

# TERÄSBETONIPALKIN MITOITUS KAKSITAVOITTEISENA OPTIMOINTITEHTÄVÄNÄ

Markku Heinisuo

Rakenteiden Mekaniikka, Vol. 19  
No 1 1986, s. 3...13

## Tiivistelmä

Artikkelissa tarkastellaan monitavoitteisen optimoinnin tarjoamia mahdollisuuksia teräsbetonipalkin suunnittelutehtävässä. Esimerkkinä lasketaan numerosovellutus, jossa pyritään minimoimaan kustannuksia ja maksimoimaan jäykkyyttä. Rajoitusehtoina käytetään murtotilan taivutusmyötöehtoa ja käyttötilan maksimihalkeaman rajoitusta. Suunnittelumuuttujina ovat palkin vetoterästen pinta-alat. Hierarkkinen optimointimenetelmä, jossa aluksi minimoidaan kustannus, näyttää sopivalta kyseisen tehtävän ratkaisussa. Menetelmä vaatii tietokoneen käyttöä teräsbetonipalkin analysoinnissa ja optimointitehtävän ratkaisussa. Tässä optimointitehtävä on ratkaistu graafisesti yksinkertaisammalla tehtävällä.

## Johdanto

Jännitysrajoitteinen kustannusten optimointi teräsbetonipalkin suunnittelutehtävässä tunnetaan hyvin. Siirtymävaatimukset on totuttu liittämään rajoitusten puolelle normien mukaan. Teräsbetonipalkilla taipumarajoitukset eivät ole aktiivisia, jos palkin mitat vallitaan suunnitteluohjeiden mukaan, mutta suunnittelija saattaa silti haluta mahdollisimman jäykän palkin. Tällöin rajoitusehtoja siirretään optimoitaviksi kohdefunktioiksi kustannusten lisäksi ja kyseessä on monitavoitteinen optimointitehtävä. Näin menetellen ratkaisun yksikäsitteisyys yleensä häviää, mutta toisaalta suunnittelijan valinnan ja vaikutuksen mahdollisuudet kasvavat. Monitavoitteista optimointia kantavien rakenteiden suunnittelutehtäviin on alettu soveltaa vasta 1970-luvun loppupuolella. Esimerkiksi Koski [1] on käsitellyt töissään Pareto-optimaalisten ristikoiden etsimistä.

Teräsbetonipalkin kustannusoptimointia on puolestaan tarkastellut Mäkelä [2], jonka mukaan yksikön mittaisen teräsbetonipalkin kustannusfunktio  $k$  on

$$k = k_l + k_v + k_t + k_h, \quad (1)$$

missä  $k_f$  on muotin materiaali- ja työkustannus,  $k_v$  on betonimassan ja valutyön kustannus,  $k_t$  on pääraudoituksen kustannus töineen ja  $k_h$  on hakaraudoituksen kustannus töineen. Mäkelä tarkasteli suorakaidepalkin jännitysrajoitteista kustannusten optimointia, josta tulostuksena saadaan palkin poikkileikkaus ja tarvittavat teräkset. Rajoitusedot määräytyivät silloisten betoninormien mukaan. Mm. Kirsch [3] on tarkastellut suorakaidepalkin materiaalikustannusten minimointia, kun rajoitettuina suureina ovat sekä jännitykset että siirtymät. Jännitysrajoitukset koskevat sekä taivutusmomenttia että leikkausvoimaa kuten lähteessä [2] Siirtymärajoitteena termille  $bd^3$ , missä  $b$  on palkin leveys ja  $d$  tehollinen korkeus, annetaan alaraja Israelin normien mukaan. Lisäksi muuttujat  $b$  ja  $d$  rajoitetaan ylhäältä ja alhaalta.

Teräsbetonipalkin taipuminen laskentaan on kehitetty monia tietokoneen käyttöön perustuvia menetelmiä sekä kotimaassa (Lindberg [4]) että ulkomailla (Yang ja Saigal [5]). Näissä kyetään ottamaan huomioon mm. betonin halkeilu ja puristuspuolen epälineaarinen jännitysjakautuma. Palkin taipuma saadaan näin ollen hyvinkin tarkasti lasketua, mutta vain numeerisesti.

