiihdytystapojen välillä.

Nayak ja Zienkiewicz /11/ ovat esittäneet miltei samanlaisen menetelmän, jota he kutsuvat α -vakiojäykkyyksenmenetelmäksi.

KAARENPIITUUSMENETELMÄ

Analysoitaessa hoikkia rakenteita epälineaarisilla menetelmillä, muodostavat monet stabiiliusongelmat ylitsepääsemättömän esteen normaaleille inkrementaalisisille iteratiivisille menetelmille. Kaarenpituusmenetelmä on eräs yksinkertainen tapa, joka kykenee rajapisteiden ohituksiin ja siten tämääntyyppisen singulariteetin jälkeisen jälkikriittisen tilan seuraamiseen.

Muodostettaessa algoritmiä joka pystyy seuraamaan systeemin vastetta rajapisteiden jälkeen, on käyttökelpoista pitää kuormaparametria λ myös muuttujana. Tällöin systeemissä (1) on $n+1$ tuntematonta, mutta vain n yhtälöä, joten tarvitaan ylimääräinen sidoyhtälö ratkaisun löytämiseksi. Kaarenpituusmenetelmissä rajoitetaan siirtymiä jokaisella askeleella yhtälön

$$({}^j\Delta\bar{u})^T({}^j\Delta\bar{u}) + e({}^j\Delta\lambda)^2 = ({}^j\Delta s)^2 \quad (59)$$

mukaisesti, missä $({}^j\Delta s)$ on ns. kaarenpituus (ks. kuva 5). Kerroin e pyritään valitsemaan siten, että saavutetaan paras numeerinen stabiilius. Tässä esityksessä on e :lle käytetty arvoja

$$e = 0 \quad (60)$$

tai

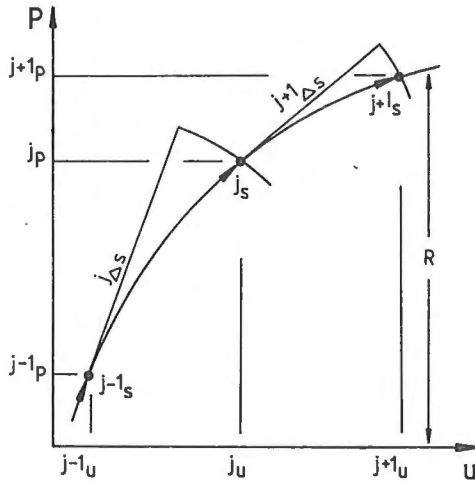
$$e = {}^1\bar{q}_1^{-T} {}^1\bar{q}_1, \quad {}^1\bar{q}_1 = {}^1\bar{K}_0^{-1} \bar{P}_{ref}. \quad (60')$$

Kaavaan (60') päästään, kun vaaditaan yhtälön (59) vasemman puolen termien yhtäsuuruutta ensimmäisen askeleen alussa, eli

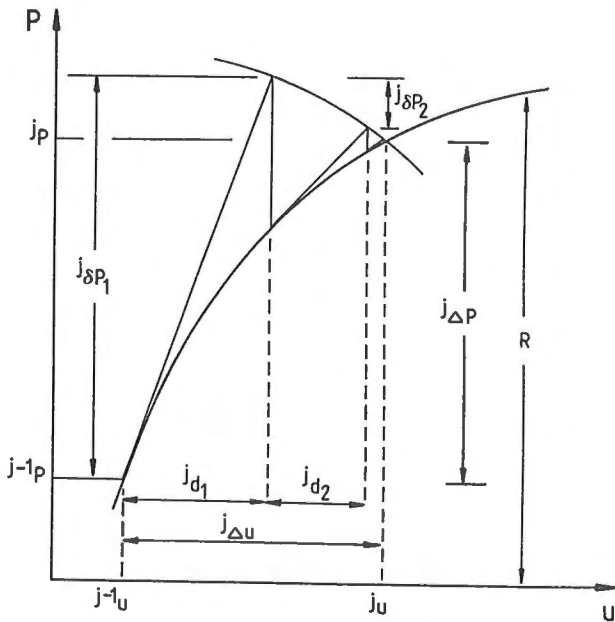
$${}^1\Delta\bar{u}_1^{-T} {}^1\Delta\bar{u}_1 = e(\Delta\lambda)^2. \quad (61)$$

Tarkastellaan nyt tilannetta askeleella j ja iteraatiolla $i+1$. Epätasapainokuormalle \bar{F} saadaan lauseke (ks. kuva 6)

$$\begin{aligned} \bar{F}(\bar{u}_i, \lambda_{i+1}) &= \bar{F}(\bar{u}_i, \lambda_i + \delta\lambda_{i+1}) \\ &= \bar{F}(\bar{u}_i, \lambda_i) + \delta\lambda_{i+1} \bar{P}_{ref}. \end{aligned} \quad (62)$$



Kuva 5. Kaarenpituusmenetelmän periaate.



Kuva 6. Kaarenpituusmenetelmä yhdistettynä Newton-Raphson iteratioon.

Siirtymänlisäys kyseiselle iteraatiolle on

$$\bar{d}_{i+1} = \underline{K}_i^{-1} \bar{F}(\bar{u}_i, \lambda_{i+1}) = \bar{D}_{i+1} + \delta\lambda_{i+1} \bar{q}_{i+1}, \quad (63)$$

missä

$$\begin{aligned} \bar{D}_{i+1} &= \underline{K}_i^{-1} \bar{F}(\bar{u}_i, \lambda_i), \\ \bar{q}_{i+1} &= \underline{K}_i^{-1} \bar{p}_{\text{ref}}. \end{aligned} \quad (64)$$

Kokonaissiirtymien ja askeleella j muodostuneiden siirtymien lausekkeet ovat

$${}^j\bar{u}_{i+1} = {}^j\bar{u}_0 + {}^j\Delta\bar{u}_{i+1}, \quad (65)$$

$${}^j\Delta\bar{u}_{i+1} = {}^j\Delta\bar{u}_i + {}^jD_{i+1} + {}^j\delta\lambda_{i+1} \bar{q}_{i+1}. \quad (66)$$

