

## KERROKSELLISEN RAKENTEEN PALKKIELEMENTTI

Matti Leskelä

Rakenteiden Mekaniikka, Vol. 19  
No 3 1986, s. 13...19

**TIIVISTELMÄ:** Kaksisolmuisen tasosauvaelementin solmuvapausasteina tarkastellaan tavallisesti pitkittäis- ja poikittaissiirtymää sekä kiertymää ja tällaisen sauvan jäykkyyismatriisi on yleisesti tunnettu. Levyelementtejä on käytetty palkkitehtävissä, joissa on eri tavoin liitetyjä osia, esimerkiksi kerroksellisissa palkeissa ja liittopalkeissa. Tavanomaista sauvaelementtiä voidaan käyttää myös perustana kun johdetaan erikoiskäyttöön tarkoitettuja kerroksellisen palkin elementtejä. Tässä kirjoituksessa esitellään sauvaelementistä johdettu muunnettu tasosauvaelementti, jolla on monipuoliset käyttöominaisuudet, levytehtäviäkin ajatellen. Jäykkyyismatriisin kertoimet saadaan superponoimalla sauvaelementin siirtymätiloja niin, että muunnetussa elementissä syntyy siirtymätila, missä vain yksi siirtymäkomponentti on kerrallaan nollasta poikkeava.

### JOHDANTO

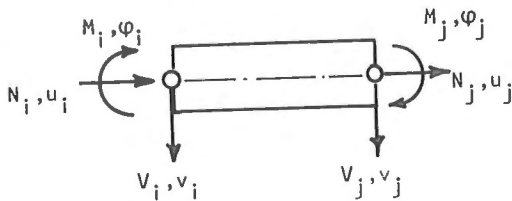
Sauvaelementtiä, jolla on solmuissa kolme vapausastetta, kiertymä ja kaksi siirtymää voidaan käyttää myös kerroksellisen rakenteen käsittelyyn, kun vapausasteet muutetaan tarkoituksen mukaisesti niin, että elementtejä voidaan kytkeä päällekkäin. Tällöin tulee mahdolliseksi tarkastella monipuolisesti myös sandwich-rakenteita, joissa kerroksilla on toisistaan poikkeavat jäykkyysominaisuudet. Jäykkyyismatriisin muodostaminen tapahtuu johtamalla tarvittavat muutokset normaalin sauvaelementin jäykkyyiskertoimiin.

### TIMOSHENKO-SAUVAELEMENTTI

Timoshenkon palkkiteoria /1,2/ huomioi leikkausmuodonmuutoksen vaikutuksen palkin siirtymätilaan ja sitä soveltaen sauvaelementin jäykkyyssyhtälöille saadaan tunnettu muoto (1)

$$\begin{bmatrix} N_i \\ V_i \\ M_i \\ N_j \\ V_j \\ M_j \end{bmatrix} = \frac{EI}{(1+\theta)L} \begin{bmatrix} \frac{EA}{EI}(1+\theta) & 0 & 0 & -\frac{EA}{EI}(1+\theta) & 0 & 0 \\ 12/L^2 & 6/L & 0 & -12/L^2 & 6/L & 0 \\ 0 & (4+\theta) & 0 & 0 & -6/L & (2-\theta) \\ \text{SYMM.} & & & \frac{EA}{EI}(1+\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12/L^2 & -6/L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (4+\theta) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ \varphi_i \\ u_j \\ v_j \\ \varphi_j \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\theta = \frac{12EI}{G\bar{A}L^2}, \quad \bar{A} = A/\alpha.$$



Kuva 1.

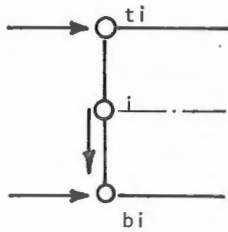
Tavanomaisen sauvaelementin laskentasuureet elementin koordinaatistossa.

$\alpha$  on poikkileikkauksen siirtymäkerroin. Sen tehtävänä on ottaa huomioon leikkajännitysten jakautuminen poikkileikkauksen korkeudella. Timoshenko määrittää sen yksinkertaisesti painopisteen korkeudella vaikuttavan leikkajännityksen suhteena keskimääräiseen (teknisen taivutusteorian mukainen leikkajännitysten laskentatapa).