### Tehtävien rajaus

Seuraavassa tarkastellaan yhtä optimointiesimerkkiä numeroarvoilla. Tavoitteena on yhdistää optimoinnin ja teräsbetonirakenteiden suunnittelun uusia metodeja ja tutkia niiden käyttöä palkin suunnittelutehtävässä. Tehtävä yksinkertaistetaan havainnollisuuden vuoksi. Tarkastellaan toisesta päästä jäykästi kiinnitettyä 1-aukkoista palkkia, josta tunnetaan jänneväli  $L$ , betonipoikkileikkaus (suorakaide  $bh$ ,  $h = d + 30$  mm), materiaaliominaisuudet, tasainen kuormitus  $p$  ja kokonaisvarmuuskerroin  $\gamma$ . Yläpinnan raudoitus katkaistaan  $L/3$ :n päästä jäykästä tuesta. Näillä lähtötiedoilla palkin kustannusfunktio  $k = k_t$ , mikä puolestaan on verrannollinen teräspinta-alaan [2]. Jännitysrajoituksena tarkastellaan vain taivutusmurtoa ja leikkaurmurtotarkastelu sivuutetaan. Betoninormien [6] vaatimusta siitä, että taivutusmomentti poikkeaa enimmillään 30 % kimmooteoreettisesta jakaumasta, ei oteta huomioon. Rajoitusedoksi asetetaan myös palkin alapinnan maksimihalkeamalle raja 0,2 mm. Halkeaman leveys  $w$  lasketaan betoninormien [6] kaavalla (2.81)

$$w = \epsilon_s(3,5c + k_w\phi/\rho_r) \quad (2)$$

missä  $c$  on pääraudoituksen betonipeitteen paksuus (tässä vakio  $c = 20$  mm), kerroin  $k_w$  on harjateräksellä  $k_w = 0,085$ ,  $\phi$  on keskimääräinen tangon läpimitta (tässä vakio  $\phi = 20$  mm) ja kerroin  $\rho_r = A_s^+/A_{ce}$ , missä  $A_s^+$  on alapinnan teräspinta-ala ja  $A_{ce} = (7,5\phi + 30)b$ . Termi  $\epsilon_s$  on alapinnan teräksen venymä.

Näillä oletuksilla suunnittelumuuttujiksi jäävät vain ylä- ja alapinnan teräsmäärät  $A_3^+$  ja  $A_3^-$ . Minimoitava kustannusfunktio on näin ollen verrannollinen funktioon

$$K = LA_3^+ + LA_3^-/3. \quad (3)$$

Lisäksi jäykkyys  $D$ , joka määritellään Parlandin [7] mukaan

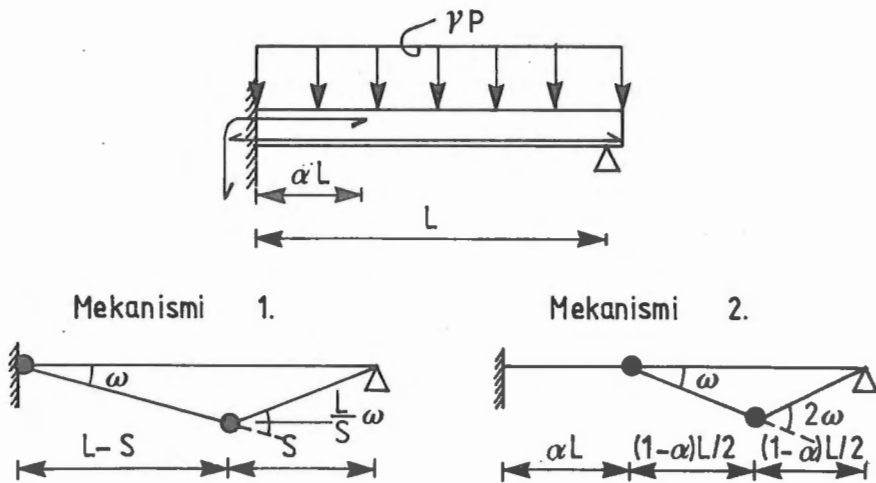
$$D = \frac{\int_0^L p(x)^2 dx}{\frac{1}{L} \int_0^L p(x)v(x) dx} = \frac{pL^2}{\int_0^L v(x) dx} \quad (4)$$

halutaan mahdollisimman suureksi. Kaavassa (4)  $v(x)$  on palkin taipuma kohdassa  $x$ .