Sijoitettaessa (66) yhtälöön (59) muodostuu lausekkeesta kuor-
maparametrin muutoksen $\delta\lambda_{i+1}$ suhteen kvadraattinen polynomiyhtälö

$$a_{i+1} (\delta\lambda_{i+1})^2 + 2b_{i+1} (\delta\lambda_{i+1}) + c_{i+1} = 0, \quad (67)$$

missä

$$\begin{aligned} a_{i+1} &= e + \bar{q}_{i+1}^T \bar{q}_{i+1}, \\ b_{i+1} &= (\Delta\bar{u}_i + \bar{D}_{i+1})^T \bar{q}_{i+1} + e\Delta\lambda_i \\ c_{i+1} &= (\Delta\bar{u}_i + \bar{D}_{i+1})^T (\Delta\bar{u}_i + \bar{D}_{i+1}) + e(\Delta\lambda_i)^2 - (\Delta s)^2 \\ &= (2\Delta\bar{u}_i + \bar{D}_{i+1})^T \bar{D}_{i+1} \\ \Delta\lambda_i &= {}^j\lambda_i - {}^{j-1}\lambda. \end{aligned} \quad (68)$$

Yhtälöstä (67) seuraa $\delta\lambda_{i+1}$:lle kaksi arvoa $\delta\lambda_{i+1,1}$ ja $\delta\lambda_{i+1,2}$. Sopiva juuri valitaan siten, että kyseisellä askeleella iteraatioilla i ja $i+1$ syntyneiden inkrementaalisen siirtymävektoreiden välinen kulma on positiivinen /12/. Iteraatiolla $i+1$ kaksi mahdol-

lista inkrementaalista siirtymävektoria ovat

$$\Delta \bar{u}_{i+1,1} = \Delta \bar{u}_i + \bar{D}_{i+1} + \delta \lambda_{i+1,1} \bar{q}_{i+1}, \quad (69)$$

$$\Delta \bar{u}_{i+1,2} = \Delta \bar{u}_i + \bar{D}_{i+1} + \delta \lambda_{i+1,2} \bar{q}_{i+1}. \quad (69')$$

Vastaavasti kulmat yllä esitettyjen ja edellisen iteraation i inkrementaalisen siirtymävektorin välillä ovat

$$\theta_i = \Delta \bar{u}_i^T \Delta \bar{u}_{i+1,1}, \quad (70)$$

$$\theta_2 = \Delta \bar{u}_i^T \Delta \bar{u}_{i+1,2}. \quad (70')$$

Jotta vältyttäisiin siirtymästä taaksepäin tasapainopolulla, on valittava se juuri, jota vastaa positiivinen kulma θ_i , $i=1,2$. Jos molemmat kulmat ovat positiivisia valitaan se juuri, joka on lähinnä yhtälöstä (67) muodostettua lineaarista ratkaisua $\delta \tilde{\lambda}_{i+1}$, eli tällöin valitaan

$$\delta \lambda_{i+1} = \min \left\{ |\delta \lambda_{i+1,1} - \delta \tilde{\lambda}_{i+1}|, |\delta \lambda_{i+1,2} - \delta \tilde{\lambda}_{i+1}| \right\}, \quad (71)$$

missä

$$\delta \tilde{\lambda}_{i+1} = -c_{i+1}/b_{i+1}. \quad (72)$$

Kaarenpituuden alkuarvon määrittäminen suoritetaan ensimmäisen askeleen ensimmäisellä iteraatiolla yhtälöstä

$$1_{\Delta s} = {}^0 \Delta \lambda \sqrt{1 - \bar{q}_1^T 1_{\bar{q}_1} + e} \quad (73)$$

missä alkuaskel ${}^0 \Delta \lambda$ annetaan lähtötietona. Useissa tapauksissa on edullista muuttaa kaarenpituuden arvoa paremman suppenevuuden aikaansaamiseksi, eli asetetaan

$$j_{\Delta s} = j^{-1}_{\Delta s} \cdot j_R, \quad (74)$$

missä parametri R pyrkii ennakoimaan analysoitavan kohteen käyttäytymistä niiden tekijöiden osalta, jotka vaikuttavat ratkaisun

suppenemiseen. Koska analysoitavan kohteen käyttäytymisen ennakointi on hankalaa, turvaututaan informaatioon, jota on saatavilla edellisiltä askeleilta. Yksinkertaisin tapa konstruoida parametri R on

$$j_R = \sqrt{\frac{IT_d}{j^{-1}IT}}, \quad (75)$$

missä $j^{-1}T$ on iteraatioiden lukumäärä askeleella $j-1$ ja IT_d on haluttu iteraatiomäärä askelta kohden. Kun kaarenpituus on määrätty, saadaan kuorman lisäykseksi askeleella j

$$j_{\Delta\lambda_1} = \text{sign}(\det^j \underline{K}_O) \frac{j_{\Delta s}}{\sqrt{j_{\bar{q}_i}^T j_{\bar{q}_i+e}}}, \quad (76)$$

KVASI-NEWTON ITERAATIOYHDISTETTYNÄ KAARENPITUUSMENETELMÄÄN

Iteraatioaskeleen lauseke kaarenpituusmenetelmässä on muotoa

$$\bar{d}_{i+1} = \bar{D}_{i+1}^* + \delta\lambda_{i+1} \bar{q}_{i+1}^*, \quad (77)$$

missä

$$\begin{aligned} \bar{D}_{i+1}^* &= \underline{K}_i^{-1} \bar{F}(\bar{u}_i, \lambda_i) \\ \bar{q}_{i+1}^* &= \underline{K}_i^{-1} \bar{P}_{\text{ref}}. \end{aligned} \quad (78)$$

Kaavat (77) ja (78) ovat kirjoitetut Newton-Raphson iteraation mukaisesti, mutta jäykkyysterminä voidaan myös käyttää esimerkiksi askeleen alun tangenttijäykkyyttä \underline{K}_O tai muodostaa vektorit \bar{D}_{i+1}^* ja \bar{q}_{i+1}^* kvasi-Newton menetelmiä käyttäen.

