

Risto Koivula

Rakenteiden Mekaniikka, Vol. 18
No. 4 1985, s. 57...94

TIIVISTELMÄ: N_s vapaasti deformoituvan sauvan muodonmuutostila voidaan esittää tyhjentävästi neljän siirtymäsuureen avulla, jotka ovat pitenemä v_z , vääntöakselin taipumat v_x ja v_y sekä vääntökulma θ . Vääntöakseli yhtyy leikkausakseliin ja ns. pitenemäakseli painopisteakseliin. Ohjatusti deformoituvalla sauvalla puolestaan liikemahdollisuuksia on rajoitettu sauvan pituudella vaikuttavin, yhden tai useamman pitkittäis- tai poikittaissuuntaisen vapausasteen poistavin tuennoin. Tästä johtuen on erotettava toisistaan toisaalta painopisteakselin ja pitenemäakselin, toisaalta leikkausakselin ja vääntöakselin käsitteet. Kuormituksen ja normaalivoiman, taivutusmomenttien ja bimomentin väliset yhtälöt asetetaan sellaisessa koordinaatistossa, jossa nollapiste sijaitsee pitenemäakselilla ja sektoriaalinen napa vääntöakselilla. Tyhjentävän ratkaisun saamiseksi ohjatun väännön probleemalle tuennoissa vaikuttavine liitosvoimineen on tämän koordinaatiston mukaisin poikkileikkausarvoin lasketut leikkaus- ja muodonmuutossuureet usein vielä muunnettava tavalliseen koordinaatistoon, jossa nollapiste on painopisteessä ja sektoriaalinen napa leikkauskeskiössä. Muunnokset voidaan usein suorittaa tässä kirjoituksessa esitetyn matriisin.

JOHDANTO

Seuraavan kirjoituksen tarkoituksena on valaista lähinnä teräsrakentamisen tarpeita silmällä pitäen ohjatun väännön teoriaa ja johtaa laskentakaavat ohjatun väännön avulla eräille tavanomaisille rakenteille erityisesti alan kirjallisuudessa vähän käsitellyn ns. kahden vapausasteen systeemin osalta. Kahden vapausasteen systeemiä on aiemmin käsitelty mm. lähteessä /2/.

Kaavat on pyritty johtamaan mahdollisimman yleisessä muodossa, jossa ohjatun väännön eräät tunnetut perustapaukset saadaan yhden yleisemmän teorian erityistapauksina ja jota teoriaa voidaan tässä kirjoituksessa käsiteltyjen perustapausten lisäksi käyttää esimerkiksi sellaisissa tapauksissa, joissa tuennasta aiheutuu sauvalle myös pituussuuntaisia kuormia, tai sellaisissa tapauksissa,

joissa sauvaan kohdistuu pakkomuodonmuutoskuormia. On kehitetty sellainen matriisimuotoinen esitystapa, jolla ohjatun väännön probleemoiden ohjelmointi tietokoneelle on mahdollisimman yleisessä muodossa mahdollisimman helppoa. Osoittautuu, että sauvan poikkileikkausarvot, sektorიაალinen koordinaatti, ym. suureet ohjatussa väännössä voidaan yleensä lausua ohjaamattoman väännön vastavien suureiden avulla ja näin siis palauttaa ohjatun väännön tapaukset ohjaamattoman väännön käsitteisiin. On silti olemassa koko joukko rakenteita, nimenomaan silloin, jos ohjatun väännön yhteydessä joudutaan tarkastelemaan esimerkiksi vääntöä vastustavaa jousituenta tai kosketusprobleemoita, jolloin fysikaalisesti oikea kuva rakenteen toiminnasta voidaan saavuttaa ainoastaan ohjatun väännön avulla. Valitettavasti joukko käytännössä tärkeitä tapauksia, kuten voimakkaasti joustavat tuennat, menee myös ohjatun väännön pätevyysalueen ulkopuolelle.