Johdantona varsinaiseen tehtävään ratkaistaan pelkkä kustannuksien minimointitehtävä, jossa on voimassa edellä mainittu jännitysrajoitus. Kustannusfunktio arvioidaan hieman toisin kuin kaavassa (3), jolloin tehtävälle saadaan yksinkertainen analyttinen ratkaisu. On huomattava, että edellisistä vakioista esim. palkin poikkileikkauksen mitat  $b$  ja  $d$  sekä materiaalien lujuudet voitaisiin numeerisessa laskennassa valita suunnittelu-  
muuttujiksi teräsmäärien lisäksi. Tässä näin ei tehty, jotta graafinen ratkaisu olisi mahdollista. Jos halkeamanleveyttä ei rajoiteta, niin se voitaisiin liittää kohdefunktioksi. Suunnittelijan vaikutusmahdollisuuksia pienentää esimerkiksi käytettävissä olevien lujuusluokkien epäjatkuva jakauma (esim. K25, 30, 35) sekä usein rakenteen mittojen valinta tuotantoteknisistä tai arkkitehtonisista syistä. Toisaalta teräsmäärä voidaan arvioida suhteellisen jatkuvalla funktiolla, kun rauditus kombinoidaan eri kokoisista teräksistä. Kuitenkin teräskoko vaikuttaa esim. mittaan  $d$ , joka tässä on oletettu vakioksi (jos suojabetonikerroksen paksuus pidetään vakiona). Ottaen huomioon edellä tehdyt yksinkertaistukset ja oletukset onkin syytä korostaa, että todellista optimirakennetta ei ehkä tulla löytämään, vaan etsimme ratkaisua tehtyjen olettamusten perusteella.

### Kustannusoptimointi

Tarkastellaan kuvan 1 teräsbetonipalkkia. Oletamme, että tukiteräs jatkuu tuelta matkan  $\alpha L$ , missä  $\alpha$  on toistaiseksi tuntematon vakio ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ) ja palkin poikkileikkaus on muuten muuttumaton. Kuormituksena on tasainen kokonaisvarmuuskertoimella kerrottu kuormitus  $\gamma p$ .



Kuva 1. Palkki ja murtumismekanismit.

Palkin mahdolliset murtumismekanismit on hahmoteltu kuvassa 1. Tuntemattomia määrättäviä suureita ovat tukiteräksiä vastaava myötömomentti  $M_p^-$  ja aukkoteraksiä vastaava myötömomentti  $M_p^+$  sekä kerroin  $\alpha$ . Nivelen paikka  $S$  asetetaan siten, että saavutetaan se murtumismekanismi, jota vastaa pienin kuormituskerroin, kun palkin poikkileikkausten myötömomentit tunnetaan.

Mekanismiin 1 mukaisen sallitun alueen rajakäyrä määritetään työyhtälöstä

$$M_p^- \cdot \omega + M_p^+ \cdot \frac{L\omega}{S} = \frac{\gamma PL}{2} (L-S) \omega \quad (5)$$

missä  $\omega$  on pieni rotaatio vasemmalla tuella (kuva 1). Pitämällä suureet  $M_p^+$  ja  $M_p^-$  vakioina voidaan yhtälöstä (5) ratkaista termi  $\gamma P$ . Tämä termi on pienemmillään jos

$$S = \left( \sqrt{\left(\frac{M_p^+}{M_p^-}\right)^2 + \frac{M_p^+}{M_p^-}} - \frac{M_p^+}{M_p^-} \right) L \quad (6)$$

Sijoittamalla tulos yhtälöön (5) saadaan rajakäyrän yhtälö määritetyksi. Mekanismiin 2 mukainen työyhtälö on

$$0 \cdot \omega + M_p^+ \cdot 2\omega = \frac{\gamma P}{4} (1-\alpha)^2 L^2 \omega \quad (7)$$

