

SOLMUVOIMAT JA SOLMUVIRRAT

Eero-Matti Salonen
Jukka Aalto

Rakenteiden Mekaniikka, Vol. 19
No 1 1986, s. 14...63

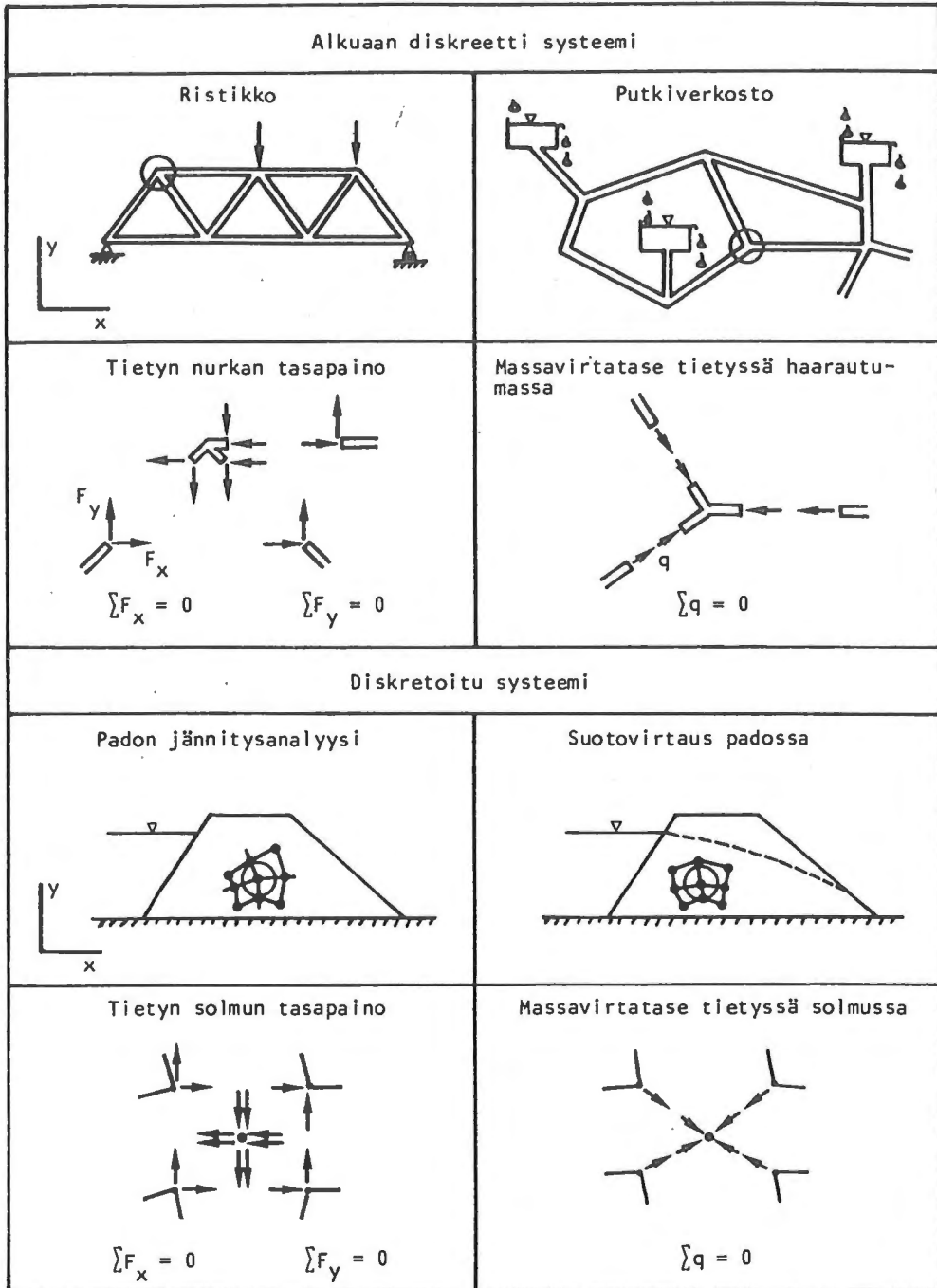
TIIVISTELMÄ: Artikkelin pyrkii valaisemaan elementtimenetelmän yhteydessä usein melko intuitiivisesti käytettyjen käsitteiden solmuvoima ja solmuvirta teoreettista taustaa. Erityisesti määritellään solmuvoimareaktio- ja solmuvirtareaktio-käsitteet sekä selostetaan niiden hyväksikäyttöä traktion ja jännityskomponenttien tai virran tiheyden ja vuokomponenttien määrittämisessä. Solmuvoimakäsitettä tarkastellaan ensin ja saatuja tuloksia hyödynnetään sitten analogioiden avulla solmuvirtakäsitteen selostamisessa. Esitystä havainnollistetaan kahden yksinkertaisen numeerisen esimerkin avulla.

JOHDANTO

Elementtimenetelmää käytettäessä operoidaan rakenteiden mekaniikan tehtävissä usein käsitteen solmuvoima (engl. nodal force) ja esimerkiksi lämmönjohdus- ja suotovirtaustehtävissä käsitteen solmuvirta tai solmuvuo (engl. nodal flow, nodal flux) avulla. Näiden termien ilmeisenä tarkoituksena on pyrkiä palauttamaan kontinuumin analyysi muodollisesti vastaavaksi kuin mihin on totuttu jo alkuaan diskreettien fysikaalisten systeemien kuten esimerkiksi ristikkoiden ja kehien statiikan tai putkiverkostovirtausten analysoinnissa. Asetelmaa on kuvailtu symbolisesti kuvassa 1 eräiden esimerkkitapausten avulla.

Etenkin rakenteiden mekaniikassa solmuvoimia käsitellään usein kuin todellisia voimia melkein unohtaen, että kyseessä on kuitenkin fiktio. Jo "finite element"-termin käyttöönottaja R. Clough toteaa lähteessä /1/ v. 1965, että jos elementit vaikuttaisivat toinen toisiinsa todella pelkästään solmujensa välityksillä, voimakkaita jännityskeskittymiä syntyisi ja mallin jännitysjakautuma muistuttaisi hyvin vähän todellisen rakenteen jännitysjakautumaa. (Kuvaan 1 liittyen voitaisiin heti tietoenkin todeta, että tarkasti ottaen ei ole olemassa alkuaan diskreettejä systeemejä, sillä esimerkiksi ristikkorakenne synnytetään kontinuumista tietyn mallitusprosessin avulla.)

Tämän artikkelin tarkoituksena on pyrkiä valaisemaan usein melko intuitiivisella tasolla käytettyjen solmuvoima- ja solmuvirta-termien sisältöä etenkin kontinuumin reunaan koskevia piirteitä korostaen. Tärkeimmät tulokset kerätään erityisiksi lauseiksi.



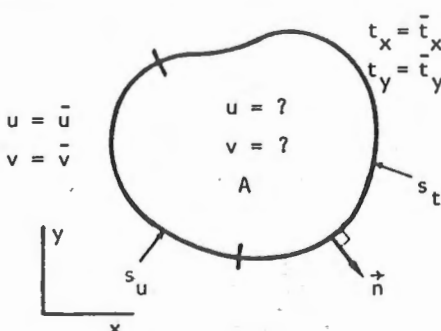
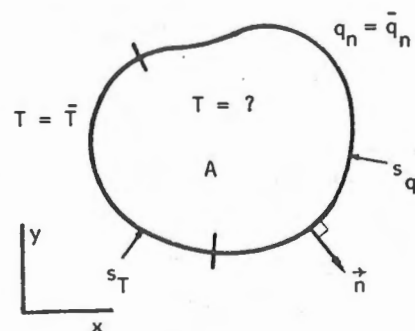
Kuva 1. Esimerkkejä alkuaan diskreeteistä sekä diskretoiduista systeemeistä.

Vaikka solmuvoima on varmaankin yleisemmin tunnettu termi kuin solmuvirta, jälkimmäiseen liittyvä matematiikka on kuitenkin itse asiassa yksinkertaisempaa kuin edelliseen. Toisaalta solmuvoima-käsite palautuu klassillisesta mekaniikasta tutun yleistetyn voiman erikoistapaukseksi. Täten on perusteltua tarkastella solmuvoimia ja solmuvirtoja rinnakkaisesti, jolloin esiintyvät analogiat vahvistavat ko. käsitteiden merkityksien oivaltamista.

Tarkastelua on vaikea suorittaa ymmärrettävästi, ilman että pidetään mielessä elementtimenetelmässä esiintyvien diskreettien yhtälöiden syntymistapa. Täten esityksessä joudutaan toistamaan alkuvalmisteluna melko paljon tavansa omaista elementtimenetelmään liittyvää standardimateriaalia.

Taulukossa 1 esitetään aluksi rinnakkain esimerkkeinä tyypillinen rakenteiden mekaniikan problema sekä yhtä muuttujaa koskeva ns. kenttäprobleema.

Taulukko 1. Vastinlausekkeita.

Jännitysprobleema	Kenttäprobleema
<p>$u = \bar{u}$ $v = \bar{v}$</p>  <p>$t_x = \bar{t}_x$ $t_y = \bar{t}_y$</p> <p>$u = ?$ $v = ?$</p> <p>A</p> <p>s_u s_t \vec{n}</p> <p>x y</p>	<p>$T = \bar{T}$</p>  <p>$q_n = \bar{q}_n$</p> <p>$T = ?$</p> <p>A</p> <p>s_T s_q \vec{n}</p> <p>x y</p>
Vastinsuureet	
<p>u, v (siirtymäkomponentit)</p> <p>$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} = \tau_{yx}$ (jännityskomponentit)</p> <p>$\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$ (venymäkomponentit)</p> <p>t_x, t_y (traktiikomponentit)</p> <p>b_x, b_y (tilavuusvoimakomponentit)</p> <p>E, ν (kimmokerroin, Poissonin suhde)</p>	<p>T (lämpötila)</p> <p>q_x, q_y (lämpövuokomponentit)</p> <p>γ_x, γ_y (lämpötilagradienttikomponentit)</p> <p>q_n (lämpövirran tiheys)</p> <p>S (lämpölähteen antoisuus)</p> <p>k (lämmönjohtavuus)</p>

Vallitsevat yhtälöt

Tasapaino

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + b_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + b_y &= 0 \end{aligned} \right\}$$

(1)

Traktio-jännitysytteys

$$\left. \begin{aligned} t_x &= n_x \sigma_x + n_y \tau_{xy} \\ t_y &= n_x \tau_{xy} + n_y \sigma_y \end{aligned} \right\}$$

(2)

Venymä-siirtymäytteys

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} & \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned} \right\}$$

(3)

Konstitutiivinen yhteyts

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \nu \epsilon_y) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_y + \nu \epsilon_x) \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} \end{aligned} \right\}$$

(4)

Energiatase

$$-\frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_y}{\partial y} + S = 0 \quad (1')$$

(1')

Lämpövirran tiheys-lämpövuoyhteys

$$q_n = n_x q_x + n_y q_y \quad (2')$$

(2')

Lämpötilagradientti-lämpötilayhteys

$$\gamma_x = \frac{\partial T}{\partial x} \quad \gamma_y = \frac{\partial T}{\partial y} \quad (3')$$

(3')

Konstitutiivinen yhteyts

$$\left. \begin{aligned} q_x &= -k \gamma_x \\ q_y &= -k \gamma_y \end{aligned} \right\} \quad (4')$$

(4')

Heikko muoto

Kerrotaan yhtälöt (1) puolittain mielivaltaisilla testifunktioilla $w_x(x,y)$ ja $w_y(x,y)$, integroidaan yhtälöt puolittain alueen A ylitse ja lasketaan saadut yhtälöt puolittain yhteen, jolloin saadaan yhtälö

$$\int_A \left[w_x \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + b_x \right) + w_y \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + b_y \right) \right] dA = 0. \quad (5)$$

Kerrotaan yhtälö (1') puolittain mielivaltaisella testifunktiolla $w(x,y)$ ja integroidaan yhtälö puolittain alueen A ylitse, jolloin saadaan yhtälö

$$\int_A w \left(-\frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_y}{\partial y} + S \right) dA = 0. \quad (5')$$

Osittaisintegroimalla jännityksiä sisältävät termit saadaan

$$\begin{aligned}
 & - \int_A \left[\frac{\partial w_x}{\partial x} \sigma_x + \frac{\partial w_y}{\partial y} \sigma_y + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w_x}{\partial y} \right) \tau_{xy} \right] dA + \int_A (w_x b_x + w_y b_y) dA + \int_s (w_x t_x + w_y t_y) ds \\
 & = 0, \quad (6)
 \end{aligned}$$

jossa on lisäksi käytetty hyväksi kaavoja (2). Jos testifunktiolle otetaan tulkinnat $w_x = \delta u$, $w_y = \delta v$, saadaan

virtuaalisen työn periaate (vaihdetaan merkit)

$$\begin{aligned}
 & \int_A (\delta \epsilon_x \sigma_x + \delta \epsilon_y \sigma_y + \delta \gamma_{xy} \tau_{xy}) dA + \\
 & - \int_A (\delta u b_x + v b_y) dA - \int_s (\delta u t_x + \delta v t_y) ds = 0. \quad (7)
 \end{aligned}$$

Tämä on vielä – merkitykseltään ilmeisiä – matriisimerkintöjä käyttäen

$$\begin{aligned}
 & \int_A \delta \underline{\epsilon}^T \underline{\sigma} dA - \int_A \delta \underline{u}^T \underline{b} dA + \\
 & - \int_s \delta \underline{u}^T \underline{t} ds = 0. \quad (8)
 \end{aligned}$$

Osittaisintegroimalla lämpövuokomponentteja sisältävät termit saadaan

$$\begin{aligned}
 & \int_A \left(\frac{\partial w}{\partial x} q_x + \frac{\partial w}{\partial y} q_y \right) dA + \\
 & + \int_A w S dA - \int_s w q_n ds = 0, \quad (6')
 \end{aligned}$$

jossa on lisäksi käytetty hyväksi kaavaa (2'). Jos testifunktiolle otetaan tulkinta $w = \delta T$, saadaan

"virtuaalisen lämmön periaate" (vaihdetaan merkit)

$$\begin{aligned}
 & - \int_A (\delta \gamma_x q_x + \delta \gamma_y q_y) dA + \\
 & - \int_A \delta T S dA + \int_s \delta T q_n ds = 0. \quad (7')
 \end{aligned}$$

Tämä on vielä – merkitykseltään ilmeisiä – matriisimerkintöjä käyttäen

$$\begin{aligned}
 & - \int_A \delta \underline{\gamma}^T \underline{q} dA - \int_A \delta T S dA + \\
 & + \int_s \delta T q_n ds = 0. \quad (8')
 \end{aligned}$$

Taulukko vaatii tiettyjä lisäkommentteja. Vasemman puolen yhtälöt liittyvät tasojännitystapaukseen ja oikean puolen yhtälöt tasolämmönjohtumistapauk-

seen. Jatkossa ko. tapauksista tai niiden yleistyksistä tullaan käyttämään yleisnimityksiä jännitysprobleema ja kenttäprobleema. Kenttäprobleema kuvaa tunnetusti matemaattisessa mielessä hyvin yleisesti esiintyvää tapausta, jos tunnuksille annetaan vain sopivat uudet fysikaaliset merkitykset. Etenkin kenttäprobleemaan liittyvä terminologia vaihtelee paljon. Termin virran tiheys tavanomaisimpia englanninkielisiä vastineita ovat "normal flux" tai vain "flux".

Reunaehdoissa esiintyvät yläviivat viittaavat annettuihin suureisiin. Huomautettakoon vielä, että lämmönsiirrossa ei ole yleensä tapana käyttää erilisiä tunnuksia γ_x ja γ_y termeille $\partial T/\partial x$ ja $\partial T/\partial y$. Ne on otettu tässä mukaan vain, koska rakenteiden mekaniikassa taas on tapana merkitä $\partial u/\partial x \equiv \epsilon_x$ jne.

