

Alpo Ranta-Maunus

Rakenteiden Mekaniikka, Vol. 19
No 2 1986. s. 43...55

TIIVISTELMÄ: Artikkelissa käsitellään puuta lieriömäisesti ortotrooppisena, lineaarisesti kimmoisena ja viskoelastisena aineena. Pyöreän puun kuivumisjännityksille esitetään analyyttinen ratkaisu pyörähdyssymmetrisessä tapauksessa. Lineaarinen viskoelastinen analyysi antaa tulokseksi jännitysten etumerkin muuttumisen kuivumisen aikana, kun viruminen on runsasta.

JOHDANTO

Puun pintaan syntyy kuivattaessa vuosirenkaan suuntainen vetojännitys, joka usein halkaisee puun. Kuivumisprosessin kuluessa jännityksen merkki muuttuu yleisen käsityksen mukaan siten, että kuivatun puun sisällä vallitsee veto- ja pinnassa puristusjännitys. Kuivumisjännitykset johtuvat toisaalta pinnan ja sisäosan välisestä kosteuserosta, toisaalta puun erilaisesta kuivumiskutistumasta vuosirenkaan tangentin ja säteen suunnissa.

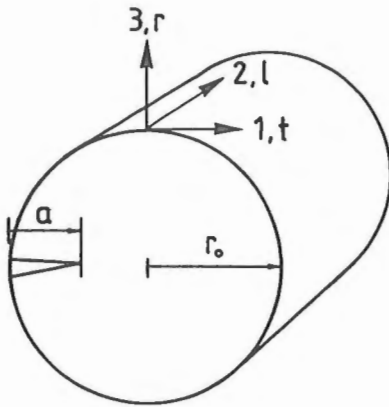
Jännitystilän analyyttinen ratkaisu onnistuu vain erikoistapauksissa. Analyysiin vaikuttavia tekijöitä ovat puun kasvutavasta johtuva lieriömäinen ortotrooppiisuus, sahatavaran suorakulmaisen muodon mukanaan tuomat reunaehdot, kosteuden vaihtelu ajan ja paikan funktiona, jännitysten relaksoituminen ja relaksaation riippuvuus kosteuden muutoksesta. Tässä artikkelissa käsitellään sylinterisymmetristä tapausta, virheetöntä pyöreätä puuta, jonka kosteus on vain säteen funktio. Kun lisäksi oletetaan puu lineaarisesti viskoelastiseksi aineeksi, jännitystilän analyyttinen ratkaisu on mahdollinen.

Pyöreän puun kuivumisjännitysten kimmoisen ratkaisun on esittänyt Arvo Ylinen /1/. Tämän artikkelin kimmainen osa on laajennus Ylisen ratkaisusta, koska tässä otetaan huomioon myös puun pinnan ja sisäosan kosteuseron vaikutus. Samaa lähes-

tymistapaa, puun käsittelyä lieriömäisesti ortotrooppisena aineena, on kirjallisuudessa käytetty myös ulkoisten kuormien aiheuttaman jännitystilän analysoinnissa /2/.

KIMMOINEN RATKAISU

Tarkastellaan lieriönmuotoista tukkia, jonka kimmovakiot ja kosteus u vaihtelevat vain säteen r funktiona (kuva 1). Ulkoisesti kuormittamattoman kappaleen



Kuva 1. Pyöreän puun analyysissä käytetty koordinaatisto (1, 2, 3) eli (t, l, r).

tangentin suuntaisen (σ_t) ja säteen suuntaisen jännityksen (σ_r) välinen tasapainoehto on tunnetusti

$$\sigma_r' + \frac{\sigma_r - \sigma_t}{r} = 0 \quad \text{eli} \quad \sigma_t = (r\sigma_r)', \quad (1)$$

missä ()' tarkoittaa derivaattaa r :n suhteen. Säteen suuntaisen siirtymän v ja muodonmuutosten välinen yhteensopivuusehto kuuluu

$$\epsilon_t = \frac{v}{r} \quad \text{ja} \quad \epsilon_r = v', \quad (2)$$

Symmetrian takia muut siirtymät r -tasossa ovat nolliä. Puulle käytetään ns. rombista konstitutiivista yhtälöä /3/, joka tässä tarkastelussa tarvittavilta osiltaan kuuluu

$$\begin{aligned} \epsilon_t &= S_{11} \sigma_t + S_{13} \sigma_r + A_1 u \\ \epsilon_r &= S_{31} \sigma_t + S_{33} \sigma_r + A_3 u. \end{aligned} \quad (3)$$