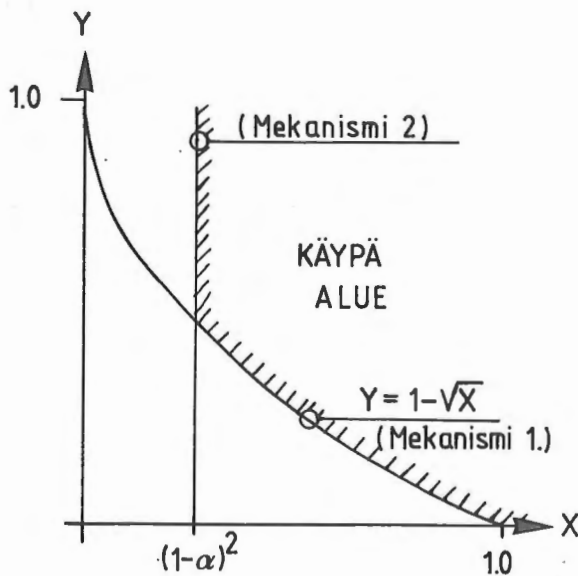
Näin todetaan, että palkki ei sorru ainakaan kuvan 1 mekanismeilla, jos

$$\begin{aligned} Y &\geq 1 - \sqrt{X}, \\ X &\geq (1 - \alpha)^2, \end{aligned} \quad (8)$$

missä on merkitty

$$\begin{aligned} X &= \frac{M_{\bar{p}}}{\gamma_p L^2 / 8}, \\ Y &= \frac{M_{\bar{p}}}{\gamma_p L^2 / 2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Ehdot (8) määrittelevät käyvän alueen, joka on piirrettynä kuvassa 2 (X, Y)-tasoon.



Kuva 2.  
Käypä alue.

Oletetaan, että palkin kustannus on likimain verrannollinen termiin K, joka on

$$K = M_{\bar{p}} L + M_{\bar{p}} \alpha L = \frac{\gamma_p L^3}{8} (X + 4\alpha Y). \quad (10)$$

Parametrin  $\alpha$  eri arvoilla saadaan suoria (X, Y)-tasoon. Tarkastelemalla näiden suorien ja käyvän alueen reunaviivojen tangenttien kulmakertoimia voidaan päätellä seuraavaa.

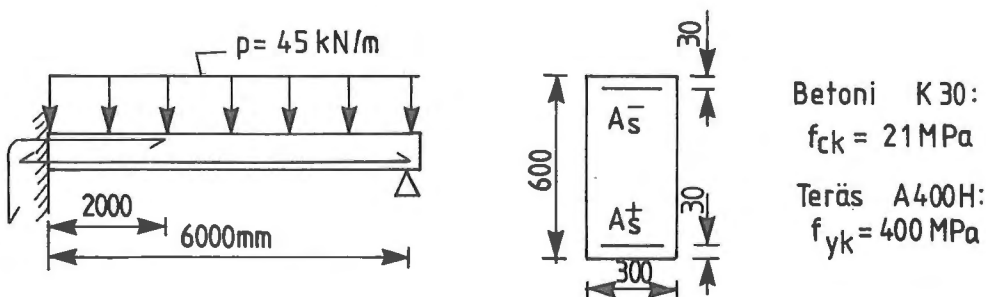
Jos  $1 \geq \alpha \geq \frac{1}{3}$ , niin optimikohta on pisteessä  $X = 1$  ja  $Y = 0$ . Kohdefunktio saa tällöin vakioarvon  $K = \gamma pL^3/8$ . Jos on voimassa ehto  $1/3 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$ , niin ratkaisu löytyy mekanismin 1 rajakäyrältä  $Y = 1 - \sqrt{X}$ , missä muuttuja  $X$  on rajattu  $(1-\alpha)^2 \leq X \leq 1$ . Kohdefunktio on muotoa  $K = \gamma pL^3(X+4\alpha-4\alpha\sqrt{X})$ , jonka pienin arvo tässä alueessa on  $K = \gamma pL^3/9$ , kun  $\alpha = 1/3$ ,  $X = 4/9$  ja  $Y = 1/3$ . Jos parametri  $\alpha$  saa arvot  $0 \leq \alpha \leq 1/3$ , niin ratkaisu löytyy kulmapisteestä  $X = (1-\alpha)^2$ ,  $Y = \alpha$ . Kohdefunktio on tällöin muotoa  $K = \gamma pL^3(1-2\alpha+5\alpha^2)/8$ .

