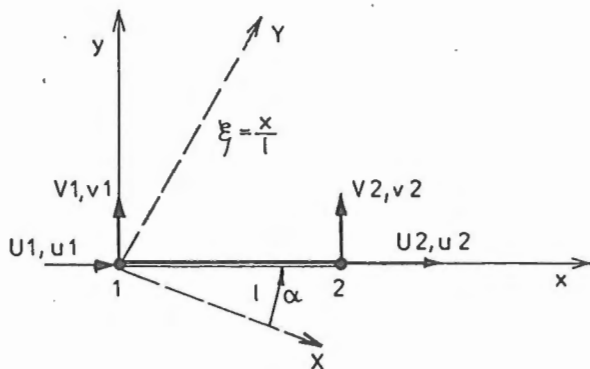


JOHDANTO

Elementtimenetelmän yksinkertaisin jäykkyysmatriisi lienee Hooke'n lakia noudattavan suoran tasoristikkosauvan jäykkyysmatriisi. Se luotiin 50-luvulla, Argyris /1/ ja sitä käytettiin paljon ns. matriisimenetelmien, Livesley /2/ yhteydessä. Jäykkyyttä määritettäessä huomioidaan siinä vain aksiaalinen puristusjäykkyys EA/L , jossa E on kimmomoduli, A poikkipinta-ala ja L pituus. Kuvassa 1 on puolestaan näytetty ne voimat U_1, U_2, V_1 ja V_2 , jotka sauvan päihin - solmuihin 1 ja 2 kohdistuvat. Samoilla, mutta pienillä kirjaimilla on merkitty solmujen siirtymät x - ja y -koordinaattien suunnissa.



Kuva 1. Tasoristikkoelementti.

Sauvan tasapainoyhtälö on

$$\{F\} = [K_E]\{\delta\} \quad (1)$$

Sama yhtälö komponentit eriteltynä on

$$\begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} \quad (2)$$

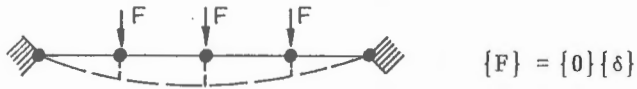
Jäykkyysmatriisin merkinnässä $[K_E]$ on käytetty alaindeksiä korostamaan pienten muodonmuutosten elastisuutta. Tätä yhtälöä käytetään staattisesti määrättyjen tai määräämättömien ristikoiden laskennassa. Luonnollisesti on ensin suoritettava asianmukainen koordinaatiston muunnos /2/.

Ristikkosauvoista voi koota köyden rakennemallin sauvajonona. Kuitenkin köysirakenne - myös verkko - poikkeaa toiminnaltaan ratkaisevasti ristikosta. Rakenteen jäykkyysmatriisin determinantti on köysissä yleensä nolla, eikä (2):n avulla muodostettua jäykkyysmatriisia voi siten kääntää. Köysirakenteiden ratkaisemiseksi ainakin siinä tapauksessa, kun jäykkyysmatriisin käänteisarvo puuttuu, on käytettävä muita menetelmiä tai ainakin koetettava etsiä sellaisia jäykkyysominaisuuksia huomioitavaksi, että jäykkyysmatriisi saadaan käännettyä. Tällöin on muistettava köysirakenteiden tutkimuksessa työskennelleet pohjoismaiset tutkijat H.A. Buchholdt /3/ ja H. Möllmann /4/, jotka ovat kehittäneet sovellutuskelpoiset teoriat köysiverkkojen statiikan laskentaan.

Tässä kirjoituksessa halutaan lähteä käyttämään hyväksi perusristikkosauvaa (2) ja johtaa lyhyesti jännityksen vaikutus ristikkosauvan jäykkyyteen. Tällöin voi pysyttäytyä köysirakenteen analyysin kohdalla standardinomaisten FEM-proseduurien ratkaisumalleissa esim. dynaamisen relaksaation, Lewis, Jones ja Rushton /5/ tapaan tai simuloinnin tapaan, Aula /6/, antaen rakenteen värähtelyn vaimentua staattiseen lepotilaan.