Lähteessä /3/ esitetystä Vlasovin teorialle perustuvassa johdossa väännöstä aiheutuvan normaalijännitysjakautuman verrannollisuudelle sektorიაალiseen koordinaattiin olen korvannut lähtöhypoteesin $\tau_{z_s} = 0$ profiilin keskiviivalla lähtöhypoteesilla $\tau_{z_r} = 0$, jossa r on profiilin seinämän keskiviivaan sidottua kaarikoordinaattia s vastaan kohtisuora koordinaatti. Lopputulokseen lähtöhypoteesin vaihtaminen ei vaikuta.

Käytettäessä poikittaissuunnassa tuetun sauvan ohjatun väännön kahden vapausasteen tapausta käytännön rakenteiden mitoituksessa on syytä muistaa, että eräisiin stabiliteettikysymyksiin tarvitaan lisätutkimusta. Tällaisia stabiliteettikysymyksiä ovat mm. kiepahdus väännön alaisena, ohjattu kiepahdus ja se, että vääntökulman kasvaessa suureksi kahden vapausasteen systeemi saattaa erällä profiileilla muuttua epävarmalle puolelle epälineaariseksi siten että profiilin kiertyessä vääntöakseli käyristyy pois päin kuorman läpimenopisteestä.

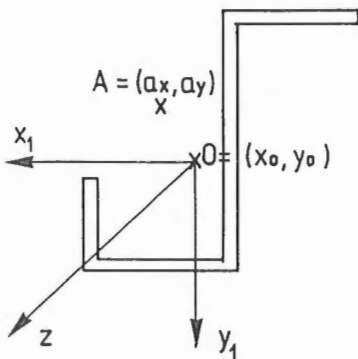
Terminologiassa on noudatettu lähteen /3/ linjaa, kuitenkin siten, että sana "kiertyminen" johdannaisineen on pyritty karsimaan pois, ja sana "vääntökeskiö" on korvattu sanalla "vääntönapa". Sellaisista uusista nimityksistä kuten neutraalipiste ja pitenemäakseli on vastuussa kirjoittaja.

Ohjattua vääntöä pidetään usein aiheettomasti monimutkaisena tai vaikeana teoriانا. Laskut ovat yleensä sitä yksinkertaisempia, mitä vähemmän sauvalla on vapausasteita. Kirjoitus on rajattu siten, että esimerkiksi sektorიაალisen koordinaatin määräämistä tai johdettujen differentiaaliyhtälöiden ratkaisuja ei käsitellä, koska menetelmät ovat samanlaisia kuin ohjaamattomassakin väännössä, ja siten kaikille lukijoille tuttuja.

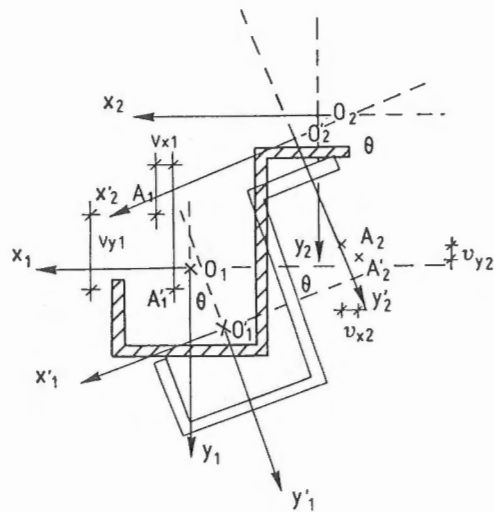
LÄHTÖOLETTAMUKSET, SIIRTYMÄTILA

Lähtökohdaksi otetaan suora ohutseinäinen, avoprofiilinen sauva, jolle seuraavat oletukset voidaan katsoa olevan voimassa:

- 1) Poikkileikkaus ei vääristy, eli distortio $w_x = w_y = 0$ (1.1)
- 2) Lomahdusta ei sallita, eli profiilin seinämän voidaan katsoa toimivan levytilassa
- 3) Kaikkien leikkausjännitysten voidaan katsoa olevan profiilin seinämän keski-
viivan suuntaisia, jolloin $\tau_{zr} \equiv 0$ profiilin koko alueessa (1.2)
- 4) Väännöttömässä taivutuksessa poikkileikkaus pysyy tasona (Bernoullin hypoteesi)
- 5) Leikkausmuodonmuutoksen $\gamma_{zs} = \frac{1}{G} \tau_{zs}$ vaikutus sauvan siirtymiin katsotaan pieneksi



Kuva 1. Koordinaatisto.