Absoluuttinen minimikohta on  $\alpha = 1/5$ , jota vastaa  $K = \gamma pL^3/10$  ja momentit

$$\begin{aligned} X = 16/25 &\Rightarrow M_p^{\ddagger} = 2\gamma pL^2/25, \\ Y = 1/5 &\Rightarrow M_p^{\ddagger} = \gamma pL^2/10. \end{aligned} \quad (11)$$

### Monitavoitteinen optimointi

Numerosovellutuksena monitavoitteisesta optimoinnista pyrimme minimoimaan yhtälön (3) mukaisen kustannusfunktion ja maksimoimaan yhtälön (4) mukaisen jäykkyyden funktion, kun muuttujina ovat ylä- ja alapinnan teräspinta-alat  $A_s^{\ddagger}$  ja  $A_s^{\ddagger}$ . Jännitysrajoituksena on yhtälöiden (8) mukaiset ehtoyhtälöt sekä ehto, että halkeamaleveys palkin alapinnassa ei ylitä arvoa 0,2 mm. Betoninormien mukaan halkeamaleveys on tässä tapauksessa riippuvainen alapinnan teräsvenymästä. Tarkasteltavan palkin mitat ja materiaalit selviävät kuvasta 3. Tukiteräs katkaistaan matkan  $L/3$  päähän jäykältä tuelta pyrkien näin varmistamaan riittävää ankkurointikapasiteettia yläpinnan tangoille. Yläpinnan teräksen oletetaan jatkossa toimivan koko pituudeltaan.



Kuva 3. Tarkasteltu palkki.

Monitavoitteisen optimoinnin eräs keskeisimpiä kysymyksiä on päätöksentekoproblema-  
tiikka, sillä kohdefunktioiden optimointi aiheuttaa ristiriidan: Jos jäykkyyttä lisätään,  
niin kustannukset kasvavat. Eräs, mutta ei suositeltu (Osyczka [8]) tapa on tarkastella  
kohdefunktioiden lineaarikombinaatiota. Jos tällöin joudutaan kohdefunktioiden arvostus  
lyömään lukkoon jo tehtävän asettelussa se rajoittaa ratkaisumahdollisuuksia. Eräs tapa  
on muuttaa kohdefunktioiden arvostusta tehtävän edetessä. Tähän tarjoaa mahdollisuu-  
den esimerkiksi seuraavassa käytetty ns. hierarkkinen optimointimenetelmä (hierarchical  
optimization method), jota on kuvattu mm. lähteessä [8].

Tässä tehtävässä ratkaisun kulku voi olla esimerkiksi seuraava. Etsitään aluksi kustan-  
nuksiltaan pienin sallitussa alueessa oleva ratkaisu ottamatta huomioon jäykkyyden  
maksimointia. Tämän jälkeen tutkitaan vakio kustannusfunktioiden ja vakio jäykkyyden-  
funktioiden kuvaajia ja mietitään, montako prosenttia voidaan lisätä kustannuksia  
jäykkyyden hyväksi? Kun prosenttiluku on päätetty, niin liitetään kustannusfunktion  
rajat sallittuun alueeseen, eli siirretään kustannusfunktio rajoituspuolelle. Näin saadaan  
suppeampi käypä alue, jossa maksimoidaan jäykkyys. Seuraavassa on otettu vain tämä  
askel prosessista. Usean kohdefunktion tapauksessa prosessia jatketaan ja prosent-  
tiukuja tai kohdefunktioiden järjestystä voidaan muuttaa.