JÄNNITYKSEN MERKITYS

Jännitettyyn lankaan kuuluu poikittainen jäykkyys, kuten lukijakin on voinut esim. kitaran kielen värähtelyä tarkastellessaan todeta. Ilman jännitystä puuttuu poikittaisjäykkyys (kuva 2).



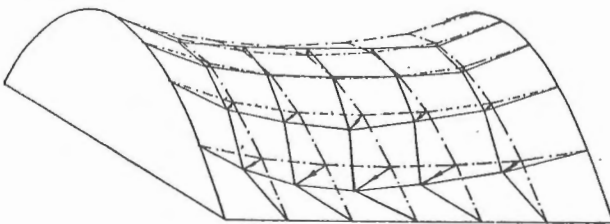
Kuva 2. Poikittaisjäykkyyden puuttuminen.

Vetojännitys ei ole ainoa jäykkyyden osatekijä. Aksiaalisen jännityksen ohella vaikuttaa ilmeisesti köydessä oleva taitekulma jäykkyyttä lisäävästi kuvan 3 tapaan. Tätä ominaisuutta hyödynnetään köysiverkoissa.

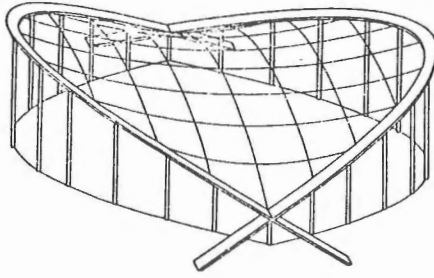


Kuva 3. Taitekulma ja poikittaisjäykkyys.

Kun pyritään saamaan köysiverkosta riittävän jäykkä rakenne esimerkiksi kate on asennuksessa säädetty jännitys muodon ohella keskeinen tekijä. Mielikuvan muodostamista köysiverkon toiminnasta auttanevat kuvat 4 a ja 4 b.



Kuva 4a. Köysiverkon muodonmuutoksia /3/.



Kuva 4b. Esimerkki köysiverkosta /4/.

Abrate ja Sun /7/ ja Godbole, Krishna ja Jain /8/ ovat johtaneet samasta kokonaisuudenmuutosenergian lisäyksen lausekkeesta

$$U = \int_V \left(\int_{\epsilon^0}^{\epsilon^0 + \epsilon^a} \sigma d\epsilon \right) dV \quad (3)$$

lähtien jännityksestä riippuvan geometrisen jäykkymatriisin huomioimalla alkuvienymää ϵ^0 lisäävän inkrementaalisen venymän ϵ^a .

GEOMETRINEN EPÄLINEAARISUUS

Lähteissä /7/ ja /8/ on mukana sauvan suuri rotaatio ja pieni venymä venymän lausekkeeseen on otettu mukaan kohtisuorasta poikittaisliikkeestä aiheutuva rotaatio inkrementaalisen venymän

$$\epsilon^a = du/dx + \frac{1}{2} (dv/dx)^2 \quad (4)$$

toisena terminä.

Voimassa on Hooke'n laki

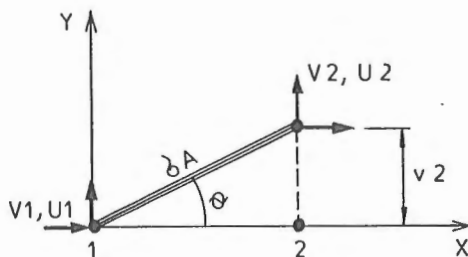
$$\sigma = E \epsilon \quad (5)$$

ja venymä $\epsilon = \epsilon^0 + \epsilon^a$.

Molemmissa lähteissä /7/ ja /8/ on sitten muotofunktioiden kautta laskettu jäykkymatriisit.