Kuva 2. Sama siirtymätila kuvattuna kahdessa koordinaatistossa.

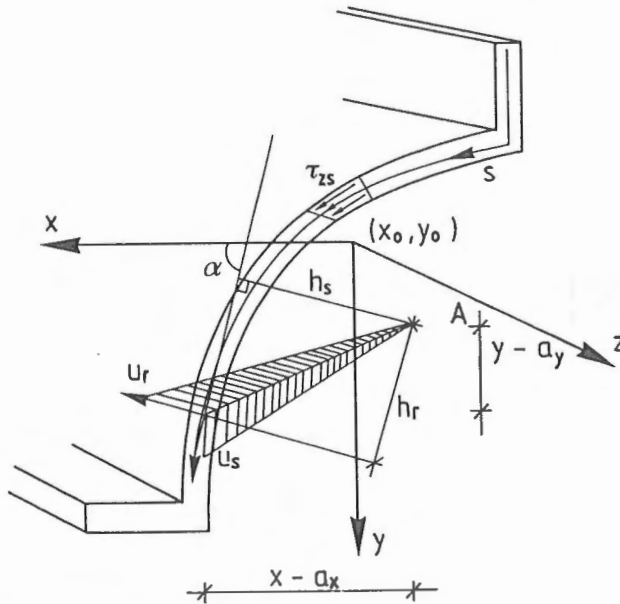
Poikkileikkauksen siirtymätila tasossa voidaan nyt kuvata seuraavilla yhtälöillä:

$$u_x(z) = v_x(z) - \theta(z)(y - a_y) \quad (1.3)$$

$$u_y(z) = v_y(z) + \theta(z)(x - a_x) \quad (1.4)$$

Tässä yhtälöryhmässä $v_x(z)$ ja $v_y(z)$ merkitsevät akselin $A = (a_x, a_y)$ x- ja y-suuntaisia siirtymiä ("taipumia") ja $\theta(z)$ on vääntökulma. Kiertymisen katsotaan tapahtuneen pisteen A ympäri.

Poikkileikkauksen siirtymätila voidaan lausua mielivaltaisessa järjestelmässä O_i, A_i , jossa O_i on järjestelmälle asetettu nollapiste ja A_i on sille asetettu sektorიაალinen napa. Kuvassa 2 on esitetty sama siirtymätila kahdessa mielivaltaisessa, akseleiltaan yhdensuuntaisessa järjestelmässä O_1, A_1 ja O_2, A_2 . Siirtyneet akselit ja vastinpisteet on merkitty yläindeksillä pilkku ('). Huomaa huomattavat erot "taipumien" v_{x_1} ja v_{x_2} sekä v_{y_1} ja v_{y_2} välillä. Vääntökulma θ on tietenkin koordinaatistosta riippumaton.



Kuva 3. u_r ja u_s , h_r ja h_s .

Johdetaan seuraavassa z-suuntaisen siirtymän u_z lauseke lähtöolettamusta 3) lähtökohtana pitäen. Poikkileikkauksella olevan pisteen $x(s, r)$, $y(s, r)$ siirtymät x,y-koordinaatistossa olkoot u_x ja u_y . Vastaavat siirtymät koordinaatistossa s,r ovat tällöin, huomioiden kaavat 1.3 ja 1.4.

$$u_s = u_x \cos \alpha + u_y \sin \alpha = v_x \cos \alpha + v_y \sin \alpha + \theta h_s \quad (1.5.1)$$

$$u_r = u_x \sin \alpha - u_y \cos \alpha = v_x \sin \alpha - v_y \cos \alpha - \theta h_r \quad (1.5.2)$$

$$h_s = (x - a_x) \sin \alpha - (y - a_y) \cos \alpha \quad (1.6.1)$$

on pisteen (s,r) kautta kulkevalle, keskiviivan tangentin suuntaiselle suoralle sektoriaalisesta navasta A vedetyn normaalin pituus.

$$h_r = (x - a_x) \cos \alpha + (y - a_y) \sin \alpha \quad (1.6.2)$$

on sektoriaalisesta navasta keskiviivan normaaliin vedetyn normaalin pituus.