Apukertoimen  $\theta$  lähestyessä nollaa saadaan kertoimiltaan teknisen taivutusteorian mukainen jäykkyyserroinkokoelma.

#### VAPAUASASTEIDEN MUUTTAMINEN

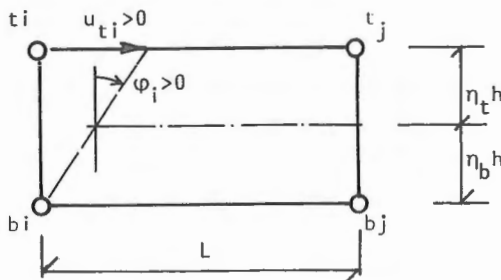
Kerrokselliseen rakenteeseen sopiva sauvaelementti on sellainen, jonka vapausasteet voidaan kytkeä joustavasti toisen elementin solmuihin käyttäen tarvittaessa jousielementtejä. Sauvan päätysolmu jaetaan sitä varten kolmeksi solmuksi, joilla kaikilla on vain yksi vapausaste, pitkittäis- tai poikittaissiirtymä (kuva 2). Ylä- ja alasolmuissa  $t_i$ ,  $b_i$  on pituussiirtymämahdollisuus ja keskisolmuissa  $i$  painopisteakselilla poikittaissiirtymämahdollisuus.



Kuva 2.  
Muunnetun elementin  
solmuvapausasteet.

### JÄYKKYYSKERTOIMET

Kerroselementin jäykkyykskerroimet saadaan antamalla jokaiselle solmulle positiivinen siirtymä muiden solmuisiirtojen ollessa nollija ja vertaamalla tarvittavia voimasuureita sauvaelementtiin. Esimerkin vuoksi tarkastellaan solmuisiirtymän  $u_{ti} > 0$  synnyttämiseksi tarvittavia voimasuureita.



Kuva 3.  
Solmuisiirtymän ja pään  
kiertymän vastaavuus.

Kuvan 3 mukaisen siirtymätilan synnyttäminen tavallisessa sauvaelementissä edellyttää aksiaalisuureita  $u_i = \eta_b u_{ti}$  ja kiertymää  $\varphi_i = u_{ti}/h$ . Nämä tuotetaan voimasuureilla

$$N_i = \frac{EA}{L} u_i = -N_j, \quad (2a)$$

$$V_i = \frac{6EI}{(1+\theta)L^2} \varphi_i = -V_j, \quad (2b)$$

$$M_i = \frac{4+\theta}{1+\theta} \frac{EI}{L} \varphi_i, \quad (2c)$$

$$M_j = \frac{2-\theta}{1+\theta} \frac{EI}{L} \varphi_i, \quad (2d)$$

Pitkittäisvoimat solmuihin  $t_i$  ja  $b_i$  järjestetään niin, että resultantteina saadaan aksiaalivoima  $N_i$  ja momentti  $M_i$ .  $N_i$ :n tuottamiseksi tarvitaan komponentit  $N_{tn}$  ja  $N_{bn}$  ja momentti  $M_i$  syntyy voimaparista  $N_{tm} = -N_{bm} = M_i/h$ ,

$$N_{tn} = \eta_b N_i / (\eta_t + \eta_b) = \xi_t N_i, \quad (3a)$$

$$N_{bn} = \eta_t N_i / (\eta_t + \eta_b) = \xi_b N_i. \quad (3b)$$

(3a) ja (3b) perustuvat vaatimukseen, että  $N_{tn}$  ja  $N_{bn}$  tuottavat aksiaalimuodonmuutostilan. Kokonaisvoimat solmuissa ovat

$$\begin{aligned} N_{ti} &= N_{tn} + N_{tm} \\ &= \xi_t \eta_b \frac{EA}{L} u_{ti} + \frac{4+\theta}{1+\theta} \frac{EI}{Lh^2} u_{ti}, \end{aligned} \quad (4a)$$

$$\begin{aligned} N_{bi} &= N_{bn} + N_{bm} \\ &= \xi_b \eta_b \frac{EA}{L} u_{ti} - \frac{4+\theta}{1+\theta} \frac{EI}{Lh^2} u_{ti}. \end{aligned} \quad (4b)$$