Yhtälöt (6, 6') esittävät matemaattisen terminologian mukaan yhtälöistä (1, 1') ja (2, 2') synnytettyjä ns. heikkoja muotoja (engl. weak form). Määrättyinä integraaleina esiintyvän heikon muodon oleellinen ero differentiaaliyhtälöinä esiintyvään muotoon nähden on siinä, että riippuviin muuttujiin kohdistuvien tiettyjen derivaattojen kertaluku on alentunut osittaisintegroitien kautta. Tämä merkitsee diskreettien likiratkaisujen etsimisen kannalta ratkaisevaa helpotusta ja esimerkiksi elementtimenetelmän lähtökohtana on säännönmukaisesti aina sopiva heikko muoto (tai variaatioperiaate) eikä valitseva differentiaaliyhtälö. Kun siirrytään likiratkaisuihin, heikon muodon käyttöä nimitetään usein jäännösmenetelmäksi (engl. method of weighted residuals). Taulukossa on lopuksi osoitettu, kuinka virtuaalisen työn periaate voidaan myös ajatella tasapainoyhtälöitä koskevaksi heikoksi muodoksi. Kun muistetaan virtuaalisen työn periaatteen erinomainen käyttökelpoisuus, voidaan siis hyvällä syyllä otaksua myös yhtälön (6') tai "virtuaalisen lämmön periaatteen" (Tällaista nimitystä ei yleensä käytetä. Esimerkiksi lähteessä /2/ termillä "principle of virtual heat" taas tarkoitetaan aivan muuta kuin tässä.) (7') antavan hyvän lähtökohdan likiratkaisuille. Huomattakoon, että heikkoja muotoja johdettaessa ei tarvita vielä konstitutiivisia yhteyksiä. Isotrooppinen Hooken laki (4) ja isotrooppinen Fourierin laki (4') ovat mukana eräinä - tosin hyvin tavallisina - esimerkkeinä.

SOLMUVOIMAT

Diskreetit yhtälöt

Tarkastellaan taulukon 1 jännitysproblemaa. Tehdään tavanomaiset element-

timenetelmän mukaiset siirtymäkomponenttien elementtiaprosimaatiot

$$\hat{u} = \sum_j N_j u_j, \quad \hat{v} = \sum_j N_j v_j \quad (1)$$

eli matriisimerkinnöin

$$\hat{u} = \underline{N} \underline{a} \quad (1')$$

Tässä siis suureet $N_j(x, y)$ ovat muotofunktioita ja suureet u_j ja v_j siirtymäkomponenttien arvoja solmujen kohdilla eli ns. solmusiirtymiä. Kaavan (1') muoto vastaa elementtimenetelmässä yleisesti käytettyä merkintätapaa /3/, jossa diskreetit muuttujat on kerätty pystyvektoriksi \underline{a} ja \underline{N} on ns. muotofunktio-matriisi. (Tarkastelussa esitellään syntyviä kaavoja tarpeen mukaan sekä yksitellen täydellisinä kirjoitettuna että elementtimenetelmän yhteydessä tavanomaista matriisiformalismia käyttäen. Vaikkakin teksti näin pitenee, sen ymmärrettävyys toivottavasti myös samalla paranee.)

Siirtymiä (1) vastaavat likimääräiset venymät ovat taulukon 1 kaavojen (3) perusteella

$$\left. \begin{aligned} \hat{\epsilon}_x &= \sum_j \frac{\partial N_j}{\partial x} u_j, & \hat{\epsilon}_y &= \sum_j \frac{\partial N_j}{\partial y} v_j, \\ \hat{\gamma}_{xy} &= \sum_j \frac{\partial N_j}{\partial x} v_j + \sum_j \frac{\partial N_j}{\partial y} u_j \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

eli /3/

$$\hat{\epsilon} = \underline{B} \underline{a} \quad (2')$$

Olipa konstitutiivinen yhteys mikä hyvänsä siirtymiä (1) vastaavat likimääräiset jännitykset $\hat{\sigma}_x = \hat{\sigma}_x(\underline{a})$, $\hat{\sigma}_y = \hat{\sigma}_y(\underline{a})$, $\hat{\tau}_{xy} = \hat{\tau}_{xy}(\underline{a})$ tulevat olemaan funktioita muuttujista \underline{a} — ja tietenkin myös paikkakoordinaateista x ja y . Jos erityisesti otaksuttaisiin taulukon 1 konstitutiivisen yhteyden (4) pitävän paikkansa, saataisiin

$$\hat{\sigma}_x = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\sum_j \frac{\partial N_j}{\partial x} u_j + \nu \sum_j \frac{\partial N_j}{\partial y} v_j \right), \quad \left| \right.$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{\sigma}_y &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(\sum_j \frac{\partial N_j}{\partial y} v_j + \nu \sum_j \frac{\partial N_j}{\partial x} u_j \right), \\ \hat{\tau}_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\sum_j \frac{\partial N_j}{\partial x} v_j + \sum_j \frac{\partial N_j}{\partial y} u_j \right) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

eli /3/

$$\hat{\underline{\sigma}} = \underline{D} \underline{B} \underline{a} . \quad (3')$$

Approksimaatioiden $\hat{\sigma}_x$, $\hat{\sigma}_y$ ja $\hat{\tau}_{xy}$ sijoitus taulukon 1 yhtälöön (7) antaa tuloksen

$$\begin{aligned} & \int_A (\delta \epsilon_x \hat{\sigma}_x + \delta \epsilon_y \hat{\sigma}_y + \delta \gamma_{xy} \hat{\tau}_{xy}) dA - \int_A (\delta u b_x + \delta v b_y) dA + \\ & - \int_{s_t} (\delta u \bar{t}_x + \delta v \bar{t}_y) ds - \int_{s_u} (\delta u t_x + \delta v t_y) ds = 0 . \end{aligned} \quad (4)$$

Vastaavasti matriisimerkintöjä käyttäen taulukon 1 yhtälö (8) muuttuu muotoon

$$\int_A \delta \underline{\epsilon}^T \hat{\underline{\sigma}} dA - \int_A \delta \underline{u}^T \underline{b} dA - \int_{s_t} \delta \underline{u}^T \bar{\underline{t}} ds - \int_{s_u} \delta \underline{u}^T \underline{t} ds = 0 . \quad (4')$$

Yhtälöihin (4) tai (4') siirryttäessä on samalla taulukon 1 yhtälön (7) tai (8) viivaintegraalitermi esitetty erikseen osan s_t ja s_u ylitse otettuna ja osalla s_t on käytetty hyväksi taulukon 1 kuvassa esitettyjä traktioreunaehtoja $t_x = \bar{t}_x$, $t_y = \bar{t}_y$ eli $\underline{t} = \bar{\underline{t}}$. Osan s_u yli otettu integraali on merkitty katko-kaarisulkujen sisään siitä syystä, että tavallisesti se jätetään kokonaan pois näkyvistä. Normaalisti nimittäin virtuaaliset siirtymät rajoitetaan reunalla s_u toteuttamaan ehdot $\delta u = 0$, $\delta v = 0$ eli $\delta \underline{u} = \underline{0}$. Tarkoituksena on estää osalla s_u etukäteen tuntemattomien traktioiden ilmestyminen mukaan yhtälöihin. Tämän artikkelin aiheen kannalta on kuitenkin oleellista muistaa tietyissä yhteyksissä suluissa olevien termien olemassaolo. Tästä kohta enemmän.

Tyypilliseen solmuun liittyvät diskreetit yhtälöt saadaan valitsemalla peräkkäin virtuaaliset siirtymät ja niistä seuraavat virtuaaliset venymät seuraavasti:

$$\left. \begin{aligned}
 \delta u &= N_i \delta u_i, \quad \delta v = 0, \\
 \delta \epsilon_x &= \frac{\partial \delta u}{\partial x} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \delta u_i, \\
 \delta \epsilon_y &= \frac{\partial \delta v}{\partial y} = 0, \\
 \gamma_{xy} &= \frac{\partial \delta v}{\partial y} + \frac{\partial \delta u}{\partial x} = \frac{\partial N_i}{\partial y} \delta u_i
 \end{aligned} \right\} \quad (5a)$$

ja

$$\left. \begin{aligned}
 \delta u &= 0, \quad \delta v = N_i \delta v_j, \\
 \delta \epsilon_x &= \frac{\partial \delta u}{\partial x} = 0, \\
 \delta \epsilon_y &= \frac{\partial \delta v}{\partial y} = \frac{\partial N_i}{\partial y} \delta v_j, \\
 \delta \gamma_{xy} &= \frac{\partial \delta v}{\partial x} + \frac{\partial \delta u}{\partial y} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \delta v_j.
 \end{aligned} \right\} \quad (5b)$$

Virtuaaliset siirtymät on siis otettu esityksistä (1) varioimalla ensin vain muuttujan u_i ja sitten vain muuttujan v_j arvoa. (Ei ole kuitenkaan syytä merkitä esimerkiksi $\delta \hat{u}$, koska virtuaaliset siirtymät valitaan; niihin ei liity suoranaisesti mitään approksimaatiota.) Valintojen (5) sijoitukset yhtälöön (4) antavat kaksi yhtälöä

$$\left. \begin{aligned}
 \delta u_i (F_x)_i &\equiv \delta u_i \left\{ \int_A \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \hat{\sigma}_x + \frac{\partial N_i}{\partial y} \hat{\tau}_{xy} \right) dA - \int_A N_i b_x dA + \right. \\
 &\quad \left. - \left[\int_{s_t} N_i \bar{t}_x ds - \left(\int_{s_u} N_i t_x ds \right) \right] \right\} = 0, \\
 \delta u_i (F_y)_i &\equiv \delta v_i \left\{ \int_A \left(\frac{\partial N_i}{\partial y} \hat{\sigma}_y + \frac{\partial N_i}{\partial x} \hat{\tau}_{xy} \right) dA - \int_A N_i b_y dA + \right. \\
 &\quad \left. - \left[\int_{s_t} N_i \bar{t}_y ds - \left(\int_{s_u} N_i t_y ds \right) \right] \right\} = 0.
 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Koska variaatiot δu_i ja δv_j ovat mielivaltaisia, äskeisissä yhtälöissä määri-

teltyjen kertoimien $(F_x)_i$ ja $(F_y)_i$ tulee hävitä eli

$$\left. \begin{aligned} (F_x)_i &\equiv \int_A \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \hat{\sigma}_x(\underline{a}) + \frac{\partial N_i}{\partial y} \hat{\tau}_{xy}(\underline{a}) \right] dA - \int_A N_i b_x ds + \\ &\quad - \int_{s_t} N_i \bar{t}_x ds - \left(\int_{s_u} N_i t_x ds \right) = 0, \\ (F_y)_i &\equiv \int_A \left[\frac{\partial N_i}{\partial y} \hat{\sigma}_y(\underline{a}) + \frac{\partial N_i}{\partial x} \hat{\tau}_{xy}(\underline{a}) \right] dA - \int_A N_i b_y ds + \\ &\quad - \int_{s_t} N_i \bar{t}_y ds - \left(\int_{s_u} N_i t_y ds \right) = 0. \end{aligned} \right\} i = 1, 2, \dots \quad (7)$$

Nämä ovat diskreetit systeemi yhtälöt (tarkennus myöhemmin). Kaavoihin on nyt myös merkitty mukaan jännitysten riippuvuus muuttujista \underline{a} muistuttamaan siitä, että systeemi yhtälöt koskevat suureita \underline{a} . (Periaatteessa myös suureet b_x ja b_y sekä \bar{t}_x ja \bar{t}_y voivat olla funktioita suureista \underline{a} .)

Matriisimerkintöjä käyttäen saadaan lähtemällä yhtälöstä (4') ja ottamalla lausekkeiden (1') ja (2') variaatiot

$$\delta \underline{u} = \underline{N} \delta \underline{a}, \quad \delta \underline{\varepsilon} = \underline{B} \delta \underline{a} \quad (5')$$

lopuksi yhtälö

$$\delta \underline{a}^T \underline{F} \equiv \delta \underline{a}^T \left\{ \int_A \underline{B}^T \underline{\hat{\sigma}} dA - \int_A \underline{N}^T \underline{b} dA - \int_{s_t} \underline{N}^T \bar{\underline{t}} ds - \left(\int_{s_u} \underline{N}^T \underline{t} ds \right) \right\} = 0. \quad (6')$$

Koska variaatiot $\delta \underline{a}$ ovat mielivaltaisia, äskeisessä yhtälössä esiintyvän vaakavektorin $\delta \underline{a}^T$ kertomana olevan pystyvektorin \underline{F} tulee hävitä eli

$$\underline{F} \equiv \int_A \underline{B}^T \underline{\hat{\sigma}}(\underline{a}) dA - \int_A \underline{N}^T \underline{b} dA - \int_{s_t} \underline{N}^T \bar{\underline{t}} ds - \left(\int_{s_u} \underline{N}^T \underline{t} ds \right) = \underline{0}. \quad (7')$$

Nämä ovat diskreetit systeemi yhtälöt (tarkennus myöhemmin).

Jos tarkastellaan erityisesti Hooken lakia noudattavaa ainetta, kaavaa (3') soveltamalla saadaan tavanomainen lineaarinen systeemi yhtälöryhmä

$$\underline{F} \equiv \int_A \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} da \underline{a} - \int_A \underline{N}^T \underline{b} dA - \int_{s_t} \underline{N}^T \bar{\underline{t}} ds - \left(\int_{s_u} \underline{N}^T \underline{t} ds \right) = \underline{0}. \quad (7'')$$

Vielä toisin merkittynä tämä on

$$F_k \equiv \sum_l K_{kl} a_l - (\bar{F}_{ext})_k - (R_k) = 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (7''')$$

Jossa K_{kl} on jäykkyyso-matriisin alkio, $(\bar{F}_{ext})_k$ on tunnetuista ulkoisista voimista kertyvä kuormitusvektorin alkio ja R_k termi, johon palataan myöhemmin. (Yhtälöissä (7''') on käytetty solmunumerointiin liittyvien indeksien i ja j sijasta pystyvektorin \underline{a} alkioiden numerointiin liittyviä indeksejä k ja l .)

Käytännössä diskreetit yhtälöt kootaan elementeittäin kertyvistä osuuksista $(F_x)_i^e$ ja $(F_y)_i^e$ tai \underline{F}^e . Täten systeemi yhtälöt (7) eli (7') voidaan esittää myös muodossa

$$\left. \begin{aligned} (F_x)_i &\equiv \sum_e (F_x)_i^e = 0, \\ (F_y)_i &\equiv \sum_e (F_y)_i^e = 0 \end{aligned} \right\} \quad i = 1, 2, \dots \quad (8)$$

eli

$$\underline{F} \equiv \sum_e \underline{F}^e = \underline{0}. \quad (8')$$

Suureiden $(F_x)_i^e$, $(F_y)_i^e$ tai \underline{F}^e lausekkeet saadaan tavanomaiseen tapaan /3/ kaavoissa (7) tai (7') esiintyvistä lausekkeista tekemällä vain muutokset $N_i \rightarrow N_i^e$, $A \rightarrow A^e$ jne. Siis vielä

$$\left. \begin{aligned} (F_x)_i^e &= \int_{A^e} \left[\frac{\partial N_i^e}{\partial x} \hat{\sigma}_x(\underline{a}^e) + \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \hat{\tau}_{xy}(\underline{a}^e) \right] dA + \\ &\quad - \int_{A^e} N_i^e b_x dA - \int_{s_t^e} N_i^e \bar{t}_x ds - \left(\int_{s_u^e} N_i^e t_x ds \right), \\ (F_y)_i^e &= \int_{A^e} \left[\frac{\partial N_i^e}{\partial y} \hat{\sigma}_y(\underline{a}^e) + \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \hat{\tau}_{xy}(\underline{a}^e) \right] dA + \\ &\quad - \int_{A^e} N_i^e b_y dA - \int_{s_t^e} N_i^e \bar{t}_y ds - \left(\int_{s_u^e} N_i^e t_y ds \right) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

eli

$$\begin{aligned} \tilde{F}^e = & \int_{A^e} (\tilde{B}^e)^T \hat{\sigma}(\tilde{a}^e) dA - \int_{A^e} (\tilde{N}^e)^T \tilde{b} dA + \\ & - \int_{s_t^e} (\tilde{N}^e)^T \tilde{t} ds - \left(\int_{s_u^e} (\tilde{N}^e)^T \tilde{t} ds \right). \end{aligned} \quad (9')$$

Mikään ei nyt estä meitä nimeästä edellä määritellyjä erilaisia suureita F vaikka solmuvoimiksi. Tätä terminologiaa käyttäen systeemyhtälöt (8) eli (8') voidaan niin haluttaessa tulkita muodollisesti tasapainoyhtälöinä:

$$\left. \begin{aligned} & \text{kuhunkin solmuun eri elementeistä} \\ & \text{kertyvien solmuvoimien summa on nolla.} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Tulos muistuttaa esimerkiksi ristikkorakenteen nurkille kirjoitettuja tasapainoyhtälöitä. Tähän tulokseen ei liity tietenkään ainakaan tässä vaiheessa mitään erityisen syvällistä, koska kyseessä oli vain tiettyjen termien nimeäminen sopivasti. Elementtimenetelmässähän diskreetit yhtälöt kootaan aina tyypillisesti kaavan (8) tapaisella esityksellä oli sitten kyseessä mikä hyvänsä problema.