BFGS-iteraatioissa kaavat (78) ovat muodossa

$$\begin{aligned} \bar{D}_{i+1}^* &= \left(\prod_{j=i}^1 \underline{Q}_j \right) \underline{K}_O^{-1} \left(\prod_{j=1}^i \underline{Q}_j^T \right) \bar{F}(\bar{u}_i, \lambda_i), \\ \bar{q}_{i+1}^* &= \left(\prod_{j=i}^1 \underline{Q}_j \right) \underline{K}_O^{-1} \left(\prod_{j=1}^i \underline{Q}_j^T \right) \bar{P}_{\text{ref}}, \end{aligned} \quad (79)$$

missä matriisi \underline{Q} saadaan yhtälöstä (35).

Modifioidun BFGS-iteraation kolmiparametriselle muodolle saadaan vastaavasti yhtälöt

$$\begin{aligned}\bar{D}_{i+1}^* &= \alpha_i^1 \bar{D}_{i+1} + \alpha_i^2 \bar{d}_i + \alpha_i^3 \bar{D}_i, \\ \bar{q}_{i+1}^* &= \bar{q}_i + \beta_i^1 \bar{D}_{i+1} + \beta_i^2 \bar{d}_i + \beta_i^3 \bar{D}_i,\end{aligned}\tag{80}$$

missä

$$\begin{aligned}\bar{D}_{i+1} &= \underline{K}_O^{-1} \bar{F}_i, \\ \bar{q}_i &= \underline{K}_O^{-1} \bar{P}_{\text{ref}}, \\ \beta_i^1 &= -\frac{\bar{d}_i^T \bar{P}_{\text{ref}}}{\bar{G}_i^T \bar{d}_i}, \quad \beta_i^3 = -\beta_i^1 \\ \beta_i^2 &= \beta_i^3 \frac{\bar{G}_i^T (\bar{D}_{i+1} - \bar{D}_i)}{\bar{G}_i^T \bar{d}_i} - \frac{\bar{G}_i^T \bar{q}_i}{\bar{G}_i^T \bar{d}_i},\end{aligned}\tag{81}$$

ja termit α_i^j , $j=1,3$ ovat esitetyt kaavoissa (41). Kaksiparametrinen muoto saadaan kun tehdään approksimaatio $\bar{D}_i \approx \bar{d}_i$ (42), josta seuraa

$$\begin{aligned}\bar{D}_{i+1}^* &= \alpha_i^1 \bar{D}_{i+1} + \tilde{\alpha}_i^2 \bar{d}_i, \\ \bar{q}_{i+1}^* &= \bar{q}_i + \beta_i^1 \bar{D}_{i+1} + \tilde{\beta}_i^2 \bar{d}_i,\end{aligned}\tag{82}$$

missä

$$\tilde{\beta}_i^2 = \beta_i^3 \frac{\bar{G}_i^T \bar{D}_{i+1}}{\bar{G}_i^T \bar{d}_i} - \frac{\bar{G}_i^T \bar{q}_i}{\bar{G}_i^T \bar{d}_i}.\tag{83}$$

Jotta menetelmä olisi numeerisesti stabiili on päivityksestä syytä pidättäytyä mikäli ehdot

$$\begin{aligned}R_1 &> \alpha_i^1 + \delta \lambda_{i+1} P_i^1 > \frac{1}{R_1}, \\ R_2 &> \frac{\alpha_i^2 + \alpha_i^3 + \delta \lambda_{i+1} (\beta_i^2 + \beta_i^3)}{\alpha_i^1 + \delta \lambda_{i+1} \beta_i^1} > -\frac{1}{2} R_2\end{aligned}\tag{84}$$

$$R_2 > \frac{\alpha_i^2 + \delta \lambda_i \tilde{\beta}_i}{\alpha_i + \delta \lambda_i \beta_i} > -\frac{1}{2} R_2, \quad (\text{mBFGS2}),$$

eivät toteudu.

Modifioiduille DFP-iteraatioille vastaavat kaavat ovat

$$\begin{aligned} \bar{D}_{i+1}^* &= \alpha_i^1 \bar{D}_{i+1} + \alpha_i^2 \bar{d}_i + \alpha_i^3 \bar{D}_i, \\ \bar{q}_{i+1}^* &= \bar{q} + \beta_i^1 \bar{D}_{i+1} + \beta_i^2 \bar{d}_i + \beta_i^3 \bar{D}_i, \end{aligned} \quad (85)$$

missä α_i^j , $j=1,3$ on määritelty yhtälöissä (48), ja

$$\begin{aligned} \beta_i^1 &= -\frac{\bar{G}_i^T \bar{q}}{\bar{G}_i^T (\bar{D}_{i+1} - \bar{D}_i)}, \\ \beta_i^2 &= -\frac{\bar{d}_i^T \bar{p}_{\text{ref}}}{\bar{G}_i^T \bar{d}_i}, \\ \beta_i^3 &= -\beta_i^1. \end{aligned} \quad (86)$$

Kaksiparametriselle muodolle johdetaan yhtälöt

$$\begin{aligned} \bar{D}_{i+1}^* &= \alpha_i^1 \bar{D}_{i+1} + \tilde{\alpha}_i^2 \bar{d}_i, \\ \bar{q}_{i+1}^* &= \bar{q} + \tilde{\beta}_i^1 \bar{D}_{i+1} + \tilde{\beta}_i^2 \bar{d}_i, \end{aligned} \quad (87)$$

missä α_i^1 ja $\tilde{\alpha}_i^2$ saadaan kaavoista (50) ja

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_i^1 &= \frac{\bar{G}_i^T \bar{D}_{i+1}}{\bar{G}_i^T (\bar{D}_{i+1} - \bar{d}_i)} - \frac{\bar{d}_i^T \bar{F}_i}{\bar{G}_i^T \bar{d}_i}, \\ \tilde{\beta}_i^2 &= \frac{\bar{G}_i^T \bar{q}}{\bar{G}_i^T (\bar{D}_{i+1} - \bar{d}_i)} - \frac{\bar{d}_i^T \bar{p}_{\text{ref}}}{\bar{G}_i^T \bar{d}_i}. \end{aligned} \quad (88)$$

Ehdot päivityksen suorittamiselle saadaan vastaavalla tavalla kuin modifioidulle BFGS iteraatiolle kaavoissa (84).