Tasojännitystilassa S_{ij} ja A_i ovat suoraan kimmomatriisin kertoimia s_{ij} ja α_i . Tasomuodonmuutostilassa

$$\begin{aligned} S_{11} &= s_{11} - \frac{s_{12}^2}{s_{22}}; \quad S_{13} = s_{13} - \frac{s_{12}s_{23}}{s_{22}}; \quad S_{33} = s_{33} - \frac{s_{23}^2}{s_{22}} \\ A_1 &= \alpha_1 - \frac{s_{12}\alpha_2}{s_{22}}; \quad A_3 = \alpha_3 - \frac{s_{23}\alpha_2}{s_{22}}. \end{aligned} \quad (4)$$

Kerroinmatriisi oletetaan symmetriseksi: $s_{ij} = s_{ji}$, jolloin myös $S_{ij} = S_{ji}$. Kertoimet α_i ovat kosteuspidenemiskertoimet eri suunnissa ja kosteus u tarkoittaa muutosta jännityksettömästä alkutilasta.

Yhtälöistä (1)-(3) saadaan σ_r :lle differentiaaliyhtälö

$$(S_{11}r(r\sigma_r)')' + (S_{13}r - S_{33}) \sigma_r = A_3u - (A_1ru)'. \quad (5)$$

Käsitellään kertoimia S_{ij} ja A_i paikan suhteen vakioina, jolloin saadaan Cauchy-tyyppinen differentiaaliyhtälö

$$r^2 \sigma_r'' + 3r\sigma_r' + k\sigma_r = \frac{A_3}{S_{11}} u - \frac{A_1}{S_{11}} (ru)' \quad (6)$$

$$\text{missä } k = \frac{S_{11} - S_{33}}{S_{11}}.$$

Kun valitaan kosteuden riippuvuudeksi säteestä

$$u = u_0 + \Delta u \left(\frac{r}{r_0}\right)^2, \quad (7)$$

saadaan jännityksille ja siirtymälle yleiset ratkaisut

$$\sigma_r = C_1 r^{-1 + \sqrt{1-k}} + C_2 r^{-1 - \sqrt{1-k}} + \frac{A_3 - 3A_1}{8+k} \frac{\Delta u}{S_{11}} \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 + \frac{A_3 - A_1}{k S_{11}} u_0 \quad (8)$$

$$\sigma_t = C_1 \sqrt{1-k} r^{-1 + \sqrt{1-k}} - C_2 \sqrt{1-k} r^{-1 - \sqrt{1-k}} + \frac{3(A_3 - 3A_1)}{8+k} \frac{\Delta u}{S_{11}} \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 + \frac{A_3 - A_1}{k S_{11}} u_0$$

$$v = C_1 (S_{11} \sqrt{1-k} + S_{13}) r^{\sqrt{1-k}} - C_2 (S_{11} \sqrt{1-k} - S_{13}) r^{-\sqrt{1-k}}$$

$$+ \left[\frac{A_3 - 3A_1}{8+k} \left(3 + \frac{S_{13}}{S_{11}}\right) + A_1 \right] \Delta u r \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 + \left[\frac{A_3 - A_1}{k} \left(1 + \frac{S_{13}}{S_{11}}\right) + A_1 \right] u_0 r.$$

Kertoimien C_1 ja C_2 määrittämiseksi asetetaan reunaehdot

$$v(0) = 0 \text{ ja } \sigma_r(r_0) = 0.$$

Siirtymäehdosta johtuu, että $C_2 = 0$ ja säteensuuntaisen jännityksen häviäminen pinnalla antaa

$$C_1 = r_0^{1 - \sqrt{1-k}} \left(\frac{3A_1 - A_3}{8+k} \frac{\Delta u}{S_{11}} + \frac{A_1 - A_3}{k S_{11}} u_0 \right). \quad (9)$$