Solmureaktiot

Tässä keskitytään tarkastelemaan kappaleen reunapintaan liittyviä solmuvoimia. Näiden avulla voidaan tunnetusti saada tietoa kappaleeseen vaikuttavista tukivoimista (tai kääntäen voimista, joilla kappale vaikuttaa ympäristöönsä). Tämä on aihepiiri, jota ei ole mielestämme yleensä käsitelty kovinkaan selkeästi alan oppikirjoissa.

Samoin kuin diskreetin elementtirakenteen elementtien ajatellaan usein olevan vuorovaikutuksessa toistensa kanssa pelkästään solmuissa vaikuttavien solmuvoimien välityksellä samoin rakenteen ajatellaan olevan tuettu ympäristöönsä reunoillaan olevien solmujen kohdilla miltei fyysisten pistemäisten tukien tai laakerien avulla. Tämähän on tietenkin jälleen pelkkä fiktio.

Tarkastellaan nyt aikaista huolellisemmin diskreettien systeemyhtälöiden (7) eli (7') muodostamista. Lähtökohtana oleva yhtälö (4) eli (4') esitetään yleensä ilman katkosulkulausekkeessa olevaa termiä, koska virtuaaliset siirtymät ajatellaan rajoitetuiksi etukäteen toteuttamaan ehdot $\delta u = 0$, $\delta v = 0$ eli

$\delta u = 0$ s_u :lla. Jos solmu i on reunalla s_u , ei siis tällöin saada suorittaa variaatioita δu_i ja δv_i . Tarvittavat kaksi yhtälöä synnytetäänkin suoraan kinemaattisina ehtoina $u_i = \bar{u}_i$ ja $v_i = \bar{v}_i$. Käytännössä yhtälöt muodostetaan kuitenkin yleensä varioimalla ensin kaikkia solmumuuttujia, jolloin saadaan systemaattinen esitys. Tällöin siis

$$\left. \begin{array}{l} \text{tietokoneohjelma synnyttää aluksi reunalla } s_u \\ \text{oleviin solmuihin liittyvät diskreetit yhtälöt} \\ \text{virheellisesti,} \end{array} \right\} \quad (11)$$

koska tuntemattomista traktioista t_x ja t_y eli \underline{t} kertyvät termit (ks. yhtälöt (7) eli (7'))

$$(R_x)_i \equiv \int_{s_u} N_i t_x ds, \quad (R_y)_i \equiv \int_{s_u} N_i t_y ds \quad (12)$$

tai

$$\underline{R} \equiv \int_{s_u} \underline{N}^T \underline{t} ds \quad (12')$$

eivät tule mukaan. Mitään pysyvää virhettä ei kuitenkaan aiheuteta, koska seuraavassa vaiheessa ohjelma ottaa huomioon reunalla s_u vallitsevat kinemaattiset ehdot ja korvaa virheelliset yhtälöt yhtälöillä $u_i = \bar{u}_i$ ja $v_i = \bar{v}_i$. Käytännössä tämä tapahtuu kätevästi ns. suuren luvun keinon /3, s. 11/ avulla, jolloin tietokone itse asiassa säilyttää edelleen tiedon virheellisten yhtälöiden eri termeistä. Voimme nyt ajatella nämä yhtälöt täydennetyiksi vielä tuntemattomilla termeillä $-(R_x)_i$ ja $-(R_y)_i$ tai $-\underline{R}$. Kun sitten solmusiirtymien \underline{a} arvot on määritetty systeemi yhtälöistä, voimme jälkikäteen laskea näistä yhtälöistä ko. termien arvot seuraavasti (ks. yhtälöt (7) tai (7')):

$$\left. \begin{array}{l} (R_x)_i = \int_A \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \hat{\sigma}_x(\underline{a}) + \frac{\partial N_i}{\partial y} \hat{\tau}_{xy}(\underline{a}) \right] dA - \int_A N_i b_x dA - \int_{s_t} N_i \bar{t}_x ds, \\ (R_y)_i = \int_A \left[\frac{\partial N_i}{\partial y} \hat{\sigma}_y(\underline{a}) + \frac{\partial N_i}{\partial x} \hat{\tau}_{xy}(\underline{a}) \right] dA - \int_A N_i b_y dA - \int_{s_t} N_i \bar{t}_y ds. \end{array} \right\} \quad (13)$$

tai

$$\underline{R} = \int_A \underline{B}^T \hat{\underline{\sigma}}(\underline{a}) dA - \int_A \underline{N}^T \underline{b} dA - \int_{s_t} \underline{N}^T \underline{\bar{t}} ds. \quad (13')$$

Hooken lakia noudattavalle aineelle saadaan vielä yhtälöistä (7'') tai (7''') vastaavasti tulokset

$$\underline{R} = \int_A \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} dA \underline{a} - \int_A \underline{N}^T \underline{b} dA - \int_{s_t} \underline{N}^T \underline{t} ds \quad (13'')$$

tai

$$R_k = \sum_l K_{kl} a_l - (\bar{F}_{ext})_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (13''')$$

Solmuvoimia R tullaan nimeämään tässä solmuvoimareaktioiksi tai lyhyemmin vain solmureaktioiksi. (Tämäntyyppinen nimitys ei ole yleisessä käytössä. Lähteessä /4/ kylläkin korostetaan termien "nodal reaction" ja "nodal force" eroa.) Lausekkeiden (12) tai (12') perusteella

$$\left. \begin{array}{l} \text{solmureaktiot antavat tietynlaista} \\ \text{keskimääräistä diskreettiä tietoa} \\ \text{rakenteen tuetulla reunalla vaikut-} \\ \text{tavien traktioiden jakautumasta.} \end{array} \right\} \quad (14)$$

Solmureaktio-termi voi aiheuttaa sekaannusta siinä mielessä onko kyseessä voima, jolla rakenne vaikuttaa ympäristöön vai voima, jolla ympäristö vaikuttaa rakenteeseen. Kaavojen (12) tai (12') mukaisesti tässä tarkoitetaan jälkimmäistä ja voimien positiivisten arvojen ajatellaan liittyvät x - ja y -akselien positiivisiin suuntiin. Kaavat (13)...(13''') antavat luonnollisesti arvon nolla niissä solmuissa, jotka eivät ole reunalla s_u . Samoin tiettyyn solmureaktioon kertyvät termit lasketaan käytännössä vain niistä elementeistä, joihin ko. solmu liittyy. Annetusta traktiosta \bar{t} tulee mukaan osuus vain solmuissa, jotka ovat osien s_u ja s_t yhtymäkohdissa.

Solmureaktioiden resultantti ja momentti

Kappaleen tasapainon välttämätön ehto on tunnetusti, että kappaleeseen vaikuttavien ulkoisten voimien resultantti ja ulkoisten voimien momentti mielivaltaisen pisteen suhteen häviävät eli toisin sanottuna ulkoiset voimat muodostavat nollavoimajärjestelmän. Tasoprobleemassamme nämä ehdot voidaan kirjoittaa

$$\left. \int_A b_x dA + \int_s t_x dA = 0, \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \int_A b_y dA + \int_s t_y ds &= 0, \\ \int_A (xb_y - yb_x) dA + \int_s (xt_y - yt_x) ds &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Viimeisessä yhtälössä momenttipisteeksi on otettu koordinaatiston origo. Todettakoon, että nämä tutut yhtälöt saadaan myös taulukon 1 yhtälöstä (6) tekemällä valinnat: ensin $w_x = 1, w_y = 0$, sitten $w_x = 0, w_y = 1$ ja lopuksi $w_x = -y, w_y = x$.

Ratkaistaan yhtälöistä (15) osalla s_u esiintyvien tuntemattomien traktioiden resultantti (R_X, R_Y) ja momentti R_M origon suhteen ottamalla huomioon, että $s = s_t + s_u$:

$$\left. \begin{aligned} R_X &\equiv \int_{s_u} t_x dA = - \int_A b_x dA - \int_{s_t} \bar{t}_x ds, \\ R_Y &\equiv \int_{s_u} t_y dA = - \int_A b_y dA - \int_{s_t} \bar{t}_y ds, \\ R_M &\equiv - \int_A (xb_y - yb_x) dA - \int_{s_t} (x\bar{t}_y - y\bar{t}_x) ds. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Lasketaan nyt vastaavasti solmureaktioiden (ajatellen nämä siis vastaavasti x- ja y-akselin suuntaisiksi pistevoimiksi) resultantti ja momentti origon suhteen:

$$\begin{aligned} \hat{R}_X &\equiv \sum_i (R_x)_i \\ &= \int_A \left[\left(\sum_i \frac{\partial N_i}{\partial x} \right) \hat{\sigma}_x(\underline{a}) + \left(\sum_i \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) \hat{\tau}_{xy}(\underline{a}) \right] dA + \\ &\quad - \int_A \left(\sum_i N_i \right) b_x dA - \int_{s_t} \left(\sum_i N_i \right) \bar{t}_x ds \\ &= - \int_A b_x dA - \int_{s_t} \bar{t}_x ds, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{R}_Y &\equiv \sum_i (R_{y_i})_i \\
&= \int_A \left[\left(\sum_i \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) \hat{\sigma}_y(\underline{a}) + \left(\sum_i \frac{\partial N_i}{\partial x} \right) \hat{\tau}_{xy}(\underline{a}) \right] dA + \\
&\quad - \int_A \left(\sum_i N_i \right) b_y dA - \int_{s_t} \left(\sum_i N_i \right) \bar{t}_y ds \\
&= - \int_A b_y dA - \int_{s_t} \bar{t}_y ds , \\
\hat{R}_M &\equiv \sum_i [x_i (R_{y_i})_i - y_i (R_{x_i})_i] \\
&= \int_A \left[\left(\sum_i x_i \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) \hat{\sigma}_y(\underline{a}) + \left(\sum_i x_i \frac{\partial N_i}{\partial x} - \sum_i y_i \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) \hat{\tau}_{xy}(\underline{a}) + \right. \\
&\quad \left. - \left(\sum_i y_i \frac{\partial N_i}{\partial x} \right) \hat{\sigma}_x(\underline{a}) \right] dA - \int_A \left(\sum_i x_i N_i \right) b_y dA + \\
&\quad + \int_A \left(\sum_i y_i N_i \right) b_x dA - \int_{s_t} \left(\sum_i x_i N_i \right) \bar{t}_y ds + \int_{s_t} \left(\sum_i y_i N_i \right) \bar{t}_x ds \\
&= - \int_A (x b_y - y b_x) dA - \int_{s_t} (x \bar{t}_y - y \bar{t}_x) ds .
\end{aligned} \tag{17}$$

Edellä on käytetty hyväksi kaavoja (13) sekä muotofunktioiden ominaisuuksiin perustuvia tuloksia

$$\left. \begin{aligned}
\sum_i N_i &= 1 \\
x &= \sum_i N_i x_i , \\
y &= \sum_i N_i y_i ,
\end{aligned} \right\} \tag{18}$$

joista seuraa lisäksi

$$\left. \begin{aligned}
 \sum_i \frac{\partial N_i}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \sum_i N_i = \frac{\partial 1}{\partial x} = 0, \\
 \sum_i \frac{\partial N_i}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \sum_i N_i = \frac{\partial 1}{\partial y} = 0, \\
 \sum_i x_i \frac{\partial N_i}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \sum_i x_i N_i = \frac{\partial x}{\partial x} = 1, \\
 \sum_i x_i \frac{\partial N_i}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \sum_i x_i N_i = \frac{\partial x}{\partial y} = 0, \\
 \sum_i y_i \frac{\partial N_i}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \sum_i y_i N_i = \frac{\partial y}{\partial x} = 0, \\
 \sum_i y_i \frac{\partial N_i}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \sum_i y_i N_i = \frac{\partial y}{\partial y} = 1.
 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Normaalisti käytetyt muotofunktiot toteuttavat nimittäin yhtälöt (18), koska tavanomaiset suppenevuusvaatimukset edellyttävät, että elementtiapproksimaation tulee pystyä esittämään eksaktisti lineaarista muotoa $\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y$ oleva funktio, jossa α_0 , α_1 ja α_2 ovat mielivaltaisia /3, s. 169/.

Lausekkeiden (16) ja (17) vertailu osoittaa, että

$$\hat{R}X = RX, \quad \hat{R}Y = RY, \quad \hat{R}M = RM \quad (20)$$

eli

$$\left. \begin{aligned}
 &\text{solmureaktioiden muodostama voimasysteemi} \\
 &\text{on täsmälleen staattisesti samanarvoinen} \\
 &\text{rakenteen tuetulla reunalla vallitsevan} \\
 &\text{tarkan traktiovoimasysteemin kanssa.}
 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Kuten perusmekaniikasta muistetaan, kahta voimasysteemiä sanotaan staattisesti samanarvoisiksi (engl. equipollent /5, s. 47/), jos niillä on sama resultantti ja momentti.

Lause (21) tarkoittaa vielä toisin tulkittuna, että solmureaktiot plus elementtimalliin vaikuttavat muut ulkoiset voimat (jotka siis tunnetaan etu-

käteen) muodostavat yhdessä nollavoimasysteemin. Todellisella tasapainossa olevalla rakenteella tukivoimat plus annetut ulkoiset voimat — koska ne esittävät yhdessä koko ulkoisten voimien systeemin — muodostavat luonnollisesti aina nollavoimasysteemin. Mutta lauseen (21) kautta havaitsemme siis, että vastaava tulos pätee myös rakenteen elementtimallille kun operoidaan kuvitel-
tujen solmuvoimien avulla. (Jos elementtimallissa lasketaan annetuista ulkoisista voimista kertyvät solmuvoimat jostain syystä likimääräisesti, solmureaktiot muodostavat nollavoimasysteemin juuri näiden solmuvoimien kanssa ja lause (21) ei päde enää täysin tarkasti.)

Traktion jakautuma ja jännityskomponentit

Reunalla s_u vallitseville tuntemattomille traktiokomponenteille t_x ja t_y saadaan solmusiirtymien \underline{a} määrittämisen jälkeen ensinnäkin (tässä tapa 1) suoraan taulukon 1 kaavojen (2) perusteella likiarvot

$$\left. \begin{aligned} \hat{t}_x &= n_x \hat{\sigma}_x + n_y \hat{\tau}_{xy}, \\ \hat{t}_y &= n_x \hat{\tau}_{xy} + n_y \hat{\sigma}_y, \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

jossa jännityskomponentit $\hat{\sigma}_x(\underline{a})$, $\hat{\sigma}_y(\underline{a})$ ja $\hat{\tau}_{xy}(\underline{a})$ on määritetty vallitsevan konstitutiivisen yhteyden perusteella. Hooken lain tapauksessa käytetään kaavoja (3) eli (3').

Toisaalta tulos (21) osoittaa, että solmureaktiot antavat ainakin kokonaisvaikutukseltaan täysin täsmällistä tietoa traktioista. Luonnollinen vaihtoehtoinen tapa (tässä tapa 2) määrittää tuntematon traktiojakautuma on tällöin seuraava. Tehdään reunalla s_u approksimaatio

$$\left. \begin{aligned} t_x^* &= \sum_j N_j(s) (t_x)_j, \\ t_y^* &= \sum_j N_j(s) (t_y)_j, \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

eli

$$\underline{t}^* = \underline{N} \underline{b}, \quad (23')$$

jossa suureet $(t_x)_j$ ja $(t_y)_j$ eli koottuna \underline{b} ovat vielä tuntemattomia traktiokomponenttien solmuarvoja. Muotofunktiot N_j ovat (ei täysin välttämätöntä) siirtymien approksimaatiossa käytettyjen muotofunktioiden arvoja reunalla s_u .

Tässä siis summeeraus suoritetaan tällä reunalla olevien solmujen yli. Vaaditaan nyt, että approksimaatio (23) eli (23') antaa kaavojen (12) tai (12') mukaisesti samat solmureaktioiden arvot kuin mitä on saatu kaavojen (13) tai (13') avulla. Saadaan lineaarinen yhtälöryhmä

$$\left. \begin{aligned} \int_{s_u} N_i t_x^* ds &\equiv \int_j N_i N_j ds (t_x)_j = (R_x)_i, \\ \int_{s_u} N_i t_y^* ds &\equiv \int_j N_i N_j ds (t_y)_j = (R_y)_i \end{aligned} \right\} i = 1, 2, \dots \quad (24)$$

tai

$$\int_{s_u} \underline{N}^T t^* ds \equiv \int_{s_u} \underline{N}^T \underline{N} ds \underline{b} = \underline{R}, \quad (24')$$

josta solmuarvot $(t_x)_j$ ja $(t_y)_j$ eli \underline{b} voidaan määrittää. Tämänhenkinen menetelytapa on esitetty ainakin jo lähteessä /6/ v. 1969, jossa sitä on nimitetty tavaksi "method 2b of nodal force concentrations". Lähteessä /4/ vastaavaa menettelyä on selvitetty perusteellisemmin.