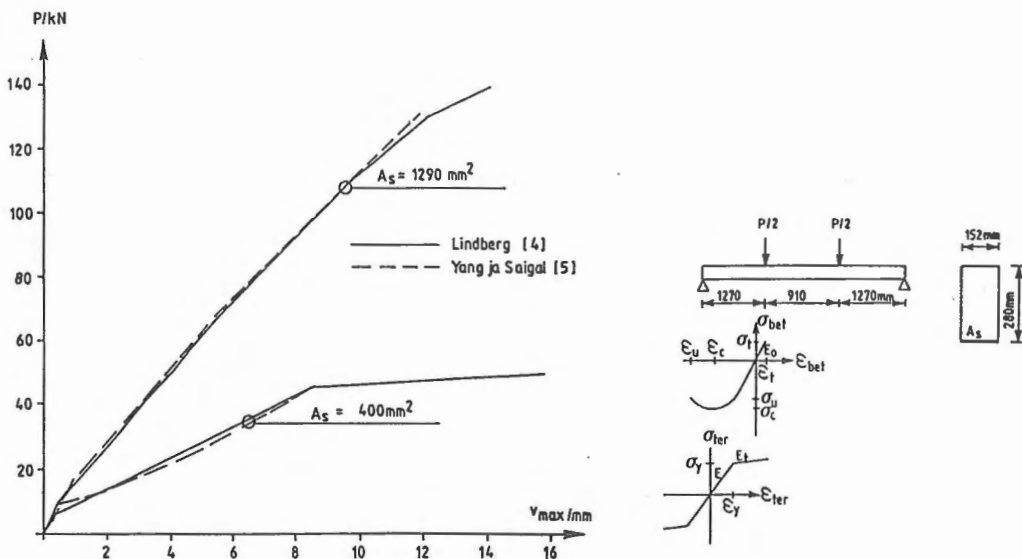
Poikkileikkauksen myötömomentti lasketaan Betoninormien mukaan pelkkien vetoteräs-  
ten perusteella lausekkeesta

$$M_p^+ = f_{yk} A_s^+ d - \frac{f_{yk}^2}{2df_{ck}} A_s^{+2} \quad (12)$$

Yhtälö (12) määrittelee kääntäen yksikäsitteisesti suunnittelumuuttujien  $A_s^+$  ja myötö-  
momenttien  $M_p^+$  välisen riippuvuuden. Etsimme ratkaisua graafisesti tasossa, jonka  
koordinaatit ovat  $M_p^+ / (\rho L^2 / 8)$  ja  $M_p^+ / (\rho L^2 / 2)$ . Kuvaan 2 verrattuna tämä tarkoittaa sitä,  
että käypää aluetta siirretään kokonaisvarmuuskertoimella  $\gamma$  pois päin origosta. Tässä  
yhteydessä halutaan varmuus  $\gamma = 1,75$  murtoon nähden. Varmuuskertoimen  $\gamma$  ajatellaan  
koostuvan tulosta  $\gamma = 1,3 \cdot 1,35$ , missä 1,3 on materiaalin osavarmuuserroin ja 1,35 on  
kuormituksen osavarmuuserroin. Vakio kustannusfunktiot eivät tässä koordinaatistossa  
ole suoria. Vakiojäykkyydenkäyrät ja vakio maksimihalkeaman leveyttä  $w_{max} = 0,2$  mm  
kuvaava käyrä piirretään myös tähän koordinaatistoon.

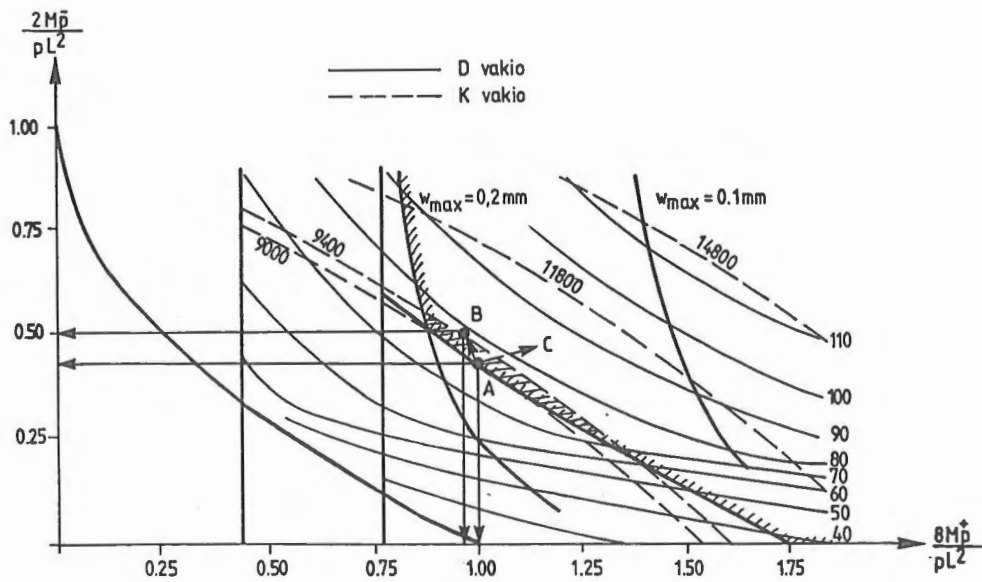
Jäykkyyden laskemiseksi tulee tuntea palkin taipumafunktio kuormituksella  $p$  (ilman  
varmuuserrointa). Taipumat on laskettu TTKK:ssa kehitetyllä ohjelmalla [4]. Ohjel-  
man antamia tuloksia on aiemmin vertailtu koetuloksiin ja korrelaatio on todettu  
hyväksi. Kuvassa 4 on verrattu ohjelman antamia tuloksia FEM-analyysin tuloksiin [5].