Päässä  $j$  saadaan vastaavasti  $u_{ti}$ :n funktiona

$$N_{tj} = \left( -\xi_t \eta_b \frac{EA}{L} + \frac{2-\theta}{1+\theta} \frac{EI}{Lh^2} \right) u_{ti}, \quad (4c)$$

$$N_{bj} = - \left( \xi_b \eta_b \frac{EA}{L} + \frac{2-\theta}{1+\theta} \frac{EI}{Lh^2} \right) u_{ti}. \quad (4d)$$

Poikittaisvoimat ovat vain kiertymän funktioita ja  $u_{ti}$ :stä ne ovat

$$V_i = -V_j = \frac{6EI}{(1+\theta)L^2 h} u_{ti}. \quad (4e)$$

Vastaavasti asetetaan yksi siirtymistä  $u_{bi}$ ,  $u_{tj}$ ,  $u_{bj}$  kerrallaan erisuureksi kuin nolla ja todetaan sitä varten tarvittavat voimasuureet.

Solmuvoimavektori on

$$\{F\}_e = \{N_{ti} \ N_{bi} \ V_i \ N_{tj} \ N_{bj} \ V_j\}^T \quad (5a)$$

ja siirtymävektori

$$\{U_e\} = \{u_{ti} \ u_{bi} \ v_i \ u_{tj} \ u_{bj} \ v_j\}^T. \quad (5b)$$

Jäykkyyssmatriisi elementin yhtälössä

$$\{F_e\} = [S_e]\{U_e\} \quad (6)$$

on

$$[S_e] = \begin{bmatrix} [S_1] & [S_2] \\ [S_2]^T & [S_3] \end{bmatrix},$$

missä alimatriisit ovat

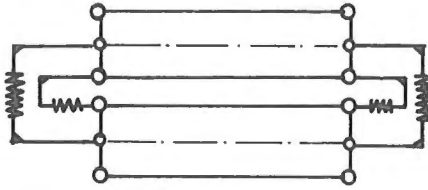
$$[S_1] = \begin{bmatrix} \xi_t \eta_b \frac{EA}{L} + \frac{4+\theta}{1+\theta} \frac{EI}{Lh^2} & \xi_t \eta_t \frac{EA}{L} - \frac{4+\theta}{1+\theta} \frac{EI}{Lh^2} & -\frac{6EI}{(1+\theta)L^2 h} \\ & \xi_b \eta_t \frac{EA}{L} + \frac{4+\theta}{1+\theta} \frac{EI}{Lh^2} & -\frac{6EI}{(1+\theta)L^2 h} \\ \text{SYMM.} & & \frac{12EI}{(1+\theta)L^3} \end{bmatrix}, \quad (7a)$$

$$[S_2] = \begin{bmatrix} -\xi_t \eta_b \frac{EA}{L} + \frac{2-\theta}{1+\theta} \frac{EI}{Lh^2} & -\xi_t \eta_t \frac{EA}{L} - \frac{2-\theta}{1+\theta} \frac{EI}{Lh^2} & -\frac{6EI}{(1+\theta)L^2 h} \\ -\xi_b \eta_b \frac{EA}{L} - \frac{2-\theta}{1+\theta} \frac{EI}{Lh^2} & -\xi_b \eta_t \frac{EA}{L} + \frac{2-\theta}{1+\theta} \frac{EI}{Lh^2} & \frac{6EI}{(1+\theta)L^2 h} \\ \frac{6EI}{(1+\theta)L^2 h} & -\frac{6EI}{(1+\theta)L^2 h} & -\frac{12EI}{(1+\theta)L^3} \end{bmatrix}, \quad (7b)$$

$$[S_3] = \begin{bmatrix} \xi_t \eta_b \frac{EA}{L} + \frac{4+\theta}{1+\theta} \frac{EI}{Lh^2} & \xi_t \eta_t \frac{EA}{L} - \frac{4+\theta}{1+\theta} \frac{EI}{Lh^2} & -\frac{6EI}{(1+\theta)L^2 h} \\ & \xi_b \eta_t \frac{EA}{L} + \frac{4+\theta}{1+\theta} \frac{EI}{Lh^2} & \frac{6EI}{(1+\theta)L^2 h} \\ \text{SYMM.} & & \frac{12EI}{(1+\theta)L^3} \end{bmatrix}. \quad (7c)$$