Lähtöolettamuksen 3) perusteella

$$\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} = \gamma_{zr} = \frac{1}{G} \tau_{zr} \equiv 0 \quad (1.7)$$

Tämä toteutuu, kun

$$\begin{aligned} u_z &= v_z(z) - \int \frac{\partial u_r}{\partial z} dr = \\ &= v_z - \int (v'_x \sin \alpha dr - v'_y \cos \alpha dr - \theta' h_r dr) \end{aligned} \quad (1.8)$$

Edettäessä koordinaatin r suuntaan

$$\sin \alpha dr = \cos(r,x) dr = \frac{\partial x}{\partial r} dr = dx \quad (1.9.1)$$

$$-\cos \alpha dr = \cos(r,y) dr = \frac{\partial y}{\partial r} dr = dy \quad (1.9.2)$$

v_z on integroimisvakio, jota tässä kirjoituksessa nimitetään pitenemäksi.

Kaavoista 1.8, 1.9.1 ja 1.9.2 sekä siitä, että $x(s,r)$ ja $y(s,r)$ ovat lähtöhypoteesien 1), 4) ja 5) mukaisia jatkuvia funktioita kaikilla s :n ja r :n arvoilla, seuraa

$$u_z = v_z - v'_x(x - x_0) - v'_y(y - y_0) + \theta' \int h_r dr \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} \int h_r dr &= \int [(x - a_x) \cos \alpha dr + (y - a_y) \sin \alpha dr] = \\ &= -\int [(x - a_x) dy - (y - a_y) dx] \end{aligned} \quad (1.11)$$

Sektoriaalisen koordinaatin $\omega(s, r)$ differentiaali x, y -tasossa edettäessä koordinaatin s suuntaan voidaan puolestaan tunnetusti kirjoittaa muotoon

$$\begin{aligned} d\omega &= h_s ds = (x - a_x) \sin \alpha ds - (y - a_y) \cos \alpha ds = \\ &= (x - a_x) dy - (y - a_y) dx = -h_r dr \end{aligned} \quad (1.12.1)$$

Siitä, että $\omega(s, r)$ on jatkuva kaikilla s :n ja r :n arvoilla, lähtöhypoteesista 4 ja kaavoista (1.5.1), (1.5.2), (1.11) ja (1.12.1), seuraa, että vääntödeplanaatiofunktion differentiaali edettäessä mielivaltaiseen suuntaan

$$d\omega = h_s ds - h_r dr = (x - a_x) dy - (y - a_y) dx \quad (1.12.2)$$

Sijoittamalla kaava 1.11 kaavaan 1.10 ja huomioon ottaen 1.12.1 ja 1.12.2 saadaan tunnettu kaava

$$\begin{aligned} u_z &= v_z(z) - v'_x(z)(x - x_0) - \\ &- v'_y(z)(y - y_0) - \theta'(z)(\omega(s, r) - \omega_0), \text{ jossa} \end{aligned} \quad (1.13)$$

ω_0 , x_0 ja y_0 ovat integroimisvakioita.

Pitenemä $v_z(z)$ on fysikaaliselta merkitykseltään sellainen poikkileikkaukselle tasan jakautunut z -suuntainen siirtymä, jota yhtälön (1.13) muut termit eivät selitä.

Derivoimalla $u_z(z)$ saadaan

$$\epsilon_z = v''_z(z) - v''_x(z)(x - x_0) - v''_y(z)(y - y_0) - \theta''(z)(\omega - \omega_0) \quad (1.14)$$

josta saadaan, ottaen huomioon, että $\sigma_s \approx \sigma_r \approx 0$, normaalijännitysten lauseke

$$\sigma_z = E \epsilon_z = E [v_z' - v_x''(x - x_0) - v_y''(y - y_0) - \theta''(\omega - \omega_0)] \quad (1.15)$$

Poissonin luvun ν vaikutus sisältyy kimmomoduliin E . ω merkitsee seuraavassa esityksessä ohutseinäiselle poikkileikkaukselle funktion $\omega(s, r)$ arvoa keskiviivalla, eli $\omega(s) = \omega(s, 0) = \int_{s_0}^s h_s(s, 0) ds$.