Geometrinen jäykkymatriisi voidaan johtaa kuitenkin lyhyesti, Aula /9/. Kun sauvan kiertymä on θ (ks. kuva 5), saadaan

$$\begin{aligned} V_1 &= -\sin\theta \cdot \sigma A & \text{ja} \\ V_2 &= \sin\theta \cdot \sigma A \end{aligned} \quad (6)$$



Kuva 5. Elementin kiertymä.

Koska kulma θ on pieni, on $\theta \approx v_2/l$ eli

$$\begin{aligned} V_1 &= -\sin \frac{v_2}{l} \cdot \sigma A = -\frac{\sigma A}{l} v_2 \\ V_2 &= \sin \frac{v_2}{l} \cdot \sigma A = \frac{\sigma A}{l} v_2 \end{aligned} \quad (7)$$

Siinä sini-ilmaisu on kehitetty sarjaksi

$$\sin \frac{v_2}{l} = \frac{v_2}{l} - \frac{v_2^3}{3! \cdot l^3} + \dots$$

ja on huomioitu vain sen 1. termi.

Koska mukaan otetaan vain geometrisen epälineaarisuuden aiheuttava inkrementaalinen venymä , on tässä tarkastelussa $U_1 = 0$ ja $U_2 = 0$. Nyt voidaan (7):n avulla edellä sanottu huomioiden kirjoittaa elastista yhtälöä (2) vastaava geometrisen tasapainoyhtälö

$$\begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \end{Bmatrix} = \frac{\sigma A}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} \quad (8)$$

eli lyhyemmin merkittynä

$$\{F\} = [K_\sigma] \{\delta\} \quad (9)$$

Kokonaisjäykkyys on sitten elastisen ja geometrisen jäykkyyden summa

$$[K] = [K_E] + [K_\sigma] \quad (10)$$

GEOMETRISEN JÄYKKYYSMATRIISIN MERKITYS

Kun tarkastellaan jäykkyysmatriisia

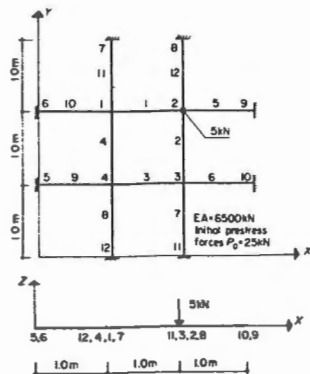
$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & \frac{\sigma A}{L} & 0 & -\frac{\sigma A}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{\sigma A}{L} & 0 & \frac{\sigma A}{L} \end{bmatrix} \quad (11)$$

on nähtävissä, että siinä kaikkia solmuvoimakomponentteja vastaa nollasta eriävä jäykkyysarvo. Kertoimet $\frac{\sigma A}{L}$ diagonaalilla edustavat nimenomaan poikittaisjäykkyyttä. Tätä matriisia käyttämällä on muodostettavissa jännitetyille, jännittämättömänä labiilille köysiverkolle käännettävissä oleva jäykkyysmatriisi. Positiivisilla σ :n arvoilla on sen determinantti positiivinen. Tämä merkitsee, että esimerkiksi kuvan 4a jännitetyn köysiverkon siirtymät voi ratkaista kääntämällä jäykkyysmatriisi. Ilman geometrista jäykkyyttä se ei missään tapauksessa olisi mahdollista.

Seuraavassa luvussa tarkastellaan lopuksi numeroesimerkein geometrisen jäykkyysmatriisin käytöstä saatuja kokemuksia.

ESIMERKKEJÄ

Ensimmäisenä esimerkkinä on kehittämälläni tietokoneohjelmalla GERDA I laskettu Pietrzakin /11/ tehtävä: köysiverkko (kuva 6). Pietrzak laski staattiset voimat ja siirtymät matriisimenetelmällä. Sama esimerkki on laskettu tässä dynaamisena efektiivisen massan menetelmällä /10/. Käyttämällä vaimennusta on saatu staattinen lopputila vaimenevan värähtelyn tuloksena.



Kuva 6. Esimerkkiverkko /11/.