ITERAATION SUPPENEMISKRITEERIT

Iteraation lopettaminen voi perustua siirtymien, epätasapainovoimien tai näiden skalaaritulon muutosten seuraamiseen. Ehkä yleisin ja samalla siirtymämenetelmään perustuvassa elementti-formulaatiossa luonteivin on tarkastella muutosta siirtymätilassa. Iteraatio lopetetaan kun

$$\| \bar{d}_i^j \| < \text{TOLD} \cdot \| \bar{u}_{\text{ref}} \|, \quad (89)$$

missä TOLD on suppenemistoleranssi, $\| \cdot \|$ sopiva vektorinormi, joka usein on euklidinen normi $\| \cdot \|_2$ ja \bar{u}_{ref} on vertailusiirtymävektori, jolle hyvä valinta on

$$\bar{u}_{\text{ref}} = \bar{u}_i^j. \quad (90)$$

Suppenemistoleranssi tulisi valita siten, että iteroinnin lopettamisen jälkeen jäävä virhe olisi samaa suuruusluokkaa diskretointi ja inkrementointivirheiden kanssa. Näiden virheiden suuruutta ei yleensä tiedetä, joten iteraation suppenemistoleranssi valitaan usein kokemuksen perusteella.

Euklidinen vektorinormi ei ota huomioon sitä, että siirtymävektori sisältää erilaatuisia suureita: siirtymiä ja kiertymiä. Mahdollisesti luotettavamman kuvan tasapainotilan saavuttamisesta antaisi seuraavanlainen skaalattu ehto

$$\frac{1}{n} \left[\sum_{k=1}^n \left| \frac{d_k^j}{(\Delta u_k)_i} \right|^2 \right]^{\frac{1}{2}} < \text{TOLD}, \quad (91)$$

jota Bergan /13/ on käyttänyt. Eräs mahdollisuus yhteismitallistaa siirtymävektorin alkiot on kertoa ne askeleen alun tangenttijäykkymatriisin diagonaalitermeillä.

Lopetuskriteeriin voidaan myös liittää kontraktiotekijä, jotta välttyttäisiin iteraation lopettamiselta liian aikaisessa vaiheessa sellaisissa tilanteissa, joissa on siirtymissä pienet mutta tasaiset muutokset. Tällöin ehto on

$$\frac{q}{1-q} \|j\bar{d}_i\| < \text{TOLD} \cdot \|\bar{u}_{\text{ref}}\|, \quad (92)$$

missä q on kontraktiotekijä ja määritellään /5/ yhtälöllä

$$q = \max\left(\frac{\|j\bar{d}_i\|}{\|j\bar{d}_{i-1}\|}, \frac{\|j\bar{d}_{i-1}\|}{\|j\bar{d}_{i-2}\|}\right) \text{ ja } q \in [\frac{1}{2}, 1). \quad (93)$$

Lopetusehto (92) on tietysti konservatiivisempi kuin ehto (89).

Epätasapainon suuruuteen yhtälössä (1) perustuvat lopetusehdot ovat muotoa

$$\|j\bar{F}_i\| < \text{TOLF} \cdot \|\bar{F}_{\text{ref}}\|, \quad (94)$$

missä vertailukuorma \bar{F}_{ref} voidaan valita seuraavasti

$$\bar{F}_{\text{ref}} = \max(j\bar{P}_i, j\bar{R}_i), \text{ tai} \quad (95)$$

$$\bar{F}_{\text{ref}} = j\bar{F}_1. \quad (95')$$

Energiakriteeriksi kutsutaan seuraavanlaista lopetusehtoa:

$$j\bar{F}_i^T j\bar{d}_i < \text{TOLE} \cdot j\bar{F}_1^T j\bar{d}_1. \quad (96)$$

NUMEERISET ESIMERKIT

Yleistä

Tässä artikkelissa esitetyt numeeriset esimerkit ovat tasokehiä, joita on analysoitu Timoshenkon palkkiteoriaan perustuvalla kehäsauvaelementillä /14/.

Siirtymiä u , v ja ϕ approksimoidaan lineaarisilla polynomeilla. Elementin tasapainoyhtälöt on muodostettu päivitetyn (inkrementaalisen) Lagrangen tarkastelutavan mukaisesti.

Materiaalia on kuvattu ideaalikimmoisella tai kimmoplastisella mallilla, jossa materiaalilaki on inkrementaalisen J_2 teorian mukainen. Jäykkyyssmatriisissa on otettu huomioon vain geometrisesta epälineaarisuudesta aiheutuvat tekijät, eli

$$\underline{K} = \int_V \underline{B}^T(\bar{u}) \underline{CB}(\bar{u}) dV + \underline{K}(\underline{S}), \quad (97)$$

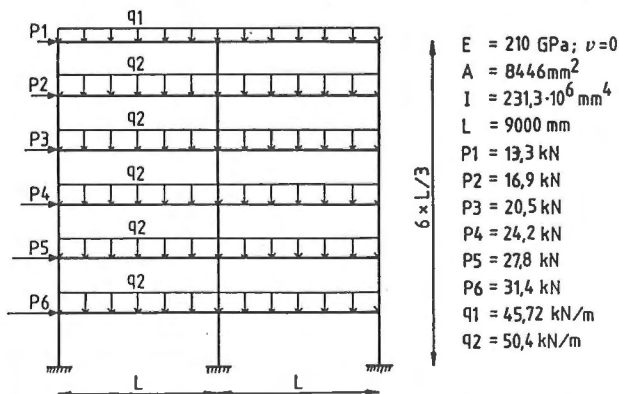
missä \underline{B} on siirtymistä riippuva muodonmuutosmatriisi, \underline{C} on elastinen materiaalmatriisi ja $\underline{K}(\underline{S})$ on jäykkyyssmatriisin jännityksistä \underline{S} riippuva osa.