Huomattakoon, että matriiseilla \underline{N} ja \underline{R} on tietenkin eri koot kuin edellä koko rakennetta koskevana, koska nyt käsitellään vain tietyllä viivalla olevia solmuja. Tässä ei ole kuitenkaan katsottu tarpeelliseksi käyttää uusia merkintöjä.

Yhtälöryhmien (24) eli (24') kerroinmatriisit ovat tyypiltään massamatriiseja. Massamatriisien yhteydessä käytetään usein ns. keskittämistä (engl. lumping /3, s. 535/), jolloin matriisi muunnetaan lävistäjämatriisiksi. Jos näin meneteltäisiin tässäkin, yhtälöryhmän ratkaisu muuttuisi helpoksi, koska kaikki tuntemattomat solmuarvot saataisiin suoraan omista yhtälöistään. Tämäntapainen menettelytapa on esitetty myös mm. lähteessä /6/, jossa sitä on nimitetty tavaksi "method 2a of nodal force concentrations". (Lähteessä /7/ v. 1985 on nimenomainen maininta keskittämismahdollisuudesta tosin liittyen vain kenttäprobleemaan. Lähteessä /6/ ja myös aikaisemmassa lähteessä /8/ v. 1964 keskittäminen suoritetaan itse asiassa fysikaalisesti suoraan assosioimalla tiettyyn solmureaktioon tietty pinta-ala, jolla solmureaktio sitten jaetaan ko. traktiokomponentin arvon määrittämiseksi.) On ilmeistä, että tiettyssä solmussa vallitsevat traktion solmuarvot määräytyvät voimakkaimmin tämän solmun läheisimmistä solmureaktioiden arvoista. Tämän perusteella voidaan

yhtälöryhmien (24) tai (24') kokoja tarvittaessa pienentää aina tietyn solmun traktioita laskettaessa katkaisemalla kytkentä kaukaisten solmuarvojen suhteen määrittämällä niiden arvot vaikka keskittämällä.

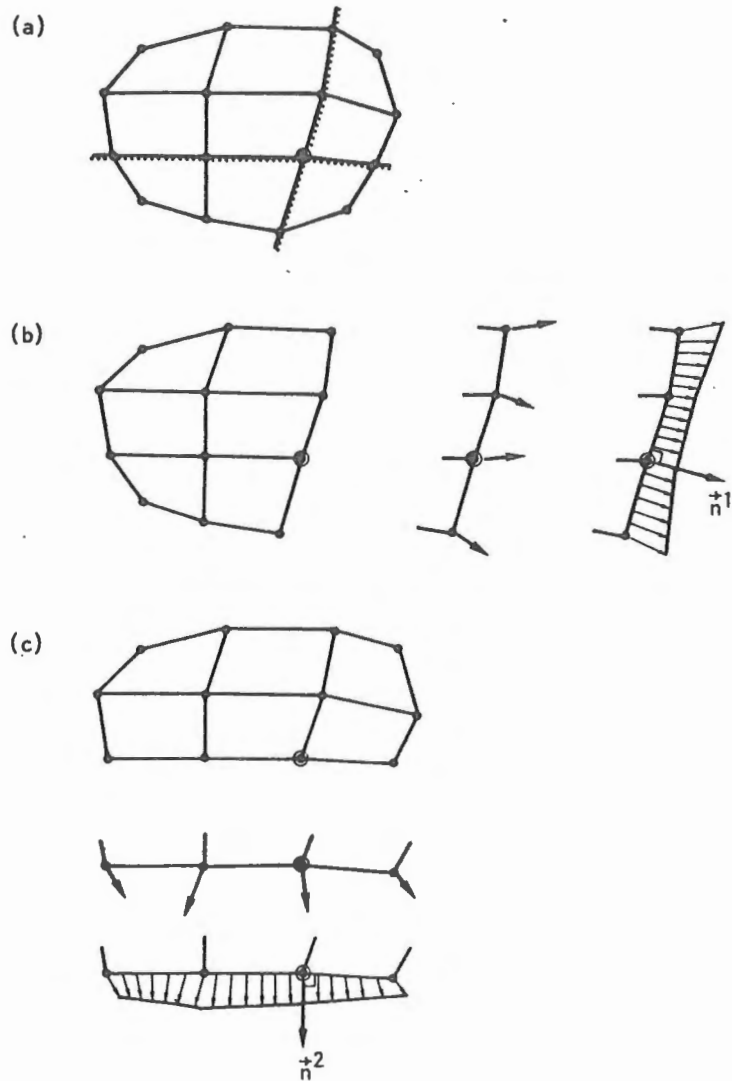
Edellä on tarkasteltu koko ajan vain reunaa s_u , jolla siirtymät ovat annetut. Mutta kun rakenteen solmusiirtymät on ensin määritetty, rakenteen siirtymät tiedetään kaikkialla. Jaetaan nyt kappale mielivaltaisesti valitulla (käytännössä elementtirajoja seuraavalla) viivalla kahteen osaan. Tarkastellaan jompaa kumpaa näistä uutena osarakenteena. Siirtymä tunnetaan valitulla jakoviivalla, joka muodostaa siis osan osarakenteen reunasta. Osarakenteen kannalta tämä viiva on tyyppiä s_u . Toisin sanoen

<p>osarakenne on vuorovaikutuksessa ympäristönsä kanssa jakoviivan kautta solmureaktioiden välityksellä aivan vastaavasti kuin alkupe- räinen rakenne on vuorovaikutuksessa osan s_u kautta.</p>	}	(25)
---	---	------

Vielä voidaan sanoa, että osarakenne ei tiedä, onko sen jakoviivaan liittyvä osa varsinainen tuki vai elementtimalli.

Kun nyt lasketaan jakoviivalla oleviin solmuihin liittyvät solmureaktiot, saadaan siis tavalla 2 määritettyä myös tähän viivaan liittyvä traktiojakautuma. Solmureaktioita ei saada enää koko alkuperäisen yhtälösystemin hylätyistä yhtälöistä, vaan keräämällä kaavojan (13) tai (13') tyyppiset termit aina niistä elementeistä, jotka liittyvät ko. solmuun jakoviivan osa-alueen puolelta.

Kappaleen sisällä ei olla kuitenkaan yleensä kiinnostuneita niinkään traktioista tietyillä viivoilla kuin jännityskomponenteista. Tavallisestihan jännitykset lasketaan suoraan approksimaatioista $\hat{\sigma}_x = \hat{\sigma}_x(a)$ jne. ko. pisteessä käyttäen mahdollisesti lisäksi jotain tasoitusmenettelyä. Nimitetään tätä menettelyä tässä tavaksi 1. Eräs toinen mahdollisuus (tässä tapa 2) on seuraava. Tarkastellaan esimerkkinä kuvan 2 (a) esittämää solmua, jossa jännityskomponentit on määritettävä. Valitaan kuvien 2 (a) esittämät kaksi ko. solmun kautta kulkevaa jakoviivaa. Määritetään kuvien 2 (b) ja (c) mukaiset traktiojakautumat ja erityisesti ko. solmussa vallitsevat arvot $(t_x^1)^*$ ja $(t_y^1)^*$ sekä $(t_x^2)^*$ ja $(t_y^2)^*$. Yläindeksit 1 ja 2 viittaavat ulkoisten yksikkönormaalivektorien \vec{n}^1 ja \vec{n}^2 ilmaisemissa pinta-alkioissa vaikuttaviin traktioihin. Taulukon 1 kaavojen (2) mukaisesti saadaan yhtälöt



Kuva 2. (a) Rakenne. (b) Ensimmäinen osarakenne; jakoviivalla vaikuttavat solmureaktiot ja traktiot. (c) Toinen osarakenne; jakoviivalla vaikuttavat solmureaktiot ja traktiot.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & n_y^1 \\ n_x^1 & 0 & n_y^1 \\ 0 & 1 & n_x^1 \\ n_x^2 & 0 & n_y^2 \\ 0 & n_y^2 & n_x^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x^* \\ \sigma_y^* \\ \tau_{xy}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (t_x^1)^* \\ (t_y^1)^* \\ (t_x^2)^* \\ (t_y^2)^* \end{Bmatrix} \quad (26)$$

eli

$$\underline{\underline{A}} \underline{\underline{\sigma}}^* = \underline{\underline{c}}. \quad (26')$$

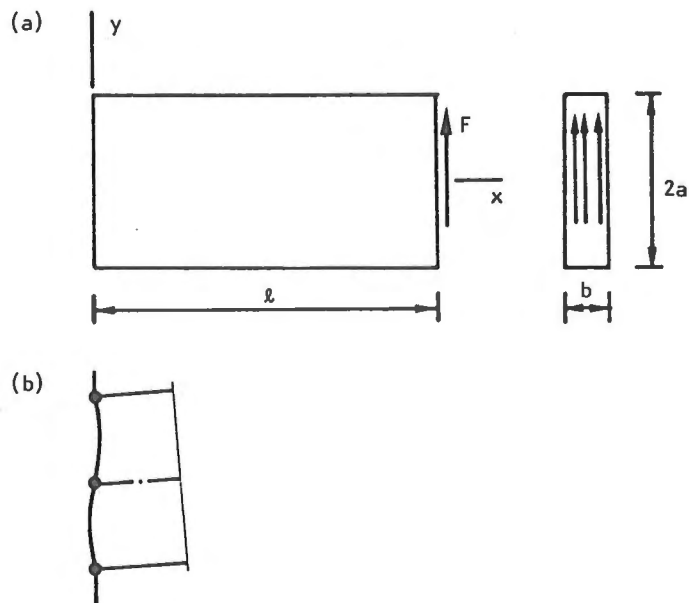
Yhtälösystemi on ylimääräytyvä (neljä yhtälöä ja kolme tuntematonta), joten tuntemattomat σ_x^* , σ_y^* ja τ_{xy}^* on luontevaa määrittää pienimmän neliön keinolla.

(Lähteessä /8/ vastaavaan tehtävään on sovellettu Mohrin jännitysypyrää.)

Jos käytetään samaa painotusta kaikkien yhtälöiden suhteen, lopulliseksi yhtälösystemiksi saadaan

$$\underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{A}} \underline{\underline{\sigma}}^* = \underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{c}}. \quad (27)$$

Jos ko. solmun kautta asetetaan enemmän kuin kaksi jakoviivaa, saadaan enemmän yhtälöitä (26), mutta jälleen voidaan käyttää pienimmän neliön keinoa.



Kuva 3. (a) Kimmoinen palkki. (b) Palkin pään tuenta.

Tarkastellaan sovellutuksena kuvan 3 esittämää esimerkkiä. Kyseessä on leymäisen kimmoisen homogeenisen isotrooppisen palkin taivutus. Lähteessä /9, s. 325...329/ on esitetty Airyn jännitysfunktion käyttöön perustuva analyttinen siirtymä- ja jännityskentän ratkaisu

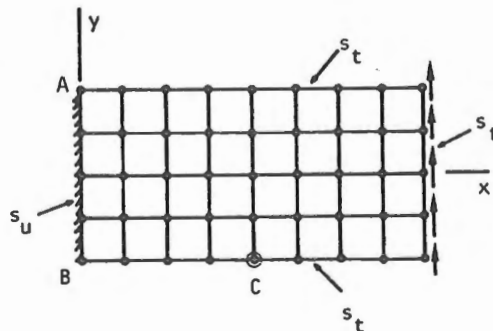
$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{F}{4Ea^3b} [(2+\nu)y(a^2-y^2) - 3(2lx-x^2)y] , \\ v &= \frac{F}{4Ea^3b} [3\nu(1-x)y^2 + (3lx^2-x^3) + (4+5\nu)a^2x] \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

ja

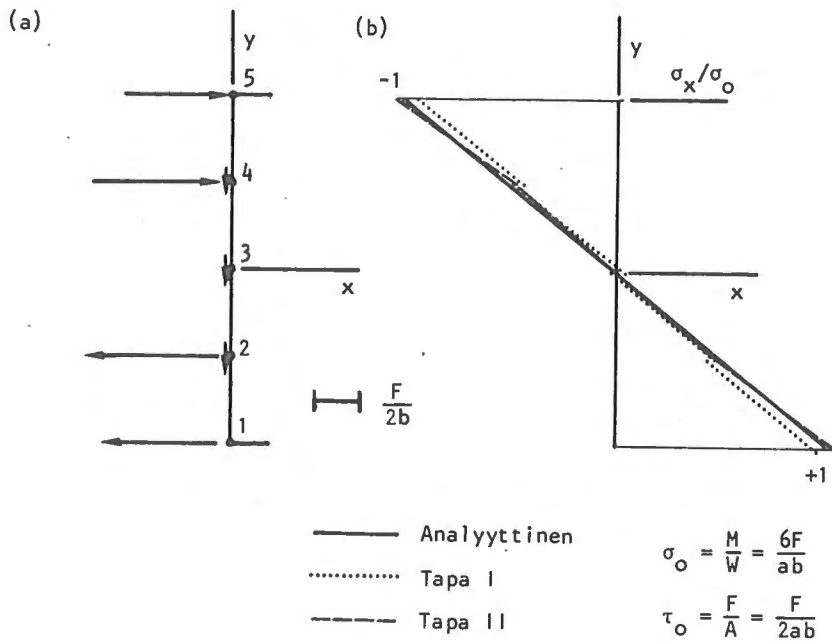
$$\sigma_x = -\frac{3F}{2a^3b}(1-x)y, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = \frac{3F}{4a^3b}(a^2-y^2). \quad (29)$$

Siirtymäkenttä (27) vastaa kuvan 3 (b) mukaista jäykän kappaleen liikkeen estävää tuentaa, jossa palkin ylä- ja alareunan vaakasiirtymä on asetettu nolaksi. Palkin vapaaseen päähän vaikuttava resultoiva pystyvoima F on luonnollisesti ajateltava jakautuneeksi viimeisen kaavan (29) esittämällä tavalla parabolisesti poikkileikkauspinnalle.

Esimerkki on laskettu tapauksessa $l = 4a$ ja $\nu = 0,3$ 4-solmuisilla Lagrange-neliöelementeillä kuvan 4 esittämää verkkoa käyttäen. Reunaehdot on otettu tarvan ratkaisun mukaisesti siten, että reuna $x = 0$ on tyyppiä s_u ja muu reuna tyyppiä s_t . Reunalla s_u solmuisiirtymät on siis otettu tarkasta ratkaisusta.



Kuva 4. 4x8 elementtimerkko.



Kuva 5. (a) Reunan s_u solmureaktiot.

(b) Normaalijännityksen σ_x jakautuma.

(c) Leikkausjännityksen τ_{xy} jakautuma.

Kuvassa 5 on esitetty reunaan s_u liittyviä elementtilaskelmien tuloksia. Kuvassa (a) näkyvät saadut solmureaktiot. Niiden arvot ovat (palkin leveyttä b kohti)

$$\left. \begin{aligned}
 (R_x)_1 &= -1,268998 \cdot F/b & (R_y)_1 &= -0,060329 \cdot F/b \\
 (R_x)_2 &= -1,462237 \cdot F/b & (R_y)_2 &= -0,261768 \cdot F/b \\
 (R_x)_3 &= -0,000001 \cdot F/b & (R_y)_3 &= -0,355875 \cdot F/b \\
 (R_x)_4 &= 1,462235 \cdot F/b & (R_y)_4 &= -0,261768 \cdot F/b \\
 (R_x)_5 &= 1,268996 \cdot F/b & (R_y)_5 &= -0,060328 \cdot F/b
 \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Luvut on esitetty monella desimaalilla, jolloin saadaan kuva symmetriaa rikkovien pyöristysvirheiden suuruusluokasta. Laskelmat on suoritettu yksinkertaisella tarkkuudella tietokoneella VAX-11/780. Ei ole vaikea todeta, että tulokset ovat – pyöristysvirheitä lukuunottamatta – toteamuksen (21) mukaisia.