Kun C_1 sijoitetaan kaavoihin (8) saadaan

$$\sigma_r = f_1(r) u_0 + f_2(r) \Delta u, \quad (10)$$

$$\text{missä } f_1(r) = \frac{A_1 - A_3}{S_{11} - S_{33}} \left[\left(\frac{r}{r_0}\right)^{-1 + \sqrt{1-k}} - 1 \right]$$

$$\text{ja } f_2(r) = \frac{3A_1 - A_3}{(8+k) S_{11}} \left[\left(\frac{r}{r_0}\right)^{-1 + \sqrt{1-k}} - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 \right]$$

$$\sigma_t = f_3(r) u_0 + f_4(r) \Delta u \quad (11)$$

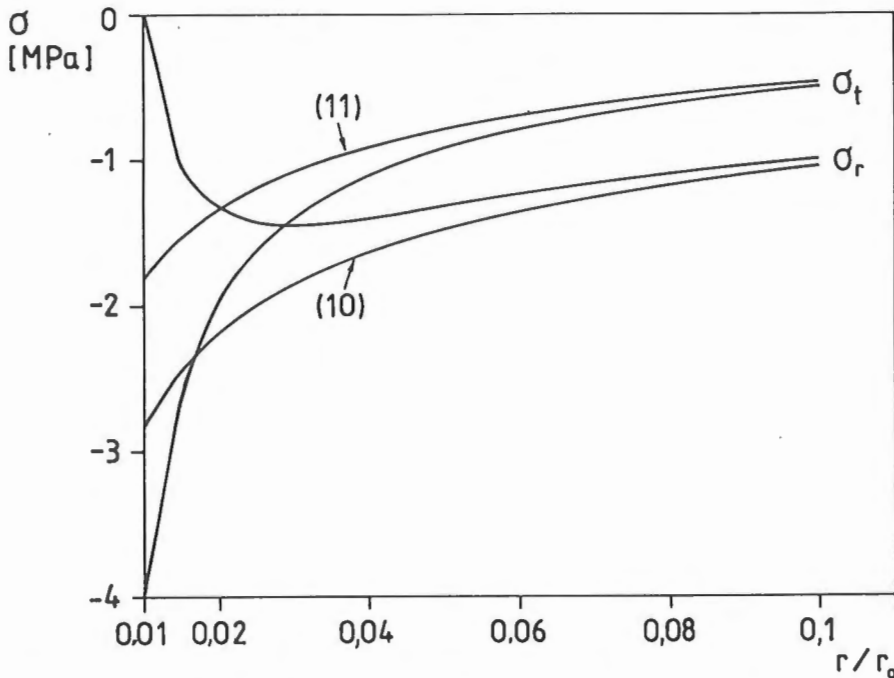
$$\text{missä } f_3(r) = \frac{A_1 - A_3}{S_{11} - S_{33}} \left[\sqrt{1-k} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-1 + \sqrt{1-k}} - 1 \right]$$

$$\text{ja } f_4(r) = \frac{3A_1 - A_3}{(8+k) S_{11}} \left[\sqrt{1-k} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-1 + \sqrt{1-k}} - 3 \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 \right].$$

Ratkaisu ei anna järkeviä jännityksen arvoja, kun $r = 0$. Kuitenkin ratkaisu on käyttökelpoinen, ellei haluta tarkastella jännityksiä nimenomaan aivan puun keskellä. Huomattakoon, että singulaarisuus on heikko ja jännitysresultantti häviää,