Geometrisesti epälineaarisisissa laskelmissa on iteraatiokierrosten maksimimääräksi asetettu 20 ja esimerkeissä, joissa on otettu huomioon myös fysikaalinen epälineaarisuus, iteraatioiden maksimimäärä on ollut 100.

Kaikki esimerkit on laskettu opetusministeriön VAX8600 tietokoneella (sananpituus 32 bittiä) käyttäen reaalityyppisille kaksinkertaisen tarkkuuden esitystä.

Kuusikerroksinen kehä

Ensimmäisenä esimerkkinä laskettiin kaksilaivaista ja kuusikerroksista tasajäykkää kehää. Rakenne jaettiin 324:n yhtäsuureen elementtiin jolloin malli käsitti 315 solmupistettä ja 945 vapausastetta. Jäykkyyssmatriisin puolinauhanleveys, mukaanlukien diagonaali, oli 27. Kuvassa 7 on esitetty rakenteen geometria, materiaali- ja poikkileikkaussuureet sekä kuormaparametrin arvoa $\lambda=1$ vastaava kuormitus. Menetelmät mBFGS2, mBFGS3 ja mDFP2 osoittautuivat tässä esimerkissä tehokkaimmiksi. Suppenemista testattiin epäyhtälöiden (89) ja (90) avulla ja TOLD= 10^{-4} .



Kuva 7. Kuusikerroskehä; materiaali, rakenne ja kuormitustiedot (vastaten kuormaparametrin arvoa $\lambda=1$). Elementtien pituus on 500 mm.

Taulukko 1. Eri iteraatiomenetelmien vertailua. Vakio kuormausaskel $\Delta\lambda=0.5$, $\lambda_{\max}=8.0$.

men.	IT	JMM	ITU	ITO	CPU*)	huom.
N-R	55	55	-	-	1,72	
nN-R	91	16	-	-	1,00	
Aitken	81	16	-	-	0,99	1)
mBFGS1	80	16	64	0	0,97	2)
mBFGS2	68	16	52	0	0,92	2)
mBFGS3	69	16	53	0	0,92	2)
mDFP1	82	16	66	0	1,00	2)
mDFP2	68	16	52	0	0,92	2)
mDFP3	74	16	58	0	0,93	2)
BFGS	90	16	7	57	1,22	2)

*) Keskusyksikköaika on normeerattu mN-R menetelmän (67,8 sek) suhteen.

- 1) Aitkenin kiihdytysten muodoilla (58) ja (58') ei ollut eroa.
- 2) Katkaisuparametrien arvot: $R_1=4,0$; $R_2=3,0$. Näillä arvoilla ei ollut tässä esimerkissä merkitystä.
- 3) $\text{Max } C_2(Q)=10^8$, käytettäessä viivahaulle toleranssia $\text{TOLVH}=0,5$ ei hakua tarvita.

IT = iteraatioita yhteensä

JMM= jäykkyysmatriisin muodostamisia

ITU= kvasi-Newton päivityksiä

ITO= päivityksestä pidättäytymisiä

Williamsin taitepalkki

Tätä esimerkkiä ovat analysoineet myös Virtanen ja Mikkola /15/ käyttäen elementtiä, jossa taipumaa kuvataan Berryn funktioilla. Palkki on erityisen hyvä testi epälineaarisen yhtälösystemin ratkaisualgoritmile, sillä kuormitusta kasvatettaessa rakenne ensin "löystyy" ja lopuksi "jäykistyy". Jäykkenevä systeemi on usein modifioidulle Newton-Raphson iteraatiolle ylivoimainen tehtävä ratkaistavaksi, ellei käytetä hyvin pientä askelta. Taulukossa 2 on esitetty tuloksia laskelmista. Kuorma pidettiin

vakiona askeleen ajan ja kaikki askeleet olivat yhtäsuuria.

Taulukko 2. Eri iteraatiomenetelmien vertailua.

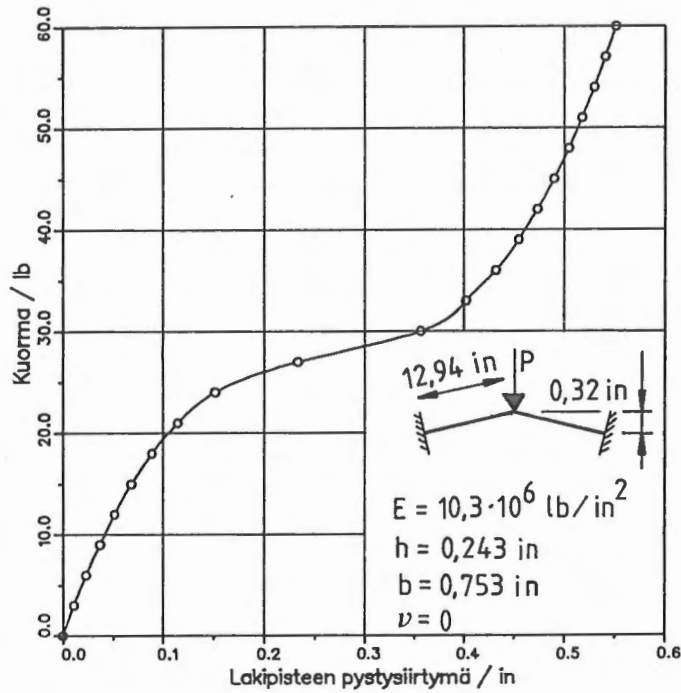
men	$\Delta\lambda/\text{lb}$	IT	JMM	ITU	ITO	CPU/sek	huom.
N-R	3	79	79	-	-	16.6	
mBFGS3	3	94	20	74	-	15.7	
BFGS	3	114	20	52	42	21.4	
BFGS+vh	3	102	20	44	38	21.2	1)
muut	3	eivät supenneet maksimikuormaan asti					
N-R	2	110	110	-	-	20.6	
mBFGS2	2	141	30	111	-	19.2	
mBFGS3	2	135	30	105	-	19.7	
BFGS	2	150	30	49	71	23.7	
BFGS+vh	2	145	30	45	70	23.1	
mDFP1	2	171	30	141	-	19.2	
mDFP2	2	134	30	103	1	19.2	
muut	2	eivät supenneet maksimikuormaan asti					