Palkkielementtien tapaan ei poikittaismuodonmuutoksia huomioida elementin sisällä. Jos rakenteeseen sisältyy huomattavan kokoonpuristuvia kerroksia, voidaan ne huomioida säätämällä päällekkäisten elementtien poikittaisvapausasteiden kytkentäjousien jäykkyyttä niin, että kerroksen

Jousto vastaa jousen muodonmuutosta.

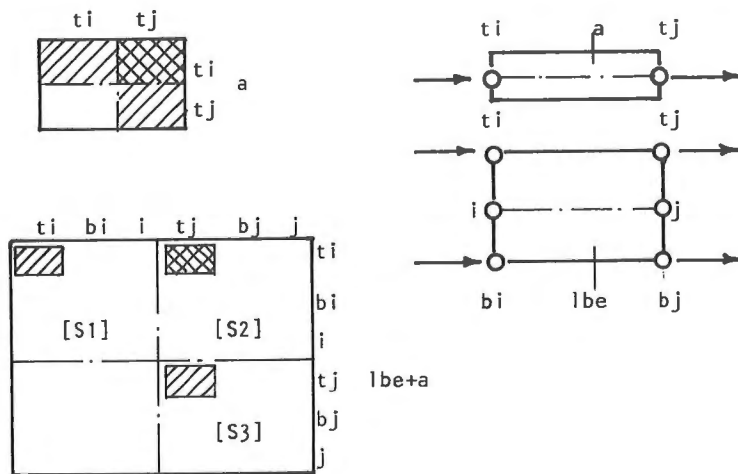


Kuva 4.  
Kahden päällekkäisen elementin jousikytkennät.

KÄYTTÖSOVELLUTUKSIA

Kuva 4 esittää kahden elementin jousikytkentöjä jotka vastaavat sandwich-rakenteen ominaisuuksien kuvaamista, kun pintaosien välissä on joustava kerros. Pystysuorat jouset huomioivat välikerroksen jouston ja vaakajouset pintaosien välisen leikkautumisen. Sama periaate sopii myös liittopalkkien tarkasteluun. Pystyjousien jäykkyys asetetaan silloin sellaiseksi, että jousien kokoonpuristuma on pieni muiden muodonmuutoksien rinnalla. Vaakasuora jousielementti kuvaa liittimen toimintaa.

Reunasolmuihin voidaan kytkeä myös aksiaalelementtejä, jolloin mm. teräsbetonipalkin ja jännitetyn palkin tarkastelulle avautuu monipuolisia mahdollisuuksia. Aksiaalelementin jäykkyykskerroimet  $(EA/L)_a$  summataan asianomaisen reunan osoittamiin lävistäjäalkioihin alimatriiseissa (7).



Kuva 5. Kerroksellisen elementin  $l_{be}$  ja aksiaalelementin  $a$  yhdistäminen.

## LÄHDELUETTELO

- [1] Timoshenko, S. & Goodier, J.N., Theory of Elasticity, Kongakusha Company Ltd, Tokyo 1968.
- [2] Owen, D.J.R. & Hinton, E., Finite Elements in Plasticity, Theory and Practice, Pineridge Press Limited, Swansea, U.K. 1980.
- [3] Cowper, G.R., The Shear Coefficient in Timoshenko's Beam Theory, Journal of Applied Mechanics V.33 1966 335-340.
- [4] Leskelä, M., Calculation models for concrete-steel composite beams, considering partial interaction, University of Oulu, Department of Civil Engineering, Oulu 1986. Acta Univ.Oul. C 36.1986. Artes Constr. 8.

*Matti Leskelä, dipl.ins., laboratorioinsinööri, Oulun yliopisto*