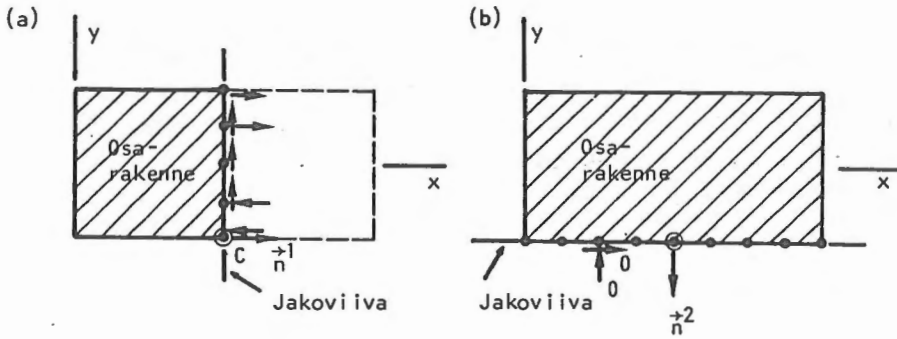
Kuvissa 5 (b) ja (c) on esitetty tavoilla 1 ja 2 lasketut normaali- ja leikkausjännityksen σ_x ja leikkausjännityksen τ_{xy} jakautumat. (Tässä $n_x = -1$, $n_y = 0$. Täten taulukon 1 kaavojen (2) perusteella $t_x = -\sigma_x$, $t_y = -\tau_{xy}$ ja siis kääntäen $\sigma_x = -t_x$, $\tau_{xy} = -t_y$.) Tapaan 2 liittyvät yhtälöt (24) ovat

$$\frac{a}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (t_x)_1 \\ (t_x)_2 \\ (t_x)_3 \\ (t_x)_4 \\ (t_x)_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1,268998 \\ -1,462237 \\ -0,000001 \\ 1,462235 \\ 1,268996 \end{Bmatrix} \frac{F}{b},$$

$$\frac{a}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (t_y)_1 \\ (t_y)_2 \\ (t_y)_3 \\ (t_y)_4 \\ (t_y)_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,060329 \\ -0,261768 \\ -0,355875 \\ -0,261768 \\ -0,060328 \end{Bmatrix} \frac{F}{b}.$$

(31)

Voidaan heti todeta, että keskittämällä ei saataisi ainakaan päätesolmuissa hyviä leikkausjännitysten arvoja. Tapa 2 antaa etenkin leikkausjännitysten suhteen huomattavasti tarkempia tuloksia kuin tapa 1. Tavan 1 yhteydessä lopulliset solmuarvot otetaan yleensä keskiarvoina eri elementeistä saaduista arvoista. Tämä menettely ei kuitenkaan auta osan päätepiisteissä.



Kuva 6. (a) Ensimmäinen osarakenne. (b) Toinen osarakenne.

Kaavojen (26) sovellutuksena on lopuksi laskettu jännityskomponentit pisteessä $P(x = 2a, y = -a)$. Kuva 6 esittää valittua kahta P -pisteen kautta kulkevaa jakoviivaa ja syntyviä osarakenteita. Itse asiassa jälkimmäisessä tapauksessa traktiojakautuma $t_x = 0$, $t_y = 0$ tunnetaan suoraan reunaehtojen perusteella. Tässä siis $n_x^1 = 1$, $n_y^1 = 0$, $n_x^2 = 0$, $n_y^2 = -1$ ja yhtälöt (26) saavat muodot

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x^* \\ \sigma_y^* \\ \tau_{xy}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3,1138 \\ 0,14586 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \frac{F}{ab} \quad (32)$$

Yhtälöiksi (27) saadaan

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x^* \\ \sigma_y^* \\ \tau_{xy}^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3,1133 \\ 0 \\ 0,14586 \end{Bmatrix} \frac{F}{ab} \quad (33)$$

Ratkaisu (tapa 2) on esitetty taulukossa 2. Siinä näkyvät myös tavalla 1 (käytetty keskiarvoja) saadut tulokset sekä tarkat arvot. Jännityskomponentti σ_x saa tavassa 1 kahdesta pisteeseen P liittyvästä elementistä laskettuna arvot $2,5842 \cdot F/ab$ ja $3,3842 \cdot F/ab$, joista laskettu keskiarvo antaa hyvän tuloksen. Komponenttien σ_y ja τ_{xy} suhteen keskiarvon ottaminen ei auta paljontaan ja tapa 2 on tällöin selvästi tarkempi. (Osittainen selitys äskeiselle on

seuraava. σ_x :n arvo riippuu pääasiassa suureesta $\epsilon_x = \partial u / \partial x$, joka on derivaatta reunan suunnassa. Tällöin kolmen peräkkäisen reunan solmun (kahteen elementtiin liittyvät reunasolmut) u-arvot antavat tavallaan mahdollisuuden keskeisdifferenssityyppiseen approksimaatioon. Suureiden σ_y ja τ_{xy} yhteydessä joudutaan laskemaan oleellisia reunan normaalin suuntaisia derivaattoja ja approksimaatio on toispuoleista ja siten epätarkempaa.)

Taulukko 2. Jännityskomponenttien arvot pisteessä C.

	$\sigma_x / (F/ab)$	$\sigma_y / (F/ab)$	$\tau_{xy} / (F/ab)$
Tapa 1	2,9842	0,2401	0,2538
Tapa 2	3,1133	0	0,07293
Tarkka	3	0	0

Vaikka äskeisessä esimerkissä tavoilla 2 saadut traktioiden ja jännitysten arvot olivatkin hyvin tarkkoja, nämä tavat sisältävät tiettyjä heikkouksia sen lisäksi, että ne luonnollisesti vaativat aika paljon jälkikäsitteilytyötä. Useat kirjallisuudessa esitetyt tasoitusmenettelyt – kuten esimerkiksi /10/, /11/ ja /12/ – otaksuvat jännityskomponentit paikan suhteen jatkuviksi. Elementtimenetelmää sovelletaan kuitenkin käytännössä yleensä monimutkaisissa tapauksissa, joissa rakenne muodostuu erilaisista materiaaleista ja kuormitus on epäjatkuva. Tunnetusti tällöin tarkan ratkaisun mukaiset jännityskomponentit ja traktio (tietyllä jakoviivalla) eivät ole valitettavasti jatkuvia ja ko. tasoitusmenettelyt ovat ainakin näiden epäjatkuvuuskohtien läheisyydessä arvoltaan kyseenalaisia ja vaativat modifikaatioita. Tässä esitetyissä tavoissa 2 on siis vastaava puute.

Muitakin ongelmia esiintyy. Kun valitulla jakoviivalla on kärkiä (kuten usein on asianlaita elementtirajoja seuraavalla jakoviivalla), traktiokomponentit ovat epäjatkuvia kärjen kohdalla vaikka itse jännityskomponentit olisivat jatkuvia. Kärkiä on tarkasteltu kenttäprobleeman yhteydessä lähteessä /7/.

Solmureaktio-käsitteen ymmärtäminen auttaa kuitenkin esimerkiksi seuraamaan lähteen /13/ esitystä, joka sisältää erittäin mielenkiintoisen paikallisen jän-

nitysten tasointimenettelyyn. Tasointu suoritetaan elementteittäin. Koska elementit valitaan yleensä siten, että niiden reunat seuraavat mahdollisia materiaaliominaisuuksien ja kuormituksen epäjatkuvuuskohtia, on todennäköistä, että jännityskomponentit ovat jatkuvia kunkin elementin sisällä. Puuttumatta lähemmin lähteen /13/ esitykseen todetaan vain, että siinä käytetään hyväksi kunkin elementin solmureaktioita. (Niistä käytetään ko. lähteessä nimitystä "node point generalized force".)

Ottamalla nyt vuoronperään kukin elementti osarakenteeksi, voimme ymmärtää toteamuksien (14) ja (21) perusteella, että elementin solmureaktiot sisältävät arvokasta tietoa elementin reunaan vaikuttavista traktioista ja että tätä tietoa voidaan hyödyntää käänteisesti elementin jännitystilän määrittämisessä.

Yleistetyt voimat

Klassillisessa mekaniikassa toimitaan tunnetusti usein ns. yleistettyjen koordinaattien (engl. generalized coordinate) q_j , $j = 1, 2, \dots, n$ ja yleistettyjen voimien (engl. generalized force) Q_j , $j = 1, 2, \dots, n$ avulla. (Yleistettyjen koordinaattien sijasta puhutaan vaihtoehtoisesti myös yleistetyistä siirtymistä.) Luku n on tässä kyseessä olevan mekaanisen systeemin vapausasteiden lukumäärä. Systemi on tällöin tavallisesti partikkelien ja jäykkien kappaleten muodostama kokonaisuus, jolla on luonteensa perusteella jo automaattisesti äärellinen määrä vapausasteita. Yleistettyjen voimien tärkeä määrittelykaava on /5, s. 264/

$$\delta W = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_n \delta q_n \quad (34)$$

eli

$$\delta W = \underline{Q}^T \delta \underline{q} = \delta \underline{q}^T \underline{Q}, \quad (34')$$

jossa δW systeemiin vaikuttavien voimien (sekä sisäisten että ulkoisten) tekemä virtuaalinen työ ja jossa suureet δq ovat yleistettyjen koordinaattien arvojen variaatioita eli ns. virtuaalisia siirtymiä. (Merkintää δW on käytetty tavanomaisemman merkinnän δW sijasta korostamaan sitä, että kyseessä ei ole yleensä suureen W variaatio vaan eräs infinitesimaalinen lauseke /14, s. 18/.) Koska virtuaaliset siirtymät voidaan valita mielivaltaisesti, mm. valinnalla $\delta q_j \neq 0$, kaikki muut $\delta q = 0$, saadaan tulos

$$Q_j = \frac{\delta W}{\delta q_j}. \quad (35)$$

Tämä ilmaistaan usein sanoin suunnilleen muodossa: "Tiettyä yleistettyä koor- dinaattia vastaava yleistetty voima on se virtuaalinen työ joka seuraa vastaa- vasta yksikön suuruisesta virtuaalisesta siirtymästä." Tämantapainen toteamus - vaikkakin paljon käytössä - on tietenkin tarkasti ottaen väärä, koska vir- tuaaliset siirtymät on tunnetusti ajateltava äärettömän pieniksi eikä suinkaan kulloisenkin yksikön suuruisiksi. Oikea täsmällinen tulkinta näkyy suoraan kaavasta (35): kyseessä on kahden infinitesimaalisen suureen suhde.

Tasapainossa olevalle systeemille pätee virtuaalisen työn periaate eli

$$\delta W = 0 \quad (36)$$

jokaisen virtuaalisen siirtymätilan suhteen. Koska variaatiot δq voidaan va- lita mielivaltaisesti, yhtälöstä (36) saadaan lausekkeen (34) perusteella yh- täälöt

$$Q_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (37)$$

Nämä ovat systeemin tasapainoyhtälöt eli kunkin yleistetyn voiman tulee hävitä.

Dynaamisessa tapauksessa systeemin liikeyhtälöt voidaan kirjoittaa muotoon

$$Q_j = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (38)$$

jossa T on systeemin liike-energia. Näitä yhtälöitä nimitetään kehittäjänsä mukaan Lagrangen yhtälöiksi, Lagrange v. 1788 /14, s. 347/. Tasapainoyhtälöt (37) saadaan yhtälöistä (38) asettamalla $T = 0$.

Kun rakenteiden mekaniikassa ratkaistaan jännitysproblemaa tavanomaista siirtymäformulaatiota ja elementtimenetelmää käyttäen, syntyvät diskreetit yhtälöt voidaan johtaa niin haluttaessa suoraan klassillisten Lagrangen yhtä- löiden (38) tai (37) erikoistapauksina. Diskretoinnin jälkeenhän kontinuumi on itse asiassa mallinnettu muuttujilla \underline{a} , joita on äärellinen määrä. Solmu- siirtymät \underline{a} ovat siis nyt mallin yleistettyjä siirtymiä.

Taulukon 1 yhtälön (7) eli (8) vasemman puolen havaitaan esittävän kontinuu- min virtuaalisen työn lauseketta miinusmerkkisenä. Vastaavasti yhtälön (4) eli (4') vasen puoli esittää diskreetin mallin virtuaalisen työn lauseketta miinus- merkkisenä. (Miinusmerkki johtuu vain siitä, että elementtimenetelmän yhtälöi- tä synnytetessä on yleensä tapana kirjoittaa virtuaalisen työn periaate muo- dossa $-\delta W = 0$. Tämä siksi, että lopulliset diskreetit yhtälöt saadaan tällöin

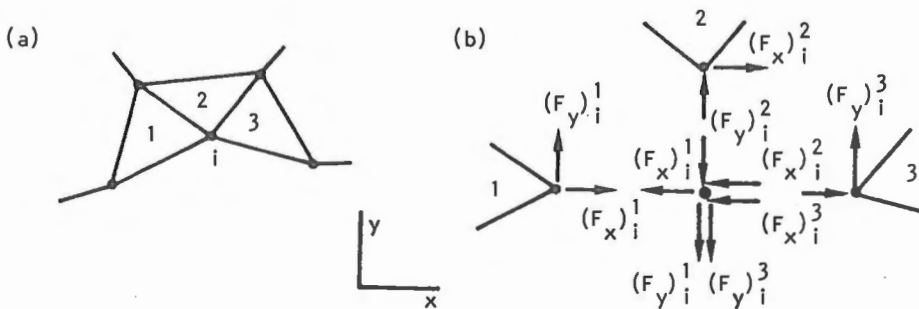
suoraan haluttuun standardimuotoon ilman myöhempää merkin vaihtoa.) Esimerkiksi yhtälö (4') kehitettiin lopuksi muotoon (6') eli siis siinä

$$-\delta W = \delta \underline{a}^T \underline{F}. \quad (39)$$

Vertailu määrittelykaavan (34') kanssa osoittaa siis, että

$$\left. \begin{array}{l} \text{solmuvoimat ovat solmusiirtymiä vastaavia} \\ \text{miinusmerkkisiä yleistettyjä voimia.} \end{array} \right\} \quad (40)$$

Saatu klassilliseen mekaniikkaan pohjautuva tulos tukee siis yhtälöiden (7), (8) ja (9) yhteydessä käyttöön otetun solmuvoimatermin mielekkyyttä. Jos suurella \underline{a} on pituuden dimensio (kuten edellä käsitellyssä esimerkkitapauksessa on ollut asianlaita), solmuvoimilla on määritelmän (34) perusteella juuri tavallisen voiman dimensio. (Tarkasti ottaen olemme käsitelleet esimerkkitapauksessamme aina suureita poikkileikkaussuuntaa kohtisuorassa olevaa pituutta kohti, joten kaavojen (7), (8) ja (9) solmuvoimien dimensio on itse asiassa voiman dimensio / pituuden dimensio.) Jos taas jokin \underline{a} on esimerkiksi kulma (kiertymä), vastaavalla yleistetyllä solmuvoimalla on momentin dimensio.



Kuva 7. (a) Solmu i. (b) Solmun i vapaakappalekuvio.

Mutta miten pitää ymmärtää lauseessa (40) mainittu miinusmerkki? Tämä liittyy vanhaan tuttuun ongelmaan siitä, pitääkö voimaa ja sen vastavoimaa merkitä eri tunnuksilla vai ei. Tarkastellaan esimerkkinä kuvassa 7 (a) esitettyä

solmua i , johon yhdistyy kolme elementtiä. Kuvassa 7 (b) on esitetty solmun vapaakappalekuvio. Jos erillisten elementtien solmuihin vaikuttavien lausekkeissa (9) esitettyjen solmuvoimien $(F_x)_i^e$ ja $(F_y)_i^e$ ajatellaan vaikuttavan kuvan (b) mukaisesti positiivisina positiivisen x - ja y -akselin suunnissa, itse solmun i vapaakappalekuviossa voimat vaikuttavat voiman ja vastavoiman lain perusteella (on kai loogista ajatella kuviteltujen solmuvoimienkin toteuttavan tämän lain) vastakkaisiin suuntiin. Kuvassa 2 (b) on siis sovellettu esitystä, jossa vastavoimakomponenteille on käytetty samoja tunnuksia kuin ennen ja suunta on otettu huomioon kuvan mukaisesti. Itse solmuun vaikuttavat voimat ovat siis positiivisia x - ja y -akselin negatiivisissa suunnissa. Tämä tarkastelutapa antaa kohtuullisen vastauksen edellä esitettyyn kysymykseen. Klassillisen mekaniikan kannalta elementtimalli on korvattu partikkelisysteemillä: elementtimallin solmut, joihin vaikuttavia voimia tarkastellaan. Itse yhtälöt (8) eli

$$\sum_e (F_x)_i^e = 0, \quad \sum_e (F_y)_i^e = 0 \quad (41)$$

tulee siis tällöin ajatella x - ja y -akselin negatiivisille suunnille kirjoitetuiksi projektioyhtälöiksi (vrt. myös kuvassa 1 esitetty tasapainoyhtälöt).