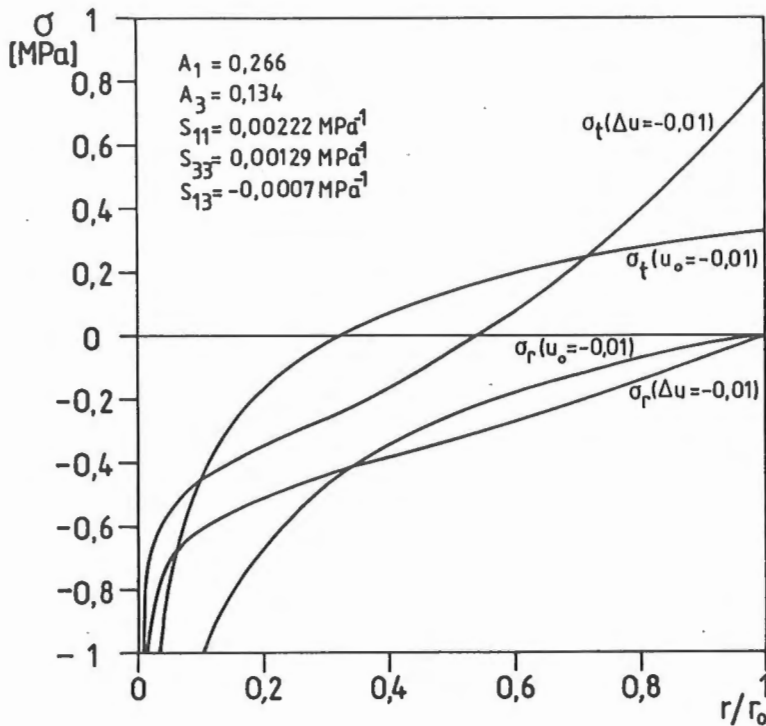
$$\int_0^{r_0} \sigma_t dr = 0,$$

kuten itsensä tasapainoittavalle jännitykselle tuleekin. Toinen vaihtoehto olisi tarkastella onttoa lieriötä ja asettaa reunaehdoksi $\sigma_r = 0$ lieriön sisä- ja ulkopinnalla. Näin onkin menetellyt Arvo Ylinen /1/. Hän on käsitellyt eri vakiokosteuksien ($u_0 < 0$, $\Delta u = 0$) aiheuttamia kuivumisjännityksiä tasojännitystilassa. Erona edellä olevaan on lisäksi, että Ylinen ei oletta symmetriaehtoa $s_{ij} = s_{ji}$, vaan käyttää kokeellisesti määritettyjä Poisson'in vakion (ν_{tr} ja ν_{rt}) arvoja. Tällöin jännitysten lausekkeet ovat muodollisesti riippuvia myös Poisson'in vakioista. Kun ontton sylinterin sisäsäde < 2 mm, saadaan näistä eroista huolimatta alueella $r > 10$ mm vähintään kahden merkitsevän numeron tarkkuudella samat numeroarvot jännityksille ($r_0 = 100$ mm). Kuvassa 2 esitetään jännitys jakaumat alueella $0,01 r_0 < r < 0,1 r_0$ sekä ontton lieriön (sisäsäde $0,01 r_0$) reunaehdoilla, että kaavojen (10) ja (11) mukaan laskettuna, kun $u_0 = -0,01$ ja $\Delta u = 0$.



Kuva 2. Singulaarisen ratkaisun ((10) ja (11)) ja ontton lieriön ratkaisun vertailu, kun $u_0 = -0,01$ ja $\Delta u = 0$.

Jännitysten (10) ja (11) arvoja on havainnollistettu kuvassa 3 piirtämällä yhden prosentin kuivumisen ($u_0 = -0,01$ kun $\Delta u = 0$ ja $\Delta u = -0,01$ kun $u_0 = 0$) aiheuttamat jännitysjaakaumat. Materiaalivakiot ovat samat kuin Ylisen artikkelissa /1/ 25 %:n kosteudessa. Huomataan, että jännitykset eivät riipu suoraan puun koosta. Kaavoissa (10) ja (11) nähdään, että kuvan 3 käyrien muodot riippuvat vain heikosti kimmovakiosta. Sen sijaan kimmo- ja kosteuspidenemävakioiden arvot vaikuttavat voimakkaasti jännitysten suuruuteen.



Kuva 3. Yhden prosenttiyksikön suuruisen kuivumisen aiheuttamat jännitysjaakaumat pyöreässä puussa. Kimmoinen ratkaisu (10) ja erikseen pinnan kuivumiselle ($\Delta u = -0,01$) ja tasaiselle kuivumiselle ($u_0 = -0,01$).

Puun kimmokertoimet vedossa ja puristuksessa poikkeavat jonkin verran toisistaan. Tämän vuoksi differentiaaliyhtälön yleisestä ratkaisusta (8) lähtien johdettiin jännitys jakaumat myös siinä tapauksessa, että S_{11} on erilainen veto- ja puristuspuolella. Esimerkkeinä laskettiin tapaukset, joissa S_{11} vedossa oli kaksinkertainen tai puolet puristusarvoihin verrattuna. Tulos oli hyvin lähellä jännitys jakaumaa, joka saadaan käyttämällä ratkaisussa (10) ja (11) vetopuolen vakiota S_{11} .