$\max C_2(Q)=10^8$, $TOLVH=0,5$, $TOLD=10^{-4}$, $R_1=4.0$, $R_2=3.0$

1) Lisäksi kaksi sisäisen voimavektorin muodostusta viivahaun yhteydessä.

Matala kaari

Padovan ja Moscarello /16/ ovat analysoineet matalaa jäykkäkantais-
ta ympyränkaarta käyttäen 12 isoparametrasta 8-solmuista taso-
jännitystilan elementtiä. Kaaren geometria, kuormitus ja mate-
riaalitiedot selviävät kuvasta 9. Esimerkki ei ole ratkaisui-
algoritmile erityisen vaativa, mutta modifioitujen kvasi-Newton
iteraatioiden tehokkuus kimmoplastisen materiaalimallin tapauksessa
on huomattava verrattuna mN-R- menetelmään. Laskenta suoritettiin
myös erilaisilla katkaisuparametrien R_1 ja R_2 arvoilla. Taulukossa



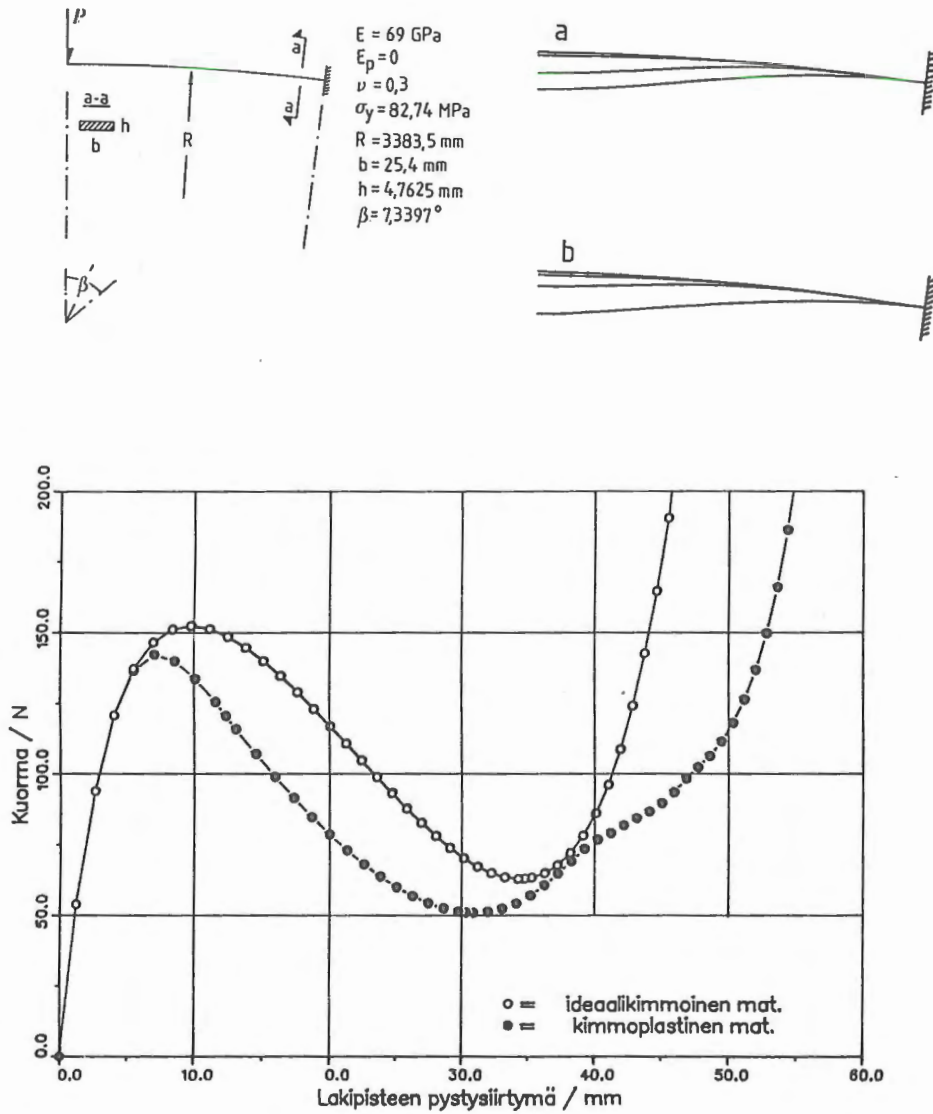
Kuva 8. Williamsin taitepalkki.

3 ja 4 on esitetty muutamia iteraatioon liittyviä tunnuslukuja. Kaaren puolikas analysoitiin käyttäen 24 elementtiä.