Esimerkissä on suorakulmainen tasoksi jännitetty verkko (kuva 6). Esiännitysvoima on 25 kN kussakin 12 elementissä. Verkon jännemitta on 3 m kummassakin

suunnassa. Elementtien pinta-alat ovat $32,5 \text{ mm}^2$. Kimmomodulin ja alan tulo $EA = 6500 \text{ kN}$. Omapaino on $0,039 \text{ kg}$. Kuormituksena on solmuun 2 vaikuttava kohtisuora 5 kN :n voima.

Taulukossa 1 on esitetty GERDA I:llä elementin geometrinen jäykkyys huomioiden lasketut luvut. Suluissa on Pietrzakin /11/ tulokset.

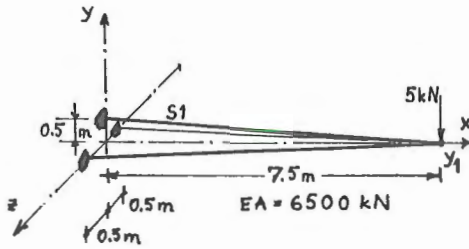
Taulukko 1. Verkko, GERDA I /6/. Suluissa, lähde /11/.

Elementti	Voima [kN]	Solmu	Suunta	Siirtymä [cm]
1	29,324 (29,266)	1	x	
3		1	z	1,52 (1,514)
4	25,379 (25,370)	2	x	
6		2	z	5,02 (4,999)
9	25,391 (25,387)	3	z	1,52 (1,514)
10	29,283 (29,228)	4	x	
11	25,367 (25,363)	4	y	
12	29,376 (29,321)	4	z	0,76 (0,753)

Simuloimalla lasketut tulokset ovat valituilla vaimennusarvoilla muuttuneet laskettuna ajanjaksona $t = 1,024 \text{ s}$ vakiintuneiksi - voimat 1 N :n ja siirtymät $0,01 \text{ cm}$:n tarkkuudella. Aika-askel oli $0,0512 \text{ s}$ ja integrointimenetelmä ehdoitta stabiili.

Tätä kirjoitusta laadittaessa testattiin vertailun vuoksi jäykkyysmatriisia, josta puuttui geometrinen jäykkyys. Huolimatta ehdoitta stabiilista integrointimenetelmästä EI aika-askelta pienennettäessä SAATU niinkään pienellä askeleella kuin $0,0004 \text{ s}$ LAINKAAN STABILEJA TULOKSIA! Kun geometrinen jäykkyys oli huomioitu, ei suurella aika-askeleella $0,2048 \text{ s}$ tullut esiin stabiiliteetti-vaikeuksia. Numeerinen laskutarkkuus oli n. 7 merkitsevää numeroa.

Vaikuttiko rakennetyyppi geometrisen jäykkyysmatriisin merkitykseen? Sen toteamiseksi on seuraavana toinen esimerkki hoikasta ristikosta (kuva 7). Numerotulokset ovat taulukossa 2. Siinä on ensimmäisen vaimentamattoman heilahduksen arvot.



Kuva 7. Ristikkoesimerkki.

Taulukko 2. Ristikkoesimerkki. Taipuma ja voima ajan funktiona.

AIKA [s]	Taipuma y_1 [m]		Voima S_1 [N]	
	E + σ	E	E + σ	E
0	0	0	0	0
0,0032	- 0,0593	- 0,0593	2483	2483
0,0064	- 0,2007	- 0,2014	8846	8883
0,0096	- 0,3342	- 0,3402	13854	14164
0,0128	- 0,3758	- 0,3924	14487	15183
0,0160	- 0,3039	- 0,3268	11967	12796
0,0192	- 0,1675	- 0,1826	7484	8199
0,0224	- 0,0534	- 0,0466	2820	2079
0,0256	- 0,0327	- 0,0009	1255	132
0,0288	- 0,1144	- 0,0732	4798	3131

Lähinnä taipumahuippua olevan hetken $t = 0,0128$ s taipumien suhde on 1,044 ja voimien suhde 1,048. Geometrisen jäykkyyden huomioiminen lisää tässä jäykkyyttä lähes 5%. Esimerkkiristikon yläsauvan jännitys on tosin korkea 446 N/mm^2 eikä sikäli voine vastata käytäntöä.