Näiden vertailujen perusteella näyttää siltä, että tulokset ovat luotettavia. Ohjelmassa voidaan antaa halutut jännitys-venymäkuviot teräkselle ja betonille (tässä käsitellään lyhytaikaista kuormitusta). Jatkossa on käytetty Betoninormien mukaisia jännitys-venymäkuvioita. Jäykkyyden lausekkeessa esiintyvä integraali on laskettu trapetsisäännöllä käyttäen 20 laskentapistettä palkilla.



Kuva 4. Maksimitaipuman vertailu, kun  $E_o = 42\,944$  MPa (6 100 ksi),  $E = 211\,200$  MPa (30 000 ksi),  $E_c = 2\,112$  MPa (300 ksi),  $\epsilon_c = 0,2$  ‰,  $\epsilon_u = 0,3$  ‰,  $\sigma_c = 26,3$  MPa (-3,74 ksi),  $\sigma_u = 22,7$  MPa (-3,225 ksi),  $\sigma_t = 3,2$  MPa (0,458 ksi),  $\sigma_y = 309,8$  MPa (44 ksi).





Kuva 5. Optimointitehtävän graafinen ratkaisu.

Kuvassa 5 on analyysin tulokset. Käyvän alueen reunaviivat ovat mekanismin 1 mukainen rajakäyrä (yht. (8)) sekä alapinnan maksimi halkeaman leveyttä 0,2 mm vastaava käyrä (yhtälö (2)). Kuvaan on piirretty yhtälön (3) mukaisia vakiokustannuskäyriä (K vakio). Kustannusoptimi on pisteessä A. Jos sallitaan n. 4,5 %:n kustannusten nousu, niin saamme uuden kuvassa esitetyn pienen käyvän alueen. Yhtälön (4) mukaisista vakiojäykkyydkäyristä (D vakio) nähdään, että jäykkyyden maksimipiste tässä käyvässä alueessa on piirtämistarkkuuden rajoissa piste B. Jäykkyys kasvaa likimain 4,5 %, kun siirrytään pisteestä A pisteeseen B eli jäykkyys ja teräsmäärä kasvavat lokaalisti samaa vauhtia. Teräspinta-alat vastaten pistettä B ovat

$$\begin{aligned} A_s &= 2\,000 \text{ mm}^2 \text{ (4 } \phi 25, 1964 \text{ mm}^2), \\ A_s^+ &= 900 \text{ mm}^2 \text{ (3 } \phi 20, 942 \text{ mm}^2). \end{aligned} \quad (13)$$

On huomattava, että jos maksimi halkeaman leveys olisi ollut kohdefunktiona, niin näyttää siltä, että pisteestä A olisi kannattanut edetä suuntaan C. Pisteessä B saadaan seuraavat arvot staattisille suureille.