Virtuaaliset siirtymät voivat olla tunnetusti kahta tyyppiä; kinemaattisesti luvallisia (engl. virtual displacements satisfying the constraints) tai kinemaattisesti luvattomia (engl. virtual displacements violating the constraints) / 5, s. 56/. Rajoitteilla (engl. constraint) eli rajoitusyhtälöillä eli sideyhtälöillä tarkoitetaan taas kinemaattisia ehtoja, joilla tarkasteltavan systeemin liikemahdollisuuksia vähennetään. Jäykän kappaleen malliin liittyvät rajoitteet – kappaleen jokaisen partikkeliparin välinen etäisyys pysyy kappaleen liikkuessa vakiona – on ehkä tavallisin esimerkki. Kunkin rajoitteen toteutuminen vaatii systeemiin vaikuttavan tietyn rajoitevoiman (engl. force of constraint) eli pakkovoiman esiintymistä. Rajoitevoimat poikkeavat muista voimista siinä suhteessa, että niiden arvoja ei voida laskea kontitutiivisten yhteyksien avulla, vaan ne saadaan määritettyä vallitsevista liike- tai tasapainoyhtälöistä vasta kun systeemin liike ja muut systeemiin vaikuttavat voimat ovat selvillä. Rajoitevoimien vastakohtana voidaan konstitutiivisia yhteyksiä noudattavia voimia nimittää vaikka konstitutiivisiksi voimiksi /15/. Tämä nimitys ei ole yleisessä käytössä.

Rajoitevoimien tekemä virtuaalinen työ häviää kinemaattisesti luvallisessa virtuaalisessa siirtymässä /14, s. 76/. Kinemaattisesti luvallisten virtuaalisten siirtymien käytöllä pyritään juuri estämään hankalien tuntemattomien

rajoitevoimien ilmestyminen aluksi mukaan ratkaistaviin yhtälöihin.

Taulukon 1 jännitysprobleemassa rakenteen tuetulla reunalla s_u vallitsevat ehdot $u = \bar{u}$, $v = \bar{v}$ ovat nyt tehtävämme rajoitteita ja traktiokomponentit t_x ja t_y vastaavia rajoitevoimia (yleistettyjä voimia). Niiden mukaantulo vältetään käyttämällä tässä suhteessa kinemaattisesti luvallisia virtuaalisia siirtymiä, jotka siis toteuttavat ehdot $\delta u = 0$, $\delta v = 0$ eli $\delta \underline{u} = \underline{0}$ osalla s_u . Mutta jos sitten jälkikäteen nimenomaan halutaan määrittää rajoitevoimien arvoja, on sovellettava sopivia kinemaattisesti luvattomia virtuaalisia siirtymiä. Tällöin virtuaalisessa työyhtälössä on otettava huomioon myös rajoitevoimien tekemä virtuaalinen työ. Esimerkkitapauksessamme sitä esittivät katkokaarisuissa olevat termit (ks. yhtälö (4) eli (4')).

SOLMUVIRRAT

Diskreetit yhtälöt

Tarkastellaan nyt solmuvirta-käsitettä johdannossa esitetyn suunnitelman mukaisesti hyvin samaan tapaan kuin edellä solmuvoima-käsitettä. Vallitsevien analogioiden perusteella selostavaa tekstiä voidaan kuitenkin paikoin tiivistää. Jos virtuaalisen lämmön periaate olisi yleisesti tunnettu ja vanhan historian ja terminologian omaava asia, olisi ollut tietenkin loogisempaa aloittaa käsittely yksinkertaisesta solmuvirrasta ja siirtyä vasta sitten monimutkaisempaan solmuvoimaan.

Tarkastellaan taulukon 1 kenttäprobleemaa ja tehdään lämpötilan elementti-approksimaatio

$$\hat{T} = \sum_j N_j T_j \quad (42)$$

eli matriisimerkinnöin

$$\hat{T} = \underline{N} \underline{a} . \quad (42')$$

(Jatkossa esitetään joitakin matriisikaavoja ilman niissä esiintyvien tunnus-ten tarkkaa selostusta, koska niiden merkitys käy ilmi yhteyden perusteella.) Pystyvektori \underline{a} koostuu siis suureista T_j , jotka ovat lämpötilan arvoja solmujen kohdilla eli ns. solmulämpötiloja.

Lämpötilan esitystä (42) vastaavat likimääräiset lämpötilagradientit ovat taulukon 1 kaavojen (3') perusteella

$$\hat{\gamma}_x = \sum_j \frac{\partial N_j}{\partial x} T_j, \quad \hat{\gamma}_y = \sum_j \frac{\partial N_j}{\partial y} T_j \quad (43)$$

eli

$$\hat{\gamma} = \underline{\underline{c}} \underline{\underline{a}}. \quad (43')$$

Olipa konstitutiivinen yhteys mikä hyvänsä lämpötilajakautumaa (42) vastaavat likimääräiset lämpövuokomponentit $\hat{q}_x = \hat{q}_x(a)$, $\hat{q}_y = \hat{q}_y(a)$ tulevat olemaan funktioita muuttujista $\underline{\underline{a}}$. Jos erityisesti otaksuttaisiin taulukon 1 konstitutiivisen yhteyden (4') pitävän paikkansa, saataisiin

$$\hat{q}_x = -k \sum_j \frac{\partial N_j}{\partial x} T_j, \quad \hat{q}_y = -k \sum_j \frac{\partial N_j}{\partial y} T_j \quad (44)$$

eli

$$\hat{q} = -k \underline{\underline{c}} \underline{\underline{a}}. \quad (44')$$

Approksimaatioiden \hat{q}_x ja \hat{q}_y sijoitus taulukon 1 yhtälöön (7') antaa tuloksen

$$- \int_A (\delta \gamma_x \hat{q}_x + \delta \gamma_y \hat{q}_y) dA - \int_A \delta T S dA + \int_{s_q} \delta T \bar{q}_n ds + \left(\int_{s_T} \delta T q_n ds \right) = 0. \quad (45)$$

Vastaavasti matriisimerkintöjä käyttäen taulukon 1 yhtälö (8') muuttuu muotoon

$$- \int_A \delta \underline{\underline{\gamma}}^T \hat{q} dA - \int_A \delta T S dA + \int_{s_q} \delta T \bar{q}_n ds + \left(\int_{s_T} \delta T q_n ds \right) = 0. \quad (45')$$

Yhtälöihin (45) tai (45') siirryttäessä on samalla taulukon 1 yhtälön (7') tai (8') viivaintegraalitermi esitetty erikseen osan s_q ja s_T ylitse otettuna ja osalla s_q on käytetty hyväksi taulukon 1 kuvassa esitettyä lämpövirran tiheyttä koskevaa reunaehto $q_n = \bar{q}_n$. Osan s_T yli otettu integraali on merkitty katkokaarisulkujen sisään siitä syystä, että tavallisesti se jätetään kokonaan pois näkyvistä. Normaalisti nimittäin lämpötilan variaatio rajoitetaan reunalla s_T toteuttamaan ehto $\delta T = 0$. Tarkoituksena on estää osalla s_T etukäteen tuntemattoman virran tiheyden q_n ilmestyminen mukaan yhtälöihin. Tämän artikkelin aiheen kannalta on kuitenkin jälleen oleellista muistaa tietyissä yhteyksissä suluissa olevan termin olemassaolo. Tästä kohta enemmän.

Tyypilliseen solmuun i liittyvä diskreetti yhtälö saadaan valitsemalla lämpötilan variaatio ja siitä seuraava lämpötilagradientin variaatio seuraavasti:

$$\left. \begin{aligned} \delta T &= N_i \delta T_i, \\ \delta \gamma_x &= \frac{\partial \delta T}{\partial x} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \delta T_i, \\ \delta \gamma_y &= \frac{\partial \delta T}{\partial y} = \frac{\partial N_i}{\partial y} \delta T_i. \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

Variaatio on siis otettu esityksestä (42) varioimalla vain muuttujan T_i arvoa. Valinnan (46) sijoitus yhtälöön (45) antaa yhtälön

$$\begin{aligned} \delta T_i F_i \equiv \delta T_i \left[- \int_A \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \hat{q}_x + \frac{\partial N_i}{\partial y} \hat{q}_y \right) dA - \int_A N_i S dA + \right. \\ \left. + \int_{s_q} N_i \bar{q}_n ds + \left(\int_{s_T} N_i q_n ds \right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (47)$$

Koska variaatio δT_i on mielivaltainen, äskeisessä yhtälössä määriteltyjen kertoimien F_i tulee hävitä eli

$$\begin{aligned} F_i \equiv - \int_A \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \hat{q}_x(\underline{a}) + \frac{\partial N_i}{\partial y} \hat{q}_y(\underline{a}) \right] dA - \int_A N_i S dA + \\ + \int_{s_q} N_i \bar{q}_n ds + \left(\int_{s_T} N_i q_n ds \right) = 0, \quad i = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (48)$$

Nämä ovat diskreetit systeemyhtälöt (tarkennus myöhemmin).

Matriisimerkintöjä käyttäen saadaan lähtemällä yhtälöstä (45') ja ottamalla lausekkeiden (42') ja (43') variaatiot

$$\delta T \approx \underline{N} \delta \underline{a}, \quad \delta \underline{\gamma} \approx \underline{C} \delta \underline{a} \quad (46')$$

lopuksi yhtälö

$$\delta \underline{a}^T \underline{F} \approx \delta \underline{a}^T \left\{ - \int_A \underline{C}^T \hat{\underline{q}}(\underline{a}) dA - \int_A \underline{N}^T S dA + \int_{s_q} \underline{N}^T \bar{q}_n ds + \left(\int_{s_T} \underline{N}^T q_n ds \right) \right\} = 0. \quad (47')$$

Koska variaatiot $\delta \underline{a}$ ovat mielivaltaisia, äskeisessä yhtälössä esiintyvän vaa-
kavektorin $\delta \underline{a}^T$ kertomana olevan pystyvektorin \underline{F} tulee hävitä eli

$$\underline{F} \equiv - \int_A \underline{C}^T \hat{\underline{q}}(\underline{a}) dA - \int_A \underline{N}^T S dA + \int_{s_q} \underline{N}^T \bar{q}_n ds + \left(\int_{s_T} \underline{N}^T q_n ds \right) = \underline{0} . \quad (48')$$

Nämä ovat diskreetit systeemyhtälöt (tarkennus myöhemmin).

Jos tarkastellaan erityisesti Fourierin lakia noudattavaa ainetta, saadaan
kaavaa (44') soveltamalla tavanomainen lineaarinen systeemyhtälöryhmä

$$\underline{F} \equiv \int_A \underline{C}^T \underline{k} \underline{C} dA \underline{a} - \int_A \underline{N}^T S dA + \int_{s_q} \underline{N}^T \bar{q}_n ds + \left(\int_{s_T} \underline{N}^T q_n ds \right) = \underline{0} . \quad (48'')$$

Vielä toisin merkittynä tämä on

$$F_i \equiv \sum_j K_{ij} a_j + \bar{F}_i + \{R_i\} = 0 , \quad i = 1, 2, \dots \quad (48''')$$

jossa K_{ij} on syntyvän kerroinmatriisin alkio, \bar{F}_i on tunnetuista termeistä kertyvä vakiovektorin alkio ja R_i on termi, johon palataan myöhemmin.

Käytännössä diskreetit yhtälöt kootaan elementeittäin kertyvistä osuuksista F_i^e tai \underline{F}^e . Täten systeemyhtälöt (48) eli (48') voidaan esittää myös muodossa

$$F_i \equiv \sum_e F_i^e = 0 , \quad i = 1, 2, \dots \quad (49)$$

eli

$$\underline{F} \equiv \sum_e \underline{F}^e = \underline{0} . \quad (49')$$

Suureiden F_i^e tai \underline{F}^e lausekkeet saadaan tavanomaiseen tapaan kaavoissa (48) tai (48') esiintyvistä lausekkeista tekemällä vain muutokset $N_i \rightarrow N_i^e$, $A \rightarrow A^e$ jne. Siis vielä

$$F_i^e = - \int_{A^e} \left[\frac{\partial N_i^e}{\partial x} \hat{q}_x(\underline{a}^e) + \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \hat{q}_y(\underline{a}^e) \right] dA +$$

$$- \int_{A^e} N_i^e S dA + \int_{s_q^e} N_i^e \bar{q}_n ds + \left(\int_{s_T^e} N_i^e q_n ds \right) \quad (50)$$

eli

$$\begin{aligned} \tilde{F}^e = & - \int_{A^e} (\underline{C}^e)^T \hat{\underline{Q}}(\underline{a}^e) dA - \int_{A^e} (\underline{N}^e)^T S dA + \\ & + \int_{s_q^e} (\underline{N}^e)^T \underline{q}_n ds + \left(\int_{s_T^e} (\underline{N}^e)^T \underline{q}_n ds \right). \end{aligned} \quad (50')$$

Mikään ei nyt estä meitä nimeästä edellä määriteltyjä erilaisia suureita F vaikka solmuvirroiksi. Tätä terminologiaa käyttäen systeemyhtälöt (49) eli (49') voidaan niin haluttaessa tulkita muodollisesti taseyhtälöinä:

$$\left. \begin{array}{l} \text{kuhunkin solmuun eri elementeistä} \\ \text{saapuvien solmuvirtojen summa on nolla.} \end{array} \right\} \quad (51)$$

Tulos muistuttaa esimerkiksi sähköopista tuttua Kirchhoffin I lakia.

Solmuvirtareaktiot

Tässä keskitytään tarkastelemaan kappaleen reunapintaan liittyviä solmuvirtoja. Käsitellään nyt aikaista huolellisemmin diskreettien systeemyhtälöiden (48) eli (48') muodostamista. Lähtökohtana oleva yhtälö (45) eli (45') esitetään yleensä ilman katkosulkulausekkeessa olevaa termiä, koska lämpötilan variaatio ajatellaan rajoitetuksi etukäteen toteuttamaan ehto $\delta T = 0$ s_T :lla. Jos solmu i on reunalla s_T , ei siis tällöin saada suorittaa variaatiota δT_i . Tarvittava yhtälö synnytetäänkin suoraan ehtona $T_i = \bar{T}_i$. Käytännössä yhtälöt muodostetaan kuitenkin yleensä varioimalla ensin kaikkia solmuuuttujia, jolloin saadaan systemaattinen esitys. Tällöin siis

$$\left. \begin{array}{l} \text{tietokoneohjelma synnyttää aluksi} \\ \text{reunalla } s_T \text{ oleviin solmuihin liittyvät} \\ \text{diskreetit yhtälöt virheellisesti,} \end{array} \right\} \quad (52)$$

koska reunan osalla s_T tuntemattomasta lämpövirran tiheydestä q_n kertyvä termi (ks. yhtälöt (48) eli (48'))

$$R_i \equiv \int_{s_T} N_i q_n ds \quad (53)$$

tai

$$\underline{R} \equiv \int_{s_T} \underline{N}^T \underline{q}_n ds \quad (53')$$

ei tule mukaan. Mitään pysyvää virhettä ei kuitenkaan aiheuteta, koska seuraavassa vaiheessa ohjelma ottaa huomioon reunalla s_T vallitsevat annettua lämpötilaa koskevat ehdot ja korvaa virheelliset yhtälöt yhtälöillä $T_i = \bar{T}_i$. Käytännössä tämä tapahtuu kätevästi suuren luvun keinon avulla, jolloin tietokone säilyttää tiedon virheellisten yhtälöiden eri termeistä. Voimme nyt ajatella nämä yhtälöt täydennetyiksi vielä tuntemattomilla termeillä R_i tai \underline{R} . Kun siten muuttujien \underline{a} arvot on määritetty systeemyhtälöistä, voimme jälkikäteen laskea näistä yhtälöistä ko. termien arvot seuraavasti (ks. yhtälöt (48) tai (48')):

$$R_i = \int_A \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \hat{q}_x(\underline{a}) + \frac{\partial N_i}{\partial y} \hat{q}_y(\underline{a}) \right] dA + \int_A N_i S dA - \int_{s_q} N_i \bar{q}_n ds \quad (54)$$

tai

$$\underline{R} = \int_A \underline{C}^T \hat{\underline{q}}(\underline{a}) dA + \int_A \underline{N}^T S dA - \int_{s_q} \underline{N}^T \bar{q}_n ds . \quad (54')$$

Fourierin lakia noudattavalle aineelle saadaan vielä yhtälöistä (48'') tai (48''') vastaavasti tulokset

$$\underline{R} = - \int_A \underline{C}^T \underline{k} \underline{C} dA \underline{a} + \int_A \underline{N}^T S dA - \int_{s_q} \underline{N}^T \bar{q}_n ds \quad (54''')$$

tai

$$R_i = - \sum_j K_{ij} a_j - \bar{F}_i , \quad i = 1, 2, \dots \quad (54''')$$

Solmuvirtoja R tullaan nimitämään tässä solmuvirtareaktioiksi. Lausekkeiden (53) tai (53') perusteella

$$\left. \begin{array}{l} \text{solmuvirtareaktiot antavat tietynlaista} \\ \text{keskimääräistä diskreettiä tietoa kap-} \\ \text{paleen reunan } s_T \text{ läpi alueesta ulos} \\ \text{kulkevan virran tiheyden jakautumasta.} \end{array} \right\} \quad (55)$$

Solmuvirtareaktio-termi ei ole välttämättä erityisen hyvä, mutta parempaakaan

ehdokasta emme ole keksineet. Termi solmu-ulosvirta olisi havainnollisempi, mutta tuntuu taas aika kömpelöltä.