VISKOELASTINEN TARKASTELU

Kimmoteorian antamalla jännityksillä ei ole suurta käytännöllistä merkitystä, koska puu viruu nopeasti, etenkin kosteana ja kosteuden vaihdella. Seuraavaksi tarkastellaankin jännitystilaa olettamalla puu lineaarisesti viskoelastiseksi materiaaliksi. Tällöin jännitys jakaumien aika- ja paikkariippuvuus separoituvat ja paikkariippuvuus on sama kuin kimmoisessa tapauksessa (kuva 3). Jos lisäksi oletetaan virumisfunktio samaksi tangentin ja säteen suunnassa, saadaan kerroin k kaavoissa (10) ja (11) ajasta riippumattomaksi. Lineaarisen kimmoteorian ja lineaarisen viskoelastisuusteorian välillä vallitsevaa analogiaa /4/ käytetään hyväksi seuraavasti. Yhtälöiden (10) ja (11) Laplace-muunnoksissa korvataan kimmovakiot valitusta viskoelastisesta mallista riippuvilla korvikevakioilla. Käänteismuunnoksen avulla saadaan viskoelastinen ratkaisu, joka on muotoa

$$\sigma_r(r, t) = f_1(r) F_0(t) u_0 + f_2(r) F_1(t) \Delta u \quad (12)$$

$$\sigma_t(r, t) = f_3(r) F_0(t) u_0 + f_4(r) F_1(t) \Delta u, \quad (13)$$

missä f_i :t ovat samat kuin kaavoissa (10) ja (11), u_0 ja Δu tarkoittavat nyt tarkasteluhetken mennessä tapahtuneita suurimpia kosteudenmuutoksia ja funktiot F_0 ja F_1 riippuvat kosteudenmuutoksen aikariippuvuudesta ja aineen viskoelastisista ominaisuuksista. F_0 ja F_1 ovat samat, jos kosteudenmuutokset $u_0(t)$ ja $\Delta u(t)$ riippuvat samalla tavalla ajasta, mutta niille on otettu eri symbolit, koska puun keskiosan ja pinnan kuivumisnopeus ovat normaalisti erilaiset. Taulukossa 1 on annettu funktion F ($= F_0$ ja F_1) lausekkeet eräissä kuivumistapauksissa u ($= u_0$ ja Δu). Materiaalimalliksi on valittu yksinkertaisuuden vuoksi Maxwellin malli, jossa kimmainen ja viskoosi elementti ovat sarjassa. Sen käyttö on perus-