Taulukko 3. Kimmoinen materiaali, TOLD=10⁻⁴.

men.	IT	JMM	ITU	ITO	CPU/sek	huom.
mN-R	195	41	-	-	23	
mBFGS2	193	41	115	37	24	R ₁ =3,0; R ₂ =0,8
mBFGS3	194	41	111	42	23	" 1)
mDFP2	-	-	-	-	-	"
mDFP3	186	41	80	65	23	"
MBFGS2	198	41	122	35	24	R ₁ =4,0; R ₂ =3,0
mBFGS3	287	41	212	34	26	"
mDFP2	-	-	-	-	-	" 1)
mDFP3	215	41	148	26	24	"
mDFP2	186	41	145	-	23	ehtoa katkaisu-
mDFP3	215	41	174	-	24	parametreilla ei testattu

1) Suppeni vain 7 askelta.



Kuva 9. Matala kaari; rakennetiedot, taipumamuotoja alkutilassa ja kuorman arvoilla 100 N: a) ideaalikimmoinen materiaalmalli b) kimmoinen ideaaliplastinen malli. Alinna on esitetty kaaren lakipisteen pystysiirtymät. Ympyrä ilmoittaa kuorma-askelten paikan.

Taulukko 4. Matala kaari, elastoplastinen materiaali, TOLD=10⁻⁴.

	IT	JMM	ITU	ITO	CPU/sek	huom.
mN-R	1161	51	-	-	103	
mBFGS2	743	52	404	287	80	R ₁ =3,0; R ₂ =0,8
mBFGS3	711	52	413	246	75	"
mDFP2	-	-	-	-	-	"
mDFP3	1134	51	136	947	104	" 1)
mBFGS2	668	51	487	130	72	R ₂ =40,0; R ₂ =30,0
mBFGS3	762	51	494	217	77	"
mDFP2	-	-	-	-	-	" 1)
mDFP3	968	51	329	588	94	"
mBFGS2	692	51	641	-	78	ehtoa katkaisuparamet-
mDFP2	706	52	654	-	75	reille ei testattu
mDFP3	922	57	865	-	92	

1) Suppeni vain 7 askelta.

Syvä ympyräkaari

Viimeisenä esimerkkinä analysoitiin syvää ympyränkaarta (kuva 10), jonka analyttisen ratkaisun ovat esittäneet DaDeppo ja Schmidt /17/. Kyseistä kaarta ovat monet elementtimenetelmän tutkijat käyttäneet esimerkkinään mm. Wood ja Zienkiewicz /18/. He ovat testanneet sillä paralineaarista isoparametrasta tasojännitustilan elementtiä.

Rakenteen käyttäminen on jo aivan pienilläkin kuorman arvoilla hyvin epälineaarista, jolloin mN-R menetelmä vaatii hyvin pienen askelkoon supetakseen. Laskettaessa täydellisellä N-R iteraatiolla alkuaskeleen ollessa $\sigma_{\Delta\lambda}=4EI/R^2$, saavutettiin rajapiste 15 askeleen jälkeen kuorman arvolla $9,326 EI/R^2$ (16 elementtiä). Analyttinen rajapisteen kuorma on $8,97 EI/R^2$, joten virhe oli noin 4,0%. Suppenemista testaattiin yhtälön (92) avulla toleranssin ollessa

TOLD=10⁻⁴. Laskenta-aika oli 18 CPU-sekuntia (30 askelta) ja iteraatioita tarvittiin yhteensä 147. Voima-siirtymä riippuvuudet on tästä laskelmasta esitetty kuvassa 9. Taulukossa 5 on esitetty eri menetelmistä muutamia iteraatioon liittyviä tunnuslukuja. Kuten tämän ja edellisen matalan kaaren esimerkeistä havaitaan, toimivat modifioidut DFP päivitykset vähintään yhtä hyvin kuin mBFGS menetelmät, kun katkaisuparametrien R₁ ja R₂ arvoja ei mitenkään rajoiteta.

Taulukko 5. Syvä ympyräkaari, eri menetelmien vertailua.

men.	$\sigma_{\Delta\lambda}/\text{EIR}^{-2}$	IT	JMM	ITU	ITO	CPU/sek	huom.
N-R	4.0	147	147	-	-	18	
mN-R	0.08	-	-	-	-	-	1)
mN-R	0.05	4315	460	-	-	172	2)
mBFGS2	0.05	6099	1000	3891	1208	338	3) a)
mBFGS3	0.05	6099	1000	3891	1208	331	3) a)
mDFP2	0.05	3987	547	3440	-	194	4) b)
mDFP3	0.05	4274	536	3738	-	189	5) b)
mBFGS2	0.15	101	7	92	2	-	6) a)
mDFP2	0.15	123	8	115	-	-	7) b)

a) R₁=4,0; R₂=3,0

b) Ehtoa katkaisuparametreille ei testattu.

1) Ei supennut.

2) Suppeni kuorman arvoon $\lambda_{\max}=8,51 \text{ EIR}^{-2}$

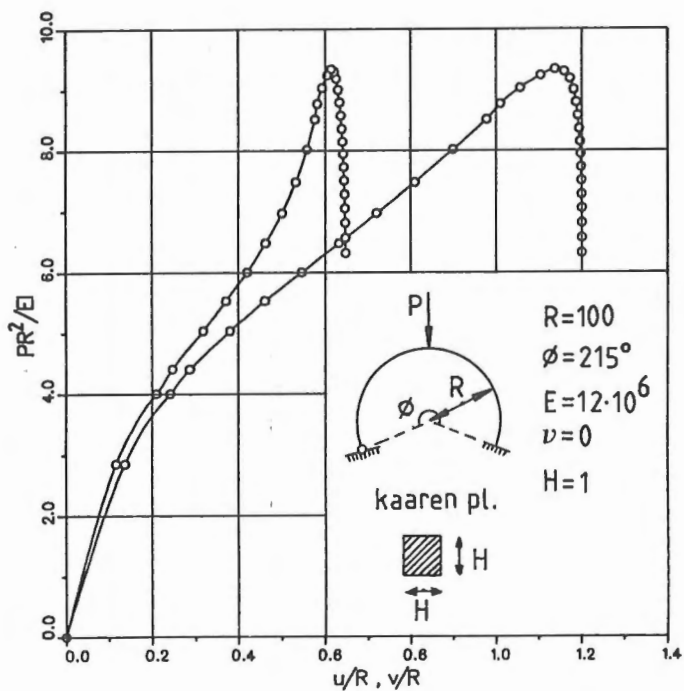
3) Maksimiaskelten määräksi oli asetettu 1000, tällä askeleella kuorman arvo oli $\lambda=8,51 \text{ EIR}^{-2}$.