TAIVUTUSMOMENTTIEN, BIMOMENTIN JA NORMAALIVOIMAN VÄLINEN YHTEYS, LEIKKAUSSUUREIDEN N , M_y , M_x JA B RIIPPUVUUS VALITUSTA KOORDINAATISTOSTA

Kun yhtälö 1.15 kerrotaan vuoron perään perusfunktioilla 1, $-(x - x_0)$, $y - y_0$, $\omega(x_0, y_0, a_x, a_y, \omega_0)$ ja integroidaan yli profiilin pinta-alan A , saadaan leikkaussuureille seuraavat lausekkeet:

$$\begin{aligned} N &= \iint_A \sigma_z dA = E [v_z' \iint_A dA - v_x'' \iint_A (x - x_0) dA - \\ &\quad - v_y'' \iint_A (y - y_0) dA - \theta'' \iint_A (\omega - \omega_0) dA] \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

$$\begin{aligned} M_y &= - \iint_A \sigma_z (x - x_0) dA = -E [(v_z' \iint_A (x - x_0) dA - v_x'' \iint_A (x - x_0)^2 dA - \\ &\quad - v_y'' \iint_A (y - y_0)(x - x_0) dA - \theta'' \iint_A (\omega - \omega_0)(x - x_0) dA] \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

$$\begin{aligned} M_x &= \iint_A \sigma_z (y - y_0) dA = E [v_z' \iint_A (y - y_0) dA - v_x'' \iint_A (x - x_0)(y - y_0) dA - \\ &\quad - v_y'' \iint_A (y - y_0)^2 dA - \theta'' \iint_A (\omega - \omega_0)(y - y_0) dA] \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

$$\begin{aligned} B &= \iint_A \sigma_z (\omega - \omega_0) dA = E [v_z' \iint_A (\omega - \omega_0) dA - v_x'' \iint_A (x - x_0)(\omega - \omega_0) dA - \\ &\quad - v_y'' \iint_A (y - y_0)(\omega - \omega_0) dA - \theta'' \iint_A (\omega - \omega_0)^2 dA] \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

Kaavoissa 2.1.1 - 2.1.4 esiintyville pinta-alaintegraaleille ovat vakiintuneet käytäntöön seuraavat merkinnät:

$$\iint_A dA = A \quad \text{on profiilin pinta-ala}$$

$$\iint_A (y - y_0) dA = S_x, \quad \text{ovat poikkileikkauksen staattiset momentit akselien } x = x_0 \text{ ja } y = y_0 \text{ suhteen}$$

$$-\iint_A (x - x_0) dA = S_y$$

$$\iint_A (\omega - \omega_0) dA = S_\omega \quad \text{on sektorიაალinen staattinen momentti}$$

$$\iint_A (y - y_0)^2 dA = I_x, \quad \text{ovat poikkileikkauksen neliömomentit akselien } x = x_0 \text{ ja } y = y_0 \text{ suhteen}$$

$$\iint_A (x - x_0)^2 dA = I_y$$

$$\iint_A (x - x_0)(y - y_0) dA = I_{xy} \quad \text{on poikkileikkauksen keskipakoismomentti em. akselien suhteen}$$

$$\iint_A (\omega - \omega_0)^2 dA = I_\omega \quad \text{on poikkileikkauksen sektorიაალinen neliömomentti}$$

$$\iint_A (\omega - \omega_0)(y - y_0) dA = I_{\omega y}, \quad \text{ovat sektorიაალiset keskipakoismomentit em. akselien suhteen}$$

$$-\iint_A (\omega - \omega_0)(x - x_0) dA = I_{\omega x}$$

Edellä esitetty yhtälöryhmä on matriisimuodossa

$$\begin{Bmatrix} N \\ M_y \\ M_x \\ B \end{Bmatrix} = E \begin{bmatrix} A & S_y & -S_x & -S_\omega \\ S_y & I_y & I_{xy} & -I_{\omega y} \\ S_x & -I_{xy} & -I_x & -I_{\omega x} \\ S_\omega & I_{\omega y} & -I_{\omega x} & -I_\omega \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_z' \\ v_x'' \\ v_y'' \\ \theta'' \end{Bmatrix} =$$