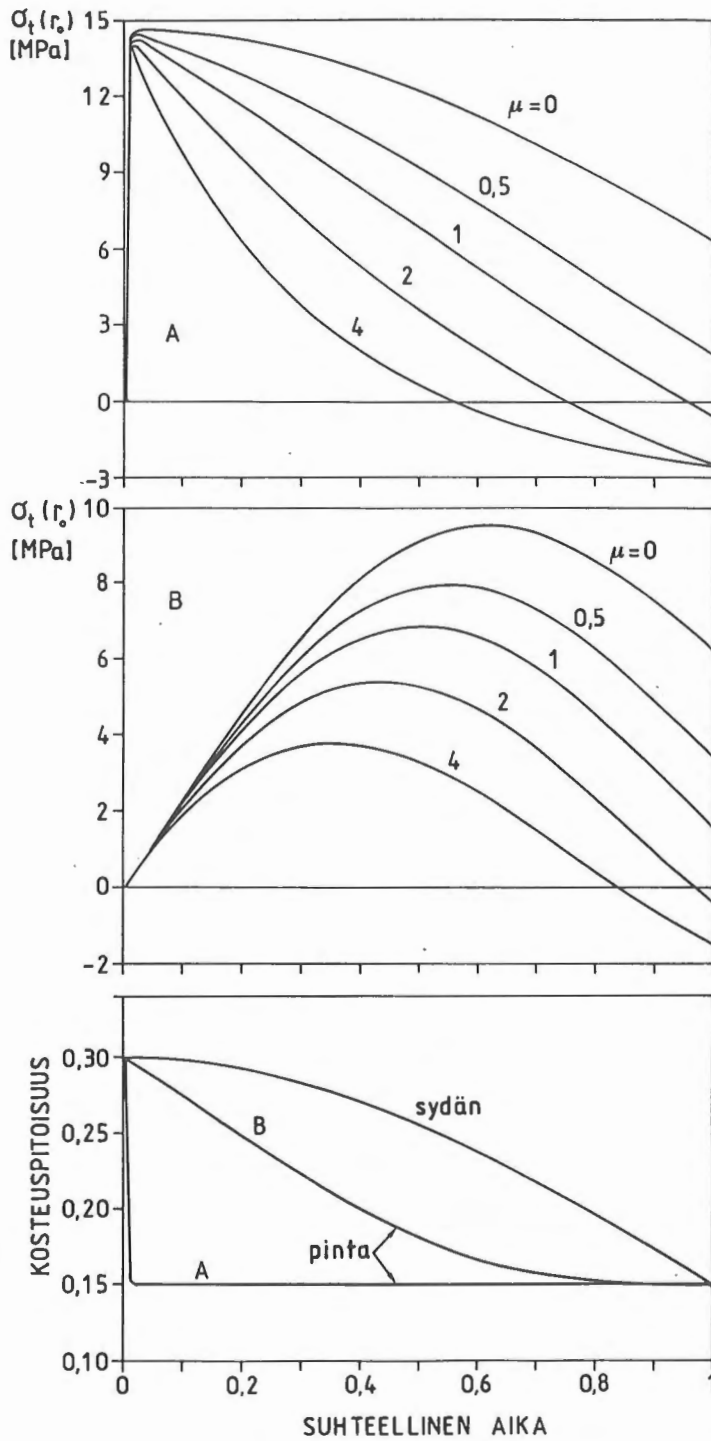
Taulukko 1. Eräiden yksikönsuuruisten kosteudenmuutosten $u(t)$ aiheuttamat jännitysten aikariippuvuudet $F(t)$ Maxwellin materiaalissa. Tarkastellaan aikaväliä $[0,1]$.

$u(t)$	$F(t)$
1 (askelfunktio)	$e^{-\mu t}$
$1,58 (1-e^{-t})$	$\frac{1,58}{\mu-1} (e^{-t}-e^{-\mu t})$
t	$\frac{1}{\mu} (1-e^{-\mu t})$
$0,5 (1-\cos \pi t)$	$0,5 \frac{\pi^2}{\pi^2+\mu^2} (\frac{\mu}{\pi} \sin \pi t - \cos \pi t + e^{-\mu t})$
$1-\cos \frac{\pi}{2} t$	$\frac{(\pi/2)^2}{(\pi/2)^2+\mu^2} (\frac{2\mu}{\pi} \sin \frac{\pi t}{2} - \cos \frac{\pi t}{2} + e^{-\mu t})$
$\sin \frac{\pi}{2} t$	$\frac{0,5 \pi \mu}{(\pi/2)^2+\mu^2} (\frac{\pi}{2\mu} \sin \frac{\pi t}{2} + \cos \frac{\pi t}{2} - e^{-\mu t})$
$\cos \frac{\pi t}{2}$	$\frac{1}{(\pi/2)^2+\mu^2} (-\frac{\pi}{2} \mu \sin \frac{\pi t}{2} + (\frac{\pi}{2})^2 \cos \frac{\pi t}{2} + \mu^2 e^{-\mu t})$
$\sin \pi t$	$\frac{\pi \mu}{\pi^2+\mu^2} (\frac{\pi}{\mu} \sin \pi t + \cos \pi t - e^{-\mu t})$

teltua suhteellisen lyhytaikaisissa tarkasteluissa, jos mallin vakio μ valitaan kokeellisen tiedon perusteella siten, että tarkasteluhetken virumismuodonmuutos on oikeaa suuruusluokkaa. Vakio jännitys σ_0 aiheuttaa Maxwellin materiaalissa muodonmuutoksen

$$\epsilon(t) = \left(\frac{1}{E} + \mu t \right) \sigma_0.$$

Numeerisena esimerkkinä vertaillaan kahta tapaa kuivata puu aikayksikössä alkukosteudesta 30 % loppukosteuteen 15 % ($u_0 = -0,15$). Ensimmäisessä tapauksessa pinnan annetaan kuivua äkillisesti loppukosteuteen (A) ja toisessa hitaammin siten, että maksimi kosteusero pinnan ja sisäosan välillä ei ylitä 7,5 % (B).