Solmuvirtareaktioiden summa

Taulukon 1 yhtälöstä (6') saadaan valinnalla $w = 1$ tulos

$$\int_s \bar{q}_n ds = \int_A S dA \quad (56)$$

Tämä on eräänlainen globaalinen taseyhtälö: kappaleesta ulos virtaavan suureen kokonaisnettovirta (tässä lämpövirta) on yhtä suuri kuin kappaleen sisällä olevien lähteiden johdosta syntyvä suureen (tässä lämpö) määrä aikaa kohti.

Ratkaistaan osalle s_T jakautuneesta tuntemattomasta virran tiheydestä kertyvä kokonaisvirran (engl. total flow) RT lauseke yhtälöstä (56) ottamalla huomioon, että $s = s_q + s_T$:

$$RT \equiv \int_{s_T} \bar{q}_n ds = \int_A S dA - \int_{s_q} \bar{q}_n ds \quad (57)$$

Lasketaan nyt vastaavasti solmuvirtareaktioiden summa

$$\begin{aligned} \hat{RT} &\equiv \sum R_i \\ &= \int_A \left[\left(\sum_i \frac{\partial N_i}{\partial x} \right) \hat{q}_x(\underline{a}) + \left(\sum_i \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) \hat{q}_y(\underline{a}) \right] dA + \\ &\quad + \int_A \left(\sum_i N_i \right) S dA - \int_{s_q} \left(\sum_i N_i \right) \bar{q}_n ds \\ &= \int_A S dA - \int_{s_q} \bar{q}_n ds \quad (58) \end{aligned}$$

Edellä on käytetty hyväksi kaavaa (54) sekä yhtälöitä (18) ja (19).

Lausekkeiden (57) ja (58) vertailu osoittaa, että

$$\hat{RT} = RT$$

eli

solmuvirtareaktioiden summa on täsmälleen yhtä }
 suuri kuin alueen reunalla s_T vallitsevasta }
 tarkasta virrantiheydestä kertyvä kokonais- } (60)
 virta alueesta ulos.

Virran tiheyden jakautuma ja vuokomponentit

Reunalla s_T vallitsevalle tuntemattomalle virran tiheydelle q_n saadaan solmuuuttujien \underline{a} määrittämisen jälkeen ensinnäkin (tässä tapa 1) suoraan taulukon 1 kaavan (2') perusteella likiarvo

$$\hat{q}_n = n_x \hat{q}_x + n_y \hat{q}_y, \quad (61)$$

jossa vuokomponentit $\hat{q}_x(\underline{a})$ ja $\hat{q}_y(\underline{a})$ on määritetty vallitsevan konstitutiivisen yhteyden perusteella. Fourierin lain tapauksessa käytetään kaavoja (44) eli (44').

Toisaalta tulos (60) osoittaa, että solmuvirtareaktiot antavat ainakin kokonaissummana täysin täsmällistä tietoa virran tiheydestä. Luonnollinen vaihtoehtoinen tapa (tässä tapa 2) määrittää tuntematon virran tiheyden jakautuma on tällöin seuraava. Tehdään reunalla s_T approksimaatio

$$q_n^* = \sum_j N_j(s) (q_n)_j \quad (62)$$

eli

$$q_n^* = \underline{N} \underline{b}, \quad (62')$$

jossa suureet $(q_n)_j$ eli koottuna \underline{b} ovat vielä tuntemattomia virran tiheyden solmuarvoja. Muotofunktiot N_j ovat (ei täysin välttämätöntä) lämpötilan approksimaatiossa käytettyjen muotofunktioiden arvoja reunalla s_T . Tässä siis summeeraus suoritetaan tällä reunalla olevien solmujen yli. Vaaditaan nyt, että approksimaatio (62) eli (62') antaa kaavojen (53) tai (53') mukaisesti samat solmuvirtareaktioiden arvot kuin mitä on saatu kaavojen (54) tai (54') avulla. Saadaan lineaarinen yhtälöryhmä

$$\int_{s_T} N_i q_n^* ds \equiv \sum_j \int_{s_T} N_i N_j ds (q_n)_j = R_i, \quad i = 1, 2, \dots \quad (63)$$

tai

$$\int_{s_T} \underline{N}^T q_n^* ds \equiv \int_{s_T} \underline{N}^T \underline{N} ds \underline{b} = \underline{R}, \quad (63')$$

josta solmuarvot $(q_n)_j$ eli \underline{b} voidaan määrittää.

Siirtymäprobleeman yhteydessä esitetyt huomautukset matriisien \underline{N} ja \underline{R} koosta sekä kerroinmatriisin mahdollisesta keskittämisestä pätevät vastaavina tässäkin.

Edellä on tarkasteltu koko ajan vain reunaa s_T , jolla lämpötila on annettu. Mutta kun solmumuuttujien arvot on ensin määritetty, lämpötila tunnetaan kaikkialla alueessa. Jaetaan nyt alue mielivaltaisesti valitulla (käytännössä elementtirajoja seuraavalla) viivalla kahteen osaan. Tarkastellaan jompaa kumpaa näistä uutena osa-alueena. Lämpötila tunnetaan valitulla jakoviivalla, joka muodostaa siis osan osa-alueen reunasta. Osa-alueen kannalta tämä viiva on tyyppiä s_T . Toisin sanoen

$$\left. \begin{array}{l} \text{osa-alue on vuorovaikutuksessa ympäristönsä} \\ \text{kanssa jakoviivan kautta solmuvirtareaktioiden} \\ \text{välityksellä aivan vastaavasti kuin alkuperäinen} \\ \text{alue on vuorovaikutuksessa osan } s_U \text{ kautta.} \end{array} \right\} \quad (64)$$

Vielä voidaan sanoa, että osa-alue ei tiedä, onko sen jakoviivaan liittyvä osa varsinaista ympäristöä vai elementtimalli.

Kun nyt lasketaan jakoviivalla oleviin solmuihin liittyvät solmuvirtareaktiot, saadaan siis tavalla 2 määritettyä myös tähän viivaan liittyvä traktiojakautuma.

Lämpövuokomponenttien määrittäminen jännityskomponenteille esitettyjen tapojen 1 ja 2 vastineilla on ilmeinen. Kaavojen (26) vastineiksi saadaan taulukon 1 kaavojen (2') perusteella

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ n_x & n_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_x^* \\ q_y^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (q_n^1)^* \\ (q_n^2)^* \end{Bmatrix} \quad (65)$$

eli

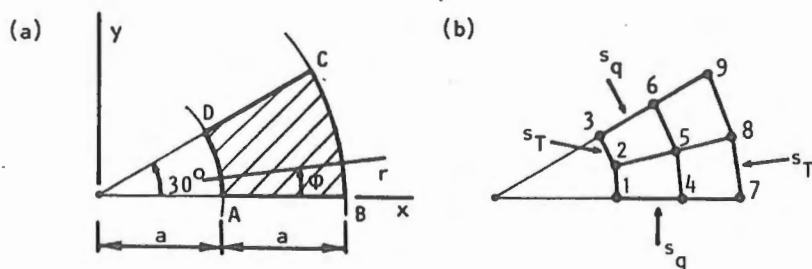
$$\underline{A} \underline{q}^* = \underline{c}. \quad (66)$$

Nyt on vain erona, että vain kahta jakoviivaa käytettäessä ei synny enää ylimääräistä yhtälösystemiä. Silti voidaan edelleen niin haluttaessa soveltaa myös muotoa

$$\mathbb{A}^T \mathbb{A} q^* = \mathbb{A}^T \xi, \quad (67)$$

jolloin saadaan symmetrinen yhtälöryhmä.

Vuokomponenttien määrittämismahdollisuuteen suunnilleen yhtälöiden (65) esittämällä tavalla on vihjattu lähteessä /16/. Tosin tässä lähteessä itse virran tiheyden määrittäminen on hoidettu lähinnä keskittämällä kerroinmatriisi. Silti saavutettavaa hyvää tarkkuutta korostetaan.



Kuva 8. (a) Tehtävän geometria. (b) 2x2 elementtiverkko.

Tarkastellaan sovellutuksena kuvan 8 esittämää esimerkkiä. Kyseessä on yksinkertainen pyörähdyssymmetrinen lämpötilajakautuma $T = T(r)$ ympyränrenkaassa (Kuva 8 (a)). Reunaehdot ovat

$$\left. \begin{aligned} T &= T_0 \text{ reunalla DA,} \\ T &= 0 \text{ reunalla BC,} \\ q_n &= 0 \text{ reunalla AB,} \\ q_n &= 0 \text{ reunalla CD.} \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

T_0 on valittu referenssilämpötila. Lämpölähteen antoisuus S on nolla. Alue otaksutaan lämmönjohtavuudeltaan homogeeniseksi ja Fourierin lämmönjohtumislain katsotaan olevan voimassa.

Tehtävän tarkan ratkaisun voidaan osoittaa olevan napakoordinaatistossa

$$T = \left[1 - \frac{\ln(r/a)}{\ln 2} \right] T_0. \quad (69)$$

Lämpövuovektorin komponentit ovat

$$q_r = \frac{a/r}{\ln 2} \frac{k}{a}, \quad q_\phi = 0. \quad (70)$$

Näistä on helppo laskea tarvittaessa xy -koordinaatistoon liittyvät esitykset $T(x,y)$ sekä $q_x(x,y)$ ja $q_y(x,y)$.

Esimerkki on laskettu 4-solmuisilla isoparametrisilla Lagrange-elementeillä kuvan 8 (b) esittämää verkkoa käyttäen. Reunaehdot on otettu kaavojen (68) mukaisesti.

Solmuvirtareaktioiksi reunalla s_T saadaan

$$\left. \begin{array}{ll} R_1 = -0,191993 \cdot k & R_7 = 0,191993 \cdot k \\ R_2 = -0,383987 \cdot k & R_8 = 0,383986 \cdot k \\ R_3 = -0,191993 \cdot k & R_9 = 0,191993 \cdot k \end{array} \right\} \quad (71)$$

Taulukko 3. Virran tiheyden solmuarvot reunalla DA.

	$(q_n)_1/(k/a)$	$(q_n)_2/(k/a)$	$(q_n)_3/(k/a)$
Tapa 1	-1,176734	-1,176734	-1,176732
Tapa 2	-1,470912	-1,470923	-1,470912
Tarkka	-1,4427...	-1,4427...	-1,4427...

Niiden kokonaissumman voidaan todeta häviävän. Koska $S = 0$ ja \bar{q}_n on nolla reunalla s_q , kokonaisvirta alueesta ulos reunan s_T läpi häviää kaavan (57) perusteella ja tulosten (71) huomataan siis olevan toteamuksen (60) mukaisia.

Taulukossa 3 on esitetty reunan DA solmuissa 1, 2 ja 3 kaavoja (63) soveltamalla saadut virran tiheyden solmuarvot. Huomattakoon, että vaikka kaavat (63) on kirjoitettu koskemaan koko aluetta s_T , ei mikään tietenkään estä meitä soveltamasta niitä vain joillekin s_T :n osille. Näin on juuri tehty tässä reunan DA suhteen. Reunan keskellä oleva lievä kärki on jätetty ilman erityistarkastelua. Tavalla 2 saadaan jälleen huomattavasti tarkempia tuloksia kuin tavalla 1. Esimerkkiä kaavojen (65) käytöstä ei ole katsottu tässä enää tarpeelliseksi.

Jännityskomponenttien jatkuvaan esitykseen liittyvä kritiikki pätee vastavana myös vuokomponentteihin. Lähteen /13/ vastineena mainittakoon lähde /17/. Siinä solmuvirtareaktioista käytetään nimitystä "generalized node point flux". Kunkin elementin solmuvirtareaktioiden arvoja hyödynnetään elementin sisällä vallitsevien vuokomponenttien määrittämisessä.

HUOMAUTUKSIA

Edellä on tarkasteltu pelkästään taulukon 1 kahta yksinkertaista malliprobleemaa. Kun tarvittavat ajatuskulut ovat selvillä, ei ole kovin vaikeaa laajentaa käsittelyä mutkikkaampiin tapauksiin.

Yleistys kahdesta paikkakoordinaatista kolmeen ei synnytä ongelmia. Siirtyminen yhteen dimensioon tekee taas käsittelyn erityisen yksinkertaiseksi. Tällöin nimittäin traktion tai virran tiheyden jakautumisen määrittämiseen liittyvät ongelmat jäävät pois. Niinpä useat ensimmäisistä jännitysresultanttien laskemista solmureaktioiden avulla käsitelleet artikkelit (esimerkiksi /18/ ja /19/) koskivat juuri yksidimensioisia tapauksia.

Jos diskreetteina solmumuuttujina esiintyy myös riippuvien muuttujien ensimmäisen kertaluvun paikkaderivaattoja, ne voidaan tulkita jännitysprobleemoissa pienten siirtymien teoriaa käytettäessä yleensä tietyiksi kiertymiksi (esimerkiksi palkin poikkileikkauksen kiertymä, laatan keskitasoa vastaan alkuaan kohtisuorassa olleen ainesäikeen kiertymä). Näitä yleistettyjä siirtymiä vastaavilla yleistetyillä voimilla on momentin dimensio ja usein – kuten on hyvin tunnettua – näitä yleistettyjä voimia käsitelläänkin ikään kuin ne olisivat täysin todellisia ko. solmuissa vaikuttavia pistemomentteja. Jos solmumuuttujina on toisen kertaluvun derivaattoja, vastaaville yleistetyille voimille

tulee dimensioksi voiman dimensio \times pituuden dimensio toiseen. Tämä ei ole enää perusmekaniikasta tuttu käsite, joten insinöörien terve vastenmielisyyden ko. solmumuuttujien käyttöä kohtaan on ymmärrettävää. (On myös tottumussyitä tärkeämpiä perusteita välttää näitä solmumuuttujia, sillä ne eivät saa välttämättä samaa arvoa elementtien rajoilla, mikäli aineominaisuuksissa on hyppäyksiä.) Kenttäprobleemassa jo riippumattoman muuttujan ensimmäisen paikkaderivaatta aiheuttaa solmumuuttujana vastaavan solmuvirran suhteen havainnollisuuden puutteen.