(2.2)

$$= E \begin{bmatrix} A & S_y & S_x & S_\omega \\ S_y & I_y & -I_{xy} & I_{\omega y} \\ S_x & -I_{xy} & I_x & I_{\omega x} \\ S_\omega & I_{\omega y} & I_{\omega x} & I_\omega \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_z^I \\ v_x^II \\ -v_y^II \\ -\theta^II \end{Bmatrix}$$

$$\text{eli } \bar{Q} = E \bar{D} \bar{v} \quad (2.3)$$

Koska sektoriaaliseksi navaksi (a_x, a_y) voidaan valita mielivaltainen poikkileikkaustason piste, koska nollapisteen koordinaatit x_0 ja y_0 ja sektoriaalisen koordinaatin vakiotermit ω_0 esiintyvät kaavaa 1.15 johdettaessa valinnaisten integroimisvakioiden ominaisuudessa ja koska näiden lisäksi myös koordinaatiston suuntakulma ϕ on valinnainen, ovat matriisin \bar{D} alkiot riippuvaisia kaikkiaan kuuden eri koordinaatistovakion valinnasta, mikä on sama määrä kuin matriisissa \bar{D} on lävistäjän ulkopuolisia ns. kytkentätermejä. Tämä antaa mahdollisuuden valita sektoriaalinen napa, nollapiste, ω_0 ja suuntakulma ϕ siten, että vektoreiden \bar{Q} ja \bar{v} alkiot ovat keskenään toisistaan riippumattomia ja niiden aiheuttamat normaali-jännitysjakautumat keskenään ortogonaalisia. Matriisin \bar{D} "siivoaminen" ortogonaalisuuden esteenä kulloinkin olevista kytkentätermeistä valitsemalla oikea koordinaattijärjestelmä joka riippuu sekä profiilista että tuennasta sauvan pituudella, on paitsi mahdollista, yleensä myös välttämätöntä, jotta voitaisiin asettaa oikein kuormituksen ja leikkaussuureiden N , M_y , M_x ja B väliset yhtälöt.

Yleisessä tapauksessa leikkaussuureet N , M_y , M_x ja B ovat valitusta koordinaatistosta riippuvia suureita.

Kun vakiot x_0 ja y_0 valitaan siten, että staattiset momentit $S_x = S_y = 0$, niin x_0 ja y_0 ovat tällöin poikkileikkauksen painopisteen koordinaatit. Painopisteiden uraa sauvalla nimitetään painopisteakseliksi. Seuraavassa "absoluuttisen" x, y -koordinaatiston origo sijoitetaan painopisteeseen, jolloin painopisteellä $x_0 = y_0 = 0$.

Kun origon ollessa painopisteessä sektoriaalisen navan koordinaatit a_x ja a_y valitaan siten, että sektoriaaliset keskipakoismomentit $I_{\omega x} = I_{\omega y} = 0$, niin a_x ja a_y ovat poikkileikkauksen leikkauskeskiön koordinaatit. Leikkauskeskiöiden uraa sauvalla nimitetään leikkausakseliksi. Nimitys johtuu siitä, että väännöttömissä taivutuksissa leikkausjännitysten resultantti poikkileikkauksella kulkee aina leikkauskeskiön kautta (osoitettu lähteessä /3/).

Kun tässä koordinaatistossa vielä määrätään sektoriaalisen koordinaatin integrointialkupiste s_0 siten, että $\int_s \omega dA = 0$ ja asetamme vakion $\omega_0 = 0$, niin saamme sellaisen järjestelmän $x_0 = 0, y_0 = 0, a_x, a_y, \omega_0 = 0$, jossa taivutuksen, väännön ja normaalivoiman aiheuttavat jännitykset ovat keskenään ortogonaalisia vapaasti deformoituvalla sauvalla, jolla ei ole sauvan pituudelle jakautuvia pitkittäisiä tai poikittaisia leikkausvoimia vastaanottavia tuentoja. Tätä järjestelmää nimitetään seuraavassa painopiste-leikkauskeskiökoordinaatistiksi.