Kuva 4. Laskennallinen pinnassa vaikuttavan jännityksen kehitys nopeassa (A) ja hitaassa (B) kuviumisessa Maxwellin mallin mukaan. Materiaalivakiot ovat samat kuin kuvassa 3.

Kosteuden muutosta kuvaaviksi funktioiksi valitaan

$$u_0(t) = -0,15 (1 - \cos(\pi t/2))$$

$$A : \Delta u(t) = -0,15 \cos(\pi t/2)$$

$$B : \Delta u(t) = -0,075 \sin(\pi t)$$

eli aikayksiköksi on valittu kuivumiseen kuluva aika.

Kuva 4 esittää kosteuden muutoksia ja niistä aiheutuvaa jännitystä $\sigma_t(r_0)$ virumismisvakion μ eri arvoilla. Kokeellisten tutkimusten puutteista johtuen on epävarmaa, mikä käyristä vastaa parhaiten todellisuutta. Jotakin voidaan päätellä lopputuloksesta tarkasteluhetkellä $t = 1$. Yleensä totena pidetty "stress reversal" eli jännitysten etumerkin vaihtuminen tapahtuu vain, jos $\mu > 1$. Edelleen voidaan havaita, että äkillisen pinnan kuivumisen tapauksessa (A) jännitykset eivät ehdi relaxoitua millään μ :n arvolla ja tuloksena on varma halkeilu jännityksen pyrkiessä ylittämään puun lujuuden 2-3 kertaaisesti. Hitaammassa kuivauksessa (B) tangentiaalinen jännitys pysyy 6 MPa:n alapuolella, kun $\mu = 2$, mikä sekin merkitsisi halkeilua suuressa osassa kuivattavia puita.

HALKEAMIEN KASVU

Puussa olevien halkeamien kasvua voidaan analysoida murtumismekaniikan avulla. Koska suurin vetojännitys (σ_t) esiintyy pinnassa, tarkastellaan pinnasta lähtevien halkeamien kasvua säteen suunnassa puun sydäntä kohti (kuva 1). Merkitään halkeaman syvyyttä a :lla ja oletetaan halkeaman pituus niin suureksi, että voidaan käsitellä tasotapausta. Jännitysintensiteettikerroin lasketaan yksinkertaisesti kaavasta

$$K_I(a) = 2 \left(\frac{a}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^a \frac{\sigma_t(x)}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx \quad (14)$$

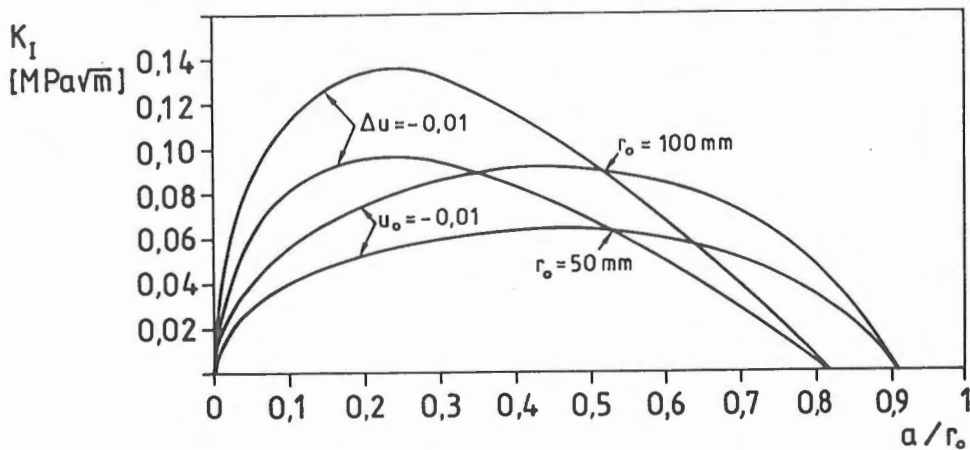
missä $x = r_0 - r$.