Tarkastellaan taulukon 1 yhtälöitä (1) ja (1') laajennettuina ajasta riippuviin muotoihin

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + b_x - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + b_y - \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (72)$$

ja

$$-\frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_y}{\partial y} + s - \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = 0. \quad (73)$$

Tässä t on aika, ρ tiheys ja c ominaislämpökapasiteetti. Termit $-\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ ja $-\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$ ovat hitausvoimia (tilavuutta kohti) ja termi $\rho c \frac{\partial T}{\partial t}$ on sisäenergian muutosnopeuden (tilavuutta kohti) approksimaatio. Saamme välittömästi kaikki tarvittavat kaavat, ilman että koko johtamisprosessi täytyisi kokonaan toistaa suorittamalla vain sijoitukset

$$\left. \begin{aligned} b_x &:= b_x - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \approx b_x - \rho \sum_j N_j(x, y) \ddot{u}_j(t), \\ b_y &:= b_y - \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \approx b_y - \rho \sum_j N_j(x, y) \ddot{v}_j(t) \end{aligned} \right\} \quad (74)$$

eli

$$\tilde{b}_i := \tilde{b}_i - \rho \frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial t^2} \approx \tilde{b}_i - \rho \tilde{N}_i \ddot{\tilde{a}}_i \quad (74')$$

sekä

$$S: = S - \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \approx S - \rho c \sum_j N_j(x, y) \dot{T}_j(t) \quad (75)$$

eli

$$S: = S - \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \approx S - \rho c \underline{N} \dot{\underline{a}} \quad (75')$$

vastaaviin aikaisempiin kaavoihin. (Jännitysprobleeman yhteydessä on kyseessä tutun trikin käyttö; sovelletaan hitausvoima-ajattelua siirryttäessä statiikka-dynamiikkaan.) Esimerkiksi solmureaktion lausekkeesta (13'') tulee nyt

$$\underline{R} = \int_A \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} dA \underline{a} - \int_A \underline{N}^T \underline{b} dA + \int_A \rho \underline{N}^T \underline{N} dA \ddot{\underline{a}} - \int_{s_t} \underline{N}^T \underline{t} ds. \quad (76)$$

Suure $\int_A \rho \underline{N}^T \underline{N} dA$ on rakenteen massamatriisi. Hitaisvoimien huomioonottoa solmureaktioiden arvojen laskemisessa on käsitelty tiittävästi ensimmäisen kerran lähteessä /18/. Nyt tarvitaan siis solmuarvojen \underline{a} lisäksi myös arvio toisesta aikaderivaatasta $\ddot{\underline{a}}$. Vielä esimerkiksi tyyppiä $-c\partial u/\partial t$ ja $-c\partial v/\partial t$ (c on vakio) olevien vaimennusvoimien käsittelytapa on äskeisen perusteella ilmeinen.

Taulukon 1 kuvissa esitetyt reunaehtotyypit ovat pelkistetyn yksinkertaiset. Reunoilla s_t ja s_q vallitsevien ehtojen eräät laajennukset olisivat vastaavasti

$$\left. \begin{aligned} t_x &= -(\alpha_{xx}u + \alpha_{xy}v) + \beta_x \\ t_y &= -(\alpha_{yx}u + \alpha_{yy}v) + \beta_y \end{aligned} \right\} \quad (77)$$

eli

$$\underline{t} = -\underline{\alpha} \underline{u} + \underline{\beta} \quad (77')$$

ja

$$q_n = \alpha T + \beta. \quad (78)$$

Suureet α_{xx} , α_{yy} , $\alpha_{xy} = \alpha_{yx}$, β_x , β_y , α ja β ovat annettuja vakioita.

Kaavan (77) kertoimiin α liittyvä osuus vastaa selvästi kimmoisesti tuettua rakenteen reunaa. Kertoimille α_{xx} ja α_{yy} tulee kaavassa (77) esiintyvän mii-

nummerkin valinnalla fysikaalisesti mielekkäässä tapauksessa positiiviset arvot. ($\underline{\alpha}$ -matriisi on positiivisesti definiitti.) Jos $\underline{g} = \underline{0}$, päädytään takaisin taulukon 1 kuvassa esitettyihin ehtoihin ($\beta_x = \bar{t}_x$, $\beta_y = \bar{t}_y$).

Kaava (78) esittää mm. ns. konvektiivista lämmönsiirtoa, jossa otaksutaan, että lämpövirran tiheys kappaleen reunalla on verrannollinen kappaleen reunan lämpötilan T ja ympäristön lämpötilan T_∞ erotukseen $T - T_\infty$; siis $q_n = \alpha(T - T_\infty)$. Tällöin kaavassa (78) $\beta = -\alpha T_\infty$. Jos $\alpha = 0$, päädytään takaisin taulukon 1 kuvassa esitettyihin ehtoihin ($\beta = \bar{q}_n$).

Jälleen kaikki tarvittavat kaavat saadaan välittömästi suorittamalla sijoitukset

$$\left. \begin{aligned} \bar{t}_x &= -(\alpha_{xx}u + \alpha_{xy}v) + \beta_x \approx -(\alpha_{xx} \sum_j N_j u_j + \alpha_{xy} \sum_j N_j v_j) + \beta_x, \\ \bar{t}_y &= -(\alpha_{yx}u + \alpha_{yy}v) + \beta_y \approx -(\alpha_{yx} \sum_j N_j u_j + \alpha_{yy} \sum_j N_j v_j) + \beta_y \end{aligned} \right\} \quad (79)$$

eli

$$\bar{t} = \underline{\alpha} \underline{u} + \underline{\beta} \approx \underline{\alpha} \underline{N} \underline{a} + \underline{\beta} \quad (79')$$

sekä

$$\bar{q}_n = \alpha T + \beta \approx \alpha \sum_j N_j a_j + \beta \quad (80)$$

eli

$$\bar{q}_n = \alpha T + \beta \approx \alpha \underline{N} \underline{a} + \beta \quad (80')$$

vastaaviin aikaisempiin kaavoihin. Esimerkiksi solmuvirtareaktion lausekkeesta (54'') tulee nyt

$$\underline{R} = - \int_A \underline{c}^T \underline{k} \underline{c} \, dA \underline{a} + \int_A \underline{N}^T \underline{S} \, dA - \int_s \alpha \underline{N}^T \underline{N} \, ds \underline{a} - \int_s \underline{N}^T \beta \, ds. \quad (81)$$

On huomattava, että vaikka traktio tai virran tiheys ei ole enää suoraan annettu reunaehdoissa (77) tai (78), ko. suureiden arvot saadaan kuitenkin heti laskettua niistä reunalla s_t tai s_q , kunhan suureiden u ja v tai T arvot tunnetaan. Jännitysprobleemassa ovat siis kyseessä aikaisemmin esitetyn terminologian mukaan konstitutiiviset voimat eivätkä rajoitevoimat. Reunan s_u tai s_T suhteen asetelma säilyy kuitenkin entisenlaisena.

Jännitysprobleeman reunaehdot esitettiin taulukossa 1 merkinnällisistä muuttuussysteistä johtuen siten, että osalla s_u ovat molemmat siirtymäkomponentit ja osalla s_t molemmat traktiokomponentit annettuina. Yleisemmässä tapauksessa reunaehdot ovat kussakin reunan pisteessä seuraavat:

$$\left. \begin{aligned} u' &= \bar{u}' & \text{tai} & & t_{x'} &= \bar{t}_{x'} \\ v' &= \bar{v}' & \text{tai} & & t_{y'} &= \bar{t}_{y'} \end{aligned} \right\} \quad (82)$$

mutta ei molempia. Tässä kuhunkin reunan pisteeseen asetetaan paikallinen suorakulmainen karteesian koordinaatisto $x'y'$ siten, että yhden koordinaattiakselin suunta yhtyy tavallisesti reunapinnan ulkoisen normaalin suuntaan. Pilkuilla varustetut suureet tarkoittavat vektoreiden \vec{u} ja \vec{t} komponentteja paikallisen koordinaatiston kannassa. Merkinnät tulevat nyt väkisin melko raskaiksi. Kutakin annettua siirtymäkomponenttia u' ja v' vastaa oma alueensa $s_{u'}$ ja $s_{v'}$. Kutakin annettua traktiokomponenttia $t_{x'}$ ja $t_{y'}$ vastaa samoin oma alueensa $s_{t_{x'}}$ ja $s_{t_{y'}}$. Ei päällekkäiset osat $s_{u'}$ ja $s_{t_{x'}}$ ($s_{v'}$ ja $s_{t_{y'}}$) muodostavat yhdessä koko reunan.

Traktion virtuaalinen työ taulukon 1 yhtälössä (7) esitetään paikallisen kierretyn koordinaatiston avulla. Siis

$$\int_s (\delta u' t_{x'} + \delta v' t_{y'}) ds = \int_s (\delta u' \bar{t}_{x'} + \delta v' \bar{t}_{y'}) ds \quad (83)$$

Siirryttäessä sitten yhtälöön (4) viivaintegraalitermit saavat muodon

$$- \int_{s_{t_{x'}}} \delta u' \bar{t}_{x'} ds - \int_{s_{t_{y'}}} \delta v' \bar{t}_{y'} ds - \left(\int_{s_{u'}} \delta u' t_{x'} ds + \int_{s_{v'}} \delta v' t_{y'} ds \right) \quad (84)$$

Käsittelyn jatko tämän jälkeen ei tuota kuin merkinnällisiä ongelmia. Samoin on helppo laajentaa tarvittaessa traktioreunaehdoja (82) lausekkeiden (77) tapaisilla esityksillä.

Olemme käsitelleet taulukon 1 esittämiä malliprobleemoja jäännösmenetelmää soveltaen. Jos tehtävä on tyyppiä, jolle on olemassa vallitsevia differentiaaliyhtälöitä ja reunaehdoja vastaava variaatioperiaate, tämä voidaan tietenkin ottaa myös diskretoinnin lähtökohdaksi. Esimerkkeinä olkoot funktionaalit

$$\Pi(\underline{u}) = \frac{1}{2} \int_A \underline{\varepsilon}^T(\underline{u}) \underline{D} \underline{\varepsilon}(\underline{u}) dA - \int_A \underline{u}^T \underline{b} dA - \int_{s_t} \underline{u}^T \underline{\bar{t}} ds \quad (85)$$

ja

$$\Pi(T) = \frac{1}{2} \int_A \underline{\chi}^T(T) \underline{k} \underline{\chi}(T) dA - \int_A T S dA + \int_{s_q} T \bar{q}_n ds. \quad (86)$$

Funktionaali $\Pi(\underline{u})$ on rakenteen siirtymissä esitetty potentiaalienergian lauseke. Funktionaalille $\Pi(T)$ ei ole olemassa mitään vakiintunutta nimeä. Lausekkeet pätevät taulukossa 1 esitetyissä tapauksissa, kun vielä siis otaksutaan Hooken lain tai Fourierin lain olevan voimassa. Luvallisten funktioiden \underline{u} ja v tulee toteuttaa ehdot $u = \bar{u}$, $v = \bar{v}$ reunalla s_u ja luvallisen funktion T ehto $T = \bar{T}$ reunalla s_T . Näiden funktionaalien käyttö johtaa lopuksi tuttuihin yhtälöihin (7ⁱⁱ) ja (48ⁱⁱ) kuitenkin ilman katkosulkulauseketermejä. Täten pelkkään funktionaalien käyttöön tukeutuen voi olla vaikeaa ymmärtää solmuvoima-reaktio- tai solmuvirtareaktio-termien merkitystä. Ensimmäinen tiedossamme oleva solmuvirtareaktioita hyväksi käyttävä artikkeli on /20/ v. 1969. Siinä käsitellään voiteluprobleemaa, jolloin esimerkkiprobleemamme lämpötilaa vastaa paine ja lämpövirran tiheyttä voitelunesteen tilavuusvirta voitelupintojen reunan pituutta kohti. Artikkelin perustuu kuitenkin pelkästään lausekkeen (86) tapaisen funktionaalien käyttöön, joten siinä esitetty tietyn reunan läpi kulkevan kokonaisvirran laskentamenettely on johdettu mielestämme melko vaikeaselkoisesti.

Lähteessä /21/ tarkastellaan solmuvirtareaktioiden hyväksikäyttöä suotovirtauksen yhteydessä.

Lähteessä /22/ on esitetty tämän artikkelin tulokinnasta hieman poikkeava elementin solmuvoimien selitystapa, jota voidaan hyödyntää mm. tilkkutestin (engl. patch test) ymmärtämisessä.

Kirjoituksemme on tarkastellut solmuvoima- ja solmuvirta-käsitteitä lähinnä niiden teoreettisen taustan kannalta. Solmuvoimareaktioilla ja solmuvirtareaktioilla on kuitenkin myös hyödyllisiä käytännön sovellutuksia. Esimerkiksi elementtimenetelmällä mallitettussa maaperässä sijaitseviin paaluihin tai maatukiin maaperästä siirtyvien voimasysteemien määrittäminen tapahtuu paremmalla tarkkuudella solmureaktioiden avulla kuin integroimalla rajapinnalla vallitsevista likimääräisistä tavalla 1 lasketuista traktioista. Vertaa myös lähteet /20/ ja /21/.

Olemme esittäneet tärkeimmät kaavat ensin ilman erityisten konstitutiivisten yhteyksien mukanaoloa. Näin korostuu se seikka, että ko. käsitteillä voidaan operoida myös esimerkiksi plastisuusteoriaa sovellettaessa.

Useimmat tässä kirjoituksessa esitetyt vanhimmat artikkelilähteet ovat mukana ei niinkään varsinaisina lukusuosituksina vaan pikemminkin mielenkiintoisina muistutuksina siitä, että insinöörit ovat jo aikaisessa vaiheessa osanneet käyttää puoli-intuitiivisesti hyväkseen solmureaktioiden antamaa informaatiota hyvää tarkkuutta omaavien traktio- ja jännitysarvojen määrittämiseksi. Tuoreemmat matemaattishenkiset samaa aihepiiriä koskevat artikkelit (esimerkiksi /16/ ja /7/) kun eivät yleensä – ymmärrettävistä syistä – sisällä viitauksia insinöörikirjallisuuteen.

KIRJALLISUUTTA

- [1] Clough, R.W., The Finite Element Method in Structural Mechanics. Chapter 7 of Stress Analysis (eds. Zienkiewicz, O.C., Holister, G.S.), Wiley 1965, s. 90.
- [2] Besseling, J.F., The principle of virtual work and a principle of virtual heat as a basis for nonlinear finite element analysis. Department of Mechanical Engineering, Delft University of Technology. Report nr. 743, June 1983, Laboratory of Engineering Mechanics.
- [3] Zienkiewicz, O.C., The Finite Element Method. Third edition. McGraw-Hill 1977.
- [4] Stein, E., and Ahmad, R., On the stress computation in finite element models based upon displacement approximations. Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg. 10 (1973), s. 81...96.
- [5] Synge, J.L., Griffith, B.A., Principles of Mechanics. Third edition. McGraw-Hill 1959.
- [6] Hrennikoff, A., Precision of finite element method in plane stress. Publications, International Association for Bridge and Structural Engineering 29-II 1969, s. 127...137.
- [7] Carey, G.F., Chow, S.S., and Seager, M.K., Approximate boundary-flux calculations. Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg. 50(1985), s. 107...120.
- [8] Turner, M.J., Martin, H.C., and Weikel, R.C., Further development and applications of the stiffness method. "Matrix Methods of Structural Analysis" (ed. de Veubeke, B.F.), Pergamon Press 1964, s. 212...266.
- [9] Ylinen, A., Kimmo- ja lujuusoppi I. Toinen painos. Werner Söderström 1969.
- [10] Oden, J.T., and Reddy, J.N., Note on an approximate method for computing consistent conjugate stresses in elastic finite elements. Int. j. numer. methods engg. 6(1973), s. 55...61.

- [11] Loubignac, G., Cantin, G. and Touzot, G., Continuous stress fields in finite element analysis. AIAAJ. 15(1977), s. 1645...1647.
- [12] Zienkiewicz, O.C., Xi-kui, L. and Nakazawa, S., Iterative solution of mixed problems and the stress recovery procedures. CANMER 1(1985), s. 3...9.
- [13] Herrmann, L.R., Improved stress calculations for simple quadrilateral elements. Computers & Structures 6(1976), s. 141...148.
- [14] Lanczos, C., The Variational Principles of Mechanics. Fourth edition. University of Toronto 1974.
- [15] Salonen, E-M., Dynamiikka 434. Otakustantamo 1978, s. 161.
- [16] Carey, G.F., Derivative calculations from finite element solutions. Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg. 35(1982), s. 1...14.
- [17] Larock, B.E., Herrmann, L.R., Improved flux prediction using low order finite elements. "Finite Elements in Water Resources" (ed. Gray, W.G., Pinder, G.F. and Brebbia, C.A.), Pentech Press 1977, s. 1.103...1.114.
- [18] Striclin, J.A., Computation of stress resultants from element stiffness matrices. AIAAJ. 4(1966), No. 6, s. 1095...1096.
- [19] Navaratna, D.R., Computation of stress resultants in finite element analysis. AIAAJ. 4(1966), No. 11, s. 2058...2060.
- [20] Reddi, M.M., Finite element solution of the incompressible lubrication problem. Trans. ASME, Series F: J. Lubr. Technol. 91(1969), No. 3, s. 524...533.
- [21] Aalto, J., Suoturvirtaus. Luku 21.24 teoksessa Geomekaniikka II, Suomen Rakennusinsinöörien Liitto. Kirja ilmestyy maaliskuussa 1987.
- [22] Salonen, E-M., The concept of fictitious loading. Int. j. numer. methods engg. 14(1979), s. 1653...1663.

Eero-Matti Salonen, apulaisprofessori, Teknillinen korkeakoulu, Mekaniikan laitos
Jukka Aalto, tekn. lis., Teknillinen korkeakoulu, Mekaniikan laitos