Tarkastellaan vielä lyhyesti koordinaattiakselien suuntakulman ϕ vaikutusta matriisin \bar{D} alkioihin painopistekoordinaatistossa. Neliömomenttien ja keskipakoismomentin arvot, x, y -koordinaatistoon nähden kulman ϕ kiertyneessä koordinaatistossa x_ϕ, y_ϕ ovat tunnetusti

$$I_{x_\phi} = I_x \cos^2 \phi + I_y \sin^2 \phi - I_{xy} \sin 2\phi \quad (2.4.1)$$

$$I_{y_\phi} = I_x \sin^2 \phi + I_y \cos^2 \phi + I_{xy} \sin 2\phi \quad (2.4.2)$$

$$I_{x_\phi, y_\phi} = \frac{1}{2} (I_x - I_y) \sin 2\phi + I_{xy} \cos 2\phi \quad (2.4.3)$$

Erityisesti, jos

$$\phi = \phi_0 = \frac{1}{2} \arctan \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}, \quad (2.5)$$

niin ϕ_0 on x -akselin ja profiilin toisen pääakselin ξ välinen kulma. Pääakselikoordinaatistossa ξ, η taivutusmomentit M_ξ ja M_η ovat keskenään ortogonaalisia, koska keskipakoismomentti $I_{\xi\eta} = 0$. Tästä seuraa, että kun vapaasti deformoituvaa sauvaa kuormitetaan pääakselin suunnassa, niin sauvan kuormitusta vastaan kohtisuora taipuma on nolla ja sauva siis taipuu kuormituksen suunnassa.

Leikkaussuurevektori \bar{Q} koordinaattiakselien suunnaltaan mielivaltaisessa painopiste-leikkauskeskiökoordinaatistossa voidaan siis aina esittää vastaavanlaisessa pääakselikoordinaatistossa ξ, η lasketun matriisin \bar{D}_0 avulla seuraavana matriisiyhtälönä:

$$\bar{\bar{Q}}_{x,y} = \begin{Bmatrix} N \\ M_y \\ M_x \\ B \end{Bmatrix} = E \begin{bmatrix} A, & 0 & , & 0 & , & 0 \\ 0, & I_{y0}, & -I_{xy0}, & 0 \\ 0, & -I_{xy0}, & I_{x0}, & 0 \\ 0, & 0 & , & 0 & , & I_{\omega 0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v'_z \\ v''_x \\ -v''_y \\ -\theta'' \end{Bmatrix} = \quad (2.6)$$

$$= E \begin{bmatrix} 1, & 0 & , & 0 & , & 0 \\ 0, & \cos \phi, & \sin \phi, & 0 \\ 0, & -\sin \phi, & \cos \phi, & 0 \\ 0, & 0 & , & 0 & , & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A, & 0 & , & 0 & , & 0 \\ 0, & I_{\eta 0}, & 0 & , & 0 \\ 0, & 0 & , & I_{\xi 0}, & 0 \\ 0, & 0 & , & 0 & , & I_{\omega 0} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1, & 0 & , & 0 & , & 0 \\ 0, & \cos \phi, & -\sin \phi, & 0 \\ 0, & \sin \phi, & \cos \phi, & 0 \\ 0, & 0 & , & 0 & , & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v'_z \\ v''_x \\ -v''_y \\ -\theta'' \end{Bmatrix}$$

$$= E \bar{\bar{\rho}} \bar{\bar{D}}_0 \bar{\bar{\rho}}^T \bar{v}_{x,y} \quad (2.7)$$

Vapaasti deformerituvan sauvan yhtälöryhmällä

$$\bar{\bar{Q}}_{\xi, \eta} = E \bar{\bar{D}}_0 \bar{v}_{\xi, \eta} \quad (2.8)$$

on perustava merkitys myös silloin, kun sauva ei ole vapaasti deformerituva, sillä sauvan leikkaussuureet ja muodonmuutokset voidaan (sen jälkeen kun ne ensin on jouduttu ratkaisemaan jossakin muussa koordinaatistossa) palauttaa muunnosmatriisien avulla tähän yhtälöryhmään tuennoissa esiintyvien rasitusten ratkaisemiseksi.