$D = 79\,036 \text{ MN/m}$   
 $M_{\text{tuki}} = -249 \text{ kNm}$   
 $M_{\text{aukko}} = 97 \text{ kNm}$   
 $w_{\text{max}} = 0,18 \text{ mm}$   
 $v_{\text{max}} = 6,05 \text{ mm}$

	Alapinta	Yläpinta	
Tuella	$\epsilon_{\text{bet}} = -0,617 \text{ }^{\circ}/\text{oo}$	$\epsilon_{\text{ter}} = 1,223 \text{ }^{\circ}/\text{oo}$	
	$\sigma_{\text{bet}} = -12,84 \text{ MPa}$	$\sigma_{\text{ter}} = 244,6 \text{ MPa}$	
Aukossa	$\epsilon_{\text{ter}} = 1,035 \text{ }^{\circ}/\text{oo}$	$\epsilon_{\text{bet}} = -0,344 \text{ }^{\circ}/\text{oo}$	
	$\sigma_{\text{ter}} = 207,0 \text{ MPa}$	$\sigma_{\text{bet}} = -8,11 \text{ MPa}$	(14)

### Yhteenveto

Lasketun esimerkin perusteella voidaan todeta, että hierarkinen optimointimentelmä näyttää sopivalta teräsbetonipalkin monitavoitteisessa suunnittelutehtävässä. Ensiksi kannattaa etsiä minimikustannusratkaisu. Tämä voidaan tehdä suunnittelu-ympäristössä esimerkiksi Mäkelän [2] esittämällä suhteellisen yksinkertaisella laskentaohjeella. Jos suunnittelijalla on käytössä ohjelmistot, joilla voi laskea palkin taipumia ja halkeamaleveyksiä käyttötilassa, niin kustannusoptimipisteen ympäristöstä kannattaa tarkastaa muutama piste. Tällöin saattaa löytyä ratkaisuja, joissa pienillä kustannuslisillä oleellisesti parannetaan palkin toimintaa ajatellussa ympäristössä. Esitetty menetelmä vaatii laajahkoja ohjelmistoja. Näitä ohjelmistoja kyetään kuitenkin laatimaan nykyään jo mikro-luokan laskimille.

### Kiitokset

Tekijä kiittää tekn. tri Koskea opastuksesta optimointitehtävän ratkaisuun, tekn. lis. Lindbergiä ohjelmistojen käyttömahdollisuuksista, DI Turusta ja DI Miettistä ohjelmointiavusta sekä Suomen Akatemiaa rahallisesta tuesta.

### Lähdekirjallisuus

- [ 1 ] Koski, J., Truss Optimization with Vector Criterion, Tampere University of Technology, Publication 6, Tampere, Finland, 1979.
- [ 2 ] Mäkelä, K., Teräsbetonipalkkien kustannusoptimoinnista, Rakenteiden Mekaniikka 7, No.1, 1974, s. 19-32.
- [ 3 ] Kirsch, U., Optimum Structural Design, McGraw-Hill Book Company, New York, 1981, s. 258-262.

- [ 4 ] Lindberg, R., Liitoksen toiminnan vaikutus mastojäykistetyin teräsbetonikehän muodonmuutoksiin ja rasituksiin. (Tietokoneohjelman kuvaus) Ks. myös Lindberg, R., Turunen, T., Tartuntajännebetonirakenteen pitkäaikaiskäyttäytyminen, (vertailu koetuloksiin). II Suomen Mekaniikkapäivien esitelmät, toim. A. Pramila, Teknillinen Mekaniikka, Raportti 29, Tampereen teknillinen korkeakoulu, Tampere 1985.
- [ 5 ] Yang, T.Y., Saigal, S., A simple element for static and dynamic response of beams with material and geometric nonlinearities. Int. J. Num. Meth. Engng, Vol 20, 1984, s. 851-867
- [ 6 ] Betoninormit, viranomaisohjeet, BY 15, Suomen Betoniyhdistys r.y., Vaasa, 1980.
- [ 7 ] Parland, H., On the stiffness of non-monolithic structures, The State Institute for Technical Research, Publication 123, Helsinki, 1968.
- [ 8 ] Osyczka, A., Multicriterion Optimization in engineering with FORTRAN programs, Ellis Horwood Limited, Chichester, 1984.

Markku Heinisuo, tekn. lis., Tampereen teknillinen korkeakoulu, rakennustekniikan osasto, rakennusstatistiikan laitos