4) $\lambda_{\max}=0,49 \text{ EIR}^{-2}$

5) $\lambda_{\max}=9,44 \text{ EIR}^{-2}$

6) $\lambda_{\max}=0,97 \text{ EIR}^{-2}$

7) $\lambda_{\max}=1,09 \text{ EIR}^{-2}$.



Kuva 10. Syvä ympyräkaari; lakipisteen vaaka- ja pystysiirtymät, sekä rakennetiedot.

JOHTOPÄÄTELMÄT

Kvasi-Newton menetelmät osoittautuivat modifioitua Newton-Raphson iteraatiota paremmin suppeneviksi ja sallivat usein huomattavastikin suuremman kuorma-askeleen käytön kuin mitä mN-R menetelmää käytettäessä olisi ollut mahdollista. Modifioidut kvasi-Newton iteraatiot ovat usein myös edullisempia kuin molemmat standardimenetelmät. Siirtymärajoitteen lisääminen yhtälösystemiin parantaa suppenemisominaisuuksia ja mukauttavat kuorman inkrementoinnin rakenteen epälineaarisuuden mukaan. Kvasi-Newton algoritmien käyttö kaarenpituusmenetelmien yhteydessä parantaa suppenemis-

ominaisuuksia mN-R iteraatioon verrattuna, mutta laskenta-ajan pieneneminen ei ole aivan selviö.

Vahvasti geometrisesti epälineaarisisissa tapauksissa ei kvasi-Newton menetelmillä saatu toivottua tulosta, vaan täydellinen Newton-Raphson iteraatio vaadittiin suppenemisen saavuttamiseksi. On ilmeistä että tangettijäykkyyden päivittäminen kvasi-Newton yhtälöillä ei johda niin suureen laskenta-ajan vähenemiseen, että epälineaaristen tehtävien käsittely tulisi normaalin insinöörityön piiriin. Ilmeisesti hierarkisen lähestymistavan ja dynaamisen tai viskoosin relaksaation käyttö epälineaarisen systeemin ratkaisussa tuo huomattavasti suuremman parannuksen kuin kvasi-Newton algoritmeilla voidaan saavuttaa.

KIRJALLISUUTTA

- [1] Oden J.T., Finite elements in nonlinear continua, McGraw-Hill, New York, 1972. 407 s.
- [2] Ortega J.M., Rheinboldt W.C., Iterative solution of nonlinear equations in several variables. Academic Press, New York, 1970. 572 s.
- [3] Dennis J.E., More J.J., Quasi-Newton methods, motivation and theory, SIAM Rev. 19, (1977), s. 46-89.
- [4] Brodlie K.W., Gourlay A.R., Greenstadt J., Rank-one and rank-two corrections to positive definite matrices expressed in product form. J. Inst. Math. Appl. 11, (1973), s. 73-82.
- [5] Matthies, H., Strang G., The solution of nonlinear finite element equations. Int. J. Num. Meth. Engng. 15 (1979), s. 1613-1626.
- [6] Crisfield M.A., A faster modified Newton-Raphson iteration. Comp. Meth. Appl. Mech. Engng. 20 (1979), s. 267-278.
- [7] Crisfield M.A., Accelerating and damping the modified Newton-

- Raphson method. *Comp. & Struct.* 18 (1984), s. 395-407.
- [8] Crisfield M.A., Accelerated solution techniques and concrete cracking. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.* 33 (1982), s. 585-607.
- [9] Dahlquist G., Björck Å., *Numerical Methods*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1974, 573 s.
- [10] Bathe K.J., Cimento A.P., Some practical procedures for the solution of nonlinear finite element equations. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.* 22 (1980), s. 59-85.
- [11] Nayak G.C., Zienkiewicz O.C., Note on the alpha-constant stiffness method for the analysis of non-linear problems. *Int. J. Num. Meth. Engng.* 4 (1972), s. 579-582.
- [12] Crisfield M.A., A fast incremental/iterative solution procedure that handles snap-through. *Comp. & Struct.* 13 (1981), s. 55-62.
- [13] Bergan P.G., Horrigmoe G., Kråkeland B., Søreide T.H., Solution techniques for non-linear finite element problems. *Int. J. Num. Meth. Engng.* 12 (1978), s. 1677-1696.
- [14] Tuomala M., Eräiden yksinkertaisten rakenteiden staattisen ja dynaamisen vasteen analysointi elementtimenetelmällä. TKK, rakennusinsinööriosasto, rakennetekniikan laitoksen julkaisu 30. Otaniemi 1980. 183 s.
- [15] Virtanen H., Mikkola M., Tasokehien geometrisesti epälineaarinen analysointi. *Rakenteiden Mekaniikka* 18 (1985), s. 53-68.
- [16] Padovan J., Moscarello R., Locally bound constrained Newton-Raphson solution algorithms. *Comp. & Struct.* 23 (1986), s. 181-197.

- [17] DaDeppo D.A., Schmidt R., Instability of clamped-hinged circular arches subjected to a point load. Trans. ASME. (Dec. 1975), s. 894-896.
- [18] Wood R.D., Zienkiewicz O.C., Geometrically nonlinear finite element analysis of beams, frames, arches and axisymmetric shells. Comp. & Struct. 7 (1977), s. 725-735.

*Reijo Kouhia, dipl.ins., Helsingin teknillinen korkeakoulu, rakennusinsinööri-
osasto*