$$\text{Kun merkitään } Y_i(a) = 2 \left(\frac{a}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^a \frac{f_i(x)}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$$

ja sijoitetaan σ_t kaavasta (13) kaavaan (14), K_I :n lauseke voidaan kirjoittaa muotoon

$$K_I(a) = Y_3(a)F_0(t)u_0 + Y_4(a)F_1(t)\Delta u. \quad (15)$$

Kimmoisessa tapauksessa $F_0 = F_1 = 1$. Funktiot Y_i saadaan numeerisesti integroimalla ja ne on esitetty kertoimella $-0,01$ kerrottuna kuvassa 5. Käyrät esittävät siis yhden prosenttiyksikön kuivumisen aiheuttamat jännitysintensiteettikerroimet ilman relaksaatiota, tapaukset $u_0 = -0,01$ ja $\Delta u = -0,01$ erikseen.



Kuva 5. Prosenttiyksikön suuruisen tasaisen kuivumisen ($u_0 = -0,01$) ja kosteuseron ($\Delta u = -0,01$) aiheuttama jännitysintensiteettikerroin halkeillessa pyöreässä puussa, jonka säde on 50 tai 100 mm. $\sigma_t(r)$ on sama kuin kuvassa 3.

Männyn murtumissitkeys on suuruusluokkaa $K_{ICTR} = 0,3 \text{ MPa } \sqrt{\text{m}} / 5$. Kuvan 3 nopean kuivumisen tapauksessa A arvo $K_I = 0,3 \text{ MPa } \sqrt{\text{m}}$ saavutetaan alkuhalkeaman syvyydellä 2 mm. Näin pieniä halkeamia puussa on runsaasti, joten murtumismekaanisenkin tarkastelun perusteella puu halkeaa ja välittömästi syntyvän halkeaman syvyydeksi voidaan arvioida $0,75 r_0$, joka voi edelleen kasvaa puun sisäosan kuivumisen johdosta.

YHTEENVETO

Tutkimuksessa on esitetty analyyttinen ratkaisu virheettömän pyöreän puun kuivumisjännityksille, kun kosteusjakauma on pyörähdyssymmetrinen ja puu käyttäytyy lieriömäisesti ortotrooppisen, kimmoisen aineen tavoin. Ratkaisua on laajennettu elastisviskoelastisen analogian avulla koskemaan myös lineaarisesti viskoelastista käyttäytymistä ja numeerisia tuloksia on laskettu Maxwellin mallin avulla. Halkeamien kasvutaipumuksen arvioimiseksi on jännityksistä laskettu myös jännitysintensiteettikertoimien K_I arvoja. Tulokset esitetään eräänlaisten influenssi-funktioiden avulla: yhden prosenttiyksikön suuruisen tasaisen kuivumisen ja yhden prosenttiyksikön suuruisen kosteuseron aiheuttamat jännitys- ja K_I -jakau-
mat esitetään käyrästöinä. Numeerisessa esimerkissä vertaillaan hidasta ja nopeaa puun kuivatustapaa, ja tietyin edellytyksin saadaan tulokseksi puun pinnassa vaikuttavan vetojännityksen muuttuminen puristusjännitykseksi kuivumisen kuluessa.

KIITOKSET

Työ liittyy Suomen Akatemian rahoituksella tehtävään tutkimukseen "Puun sisäisten jännitysten laskentamenetelmien kehittäminen".

LÄHDELUETTELO

- /1/ Ylinen, A., Drying stresses in a cylindrical stock of wood. Tieteellisiä tutkimuksia No 1, Suomen teknillinen korkeakoulu, Helsinki 1949.
- /2/ Foschi, R.O., Plane-stress problem in a body with cylindrical anisotropy, with special reference to curved douglas-fir beams. Canada department of forestry and rural development, Forestry branch, Departmental publication Nr. 1244, 1968.

/3/ Saarelainen, U., Puurakenteet 1. Puu materiaalina, Rakentajain Kustannus Oy, Helsinki 1981.

/4/ Boley, B., Weiner, J.,

Theory of thermal stresses, John Wiley & Sons, New York 1967.

/5/ Wright, K., . Männy ja kuusen murtumissitkeyden määrittäminen CT-koekappaleilla, VTT Tutkimuksia 387, 1986.

Alpo Ranta-Maunus, tutkimusprofessori, Valtion teknillinen tutkimuskeskus, rakennetekniikan laboratorio