YHTEENVETO

Lyhyessä kirjoituksessa on haluttu tuoda esiin kokemuksia mahdollisuuksista, joita ristikkosauvan jäykkyysmatriisin täydennys jännitystilasta riippuvalle geometrisella jäykkyysmatriisilla tarjoaa. Täydennys antaa mahdollisuuden käyttää elementtiä jännitettyjen köysien ja köysiverkkojen analyysiin ja muutoin rakenteen jäykkyysmatriisin käänteismatriisin puuttumisesta aiheutuvat vaikeudet ovat vältettävissä.

Kirjoituksessa on esimerkki köysiverkon analyysistä dynaamista simulointia käyttäen. Esimerkissä ei ainakaan efektiivisen massan menetelmällä saada lainkaan ratkaisua ellei geometristä jäykkyysmatriisia huomioida.

Jatkotutkimuksissa olisi selvitettävä, voiko geometrisen jäykkyysmatriisin puuttuminen aiheuttaa stabiiliuden menetyksen muutoin ehdottomasti stabiilissa vasteen integrointimenetelmässä. Onko vaimennuksen mukanaololla tässä esimerkissä vaikutusta?

Toisena esimerkkinä lasketun hoikan ristikon tulosten perusteella voi arvioida, että geometrisen jäykkyysmatriisin huomioiminen ei ristikkotyypin rakenteen kohdalla ole tavallisesti tarkkuuden takia tarpeen. Hoikan puristetun ristikon kohdalla tilanne voi olla toinen.

LÄHDELUETTELO

- /1/ Argyris, J.H., Energy Theorems and Structural Analysis. London Butterworths 1971.
- /2/ Livesley, R.K., Matrix Methods of Structural Analysis. Pergamon Press, Oxford 1969.
- /3/ Buchholdt, H.A., Deformation of prestressed cable-nets. Acta Polytechnica Scandinavica Ci 38, Trondheim 1966.

- /4/ Möllmann, H., Analysis of Hanging roofs using the Displacement Method. Acta Polytechnica Scandinavica Ci 68, Copenhagen 1971.
- /5/ Lewis, W.J., Jones, M.S. & Rushton, K.R., Dynamic Relaxation Analysis of the Non-linear Static Response of Pretensioned Cable Roofs. Computers & Structures, Vol. 18, No. 6, pp. 989-997, 1984. Pergamon Press, GB.
- /6/ Aula, A., Geometrisesti epälineaarisen ristikon dynamiikan analyysiohjelma GERDA I. Oulun yliopisto Rakennetekniikan laboratorio. Julkaisu 22, Oulu 1985.
- /7/ Abrate, S. & Sun, C.T., Dynamic Analysis of Geometrically Nonlinear Truss Structures. Computers & Structures. Vol. 17, No. 4, pp. 491-497, 1983. Pergamon Press, GB.
- /8/ Gobbole, P.N., Krishna, D. & Jain, J.K., Boundary Effects in Suspended Cable Roofs. Journal of Structural Engineering, Vol. 110, No. 5, May 1984.
- /9/ Aula, A., Lineaarisen kiihtyvyyden menetelmä ja köyden dynamiikka. Lissensiaattityö. Oulun yliopisto Rakentamistekniikan osasto, 1984.
- /10/ Aula, A., Efektiivisen massan menetelmä epälineaaristen rakenteiden dynamiikassa. Rakenteiden Mekaniikka 1985, Helsinki. (Julkaistavana).
- /11/ Pietrzak, J., Matrix Formulation of Static Analysis of Cable Structures. Computers & Structures. Vol. 9. pp. 39-42, 1978. Pergamon Press, GB.

Antti Aula, tekn.lis., Oulun yliopisto, Rakentamistekniikan osasto