Muunnosmatriisilla $\bar{\rho}(\phi)$ on ominaisuudet

$$\bar{\rho}^{-1}(\phi) = \bar{\rho}^T(\phi) \quad (2.9)$$

$$\bar{\rho}^{-1}(\phi) = \bar{\rho}(-\phi) \quad (2.10)$$

$$(\bar{\rho}^T)^{-1} = \bar{\rho}^T(-\phi) = \bar{\rho}^{-1}(\phi) = \bar{\rho} \quad (2.11)$$

Koska A ja I_{ω_0} ovat riippumattomia koordinaatiston suuntakulmasta ϕ , ovat myös N ja B siitä riippumattomia.

$$\bar{Q}_{\xi, \eta} = \bar{\rho}^T \bar{Q}_{x, y} \quad (2.12)$$

$$\bar{v}_{\xi, \eta} = \bar{\rho}^T \bar{v}_{x, y} \quad (2.13)$$

Koordinaatisto asetetaan seuraavassa aina, mikäli mahdollista suunnaltaan sellaiseksi, että akseleiden suuntaisista kuormista sauva taipuu akseleiden suunnassa.

Tarkastellaan seuraavassa yhteyttä koordinaatistossa $x_{01}, y_{01}, a_{x_1}, a_{y_1}, \omega_{01}$ laskettujen ja jossakin muussa akseleiltaan yhdensuuntaisessa koordinaatistossa $x_{02}, y_{02}, a_{x_2}, a_{y_2}, \omega_{02}$ laskettujen leikkaussuureiden N, M_y , M_x ja B välillä.

Tällöin

$$x_1 = x - x_{01}, \quad x_2 = x - x_{02}, \quad dx_1 = dx_2 = dx \quad (2.14.1)$$

$$y_1 = y - y_{01}, \quad y_2 = y - y_{02}, \quad dy_1 = dy_2 = dy, \quad (2.14.2)$$

joten

$$x_2 = x_1 - x_{02} + x_{01} = x_1 - (x_{02} - x_{01}) \quad (2.15.1)$$

$$y_2 = y_1 - y_{02} + y_{01} = y_1 - (y_{02} - y_{01}) \quad (2.15.2)$$

Järjestelmissä O_1, A_1 ja O_2, A_2 , joissa O_i on järjestelmäkohtainen nollapiste ja A_i on sektorიაალinen napa, laskettujen sektorიაალisten koordinaattien $\omega - \omega_{0i}$ välillä vallitsee yhteys

$$\begin{aligned} d\omega_1 &= h_{1S} ds = (x_1 - a_{x_1}) \sin \alpha ds - (y_1 - a_{y_1}) \cos \alpha ds \\ &= (x_1 - a_{x_1}) dy_1 - (y_1 - a_{y_1}) dx_1 \\ &= (x_1 - a_{x_1}) dy - (y_1 - a_{y_1}) dx \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} d\omega_2 &= h_{2S} ds = (x_2 - a_{x_2}) \sin \alpha ds - (y_2 - a_{y_2}) \cos \alpha ds \\ &= (x_2 - a_{x_2}) dy_2 - (y_2 - a_{y_2}) dx_2 \\ &= (x_2 - a_{x_2}) dy - (y_2 - a_{y_2}) dx, \text{ jossa} \end{aligned} \quad (2.17)$$

a_{x_2} ja a_{y_2} ovat sektorიაალisen navan A_2 koordinaatit, kun nollapiste on O_1 ,

joten

$$\begin{aligned} \omega_2 &= \omega_1 + (x_2 - a_{x_2}) y_2 - (x_1 - a_{x_1}) y_1 - (y_2 - a_{y_2}) x_2 + (y_1 - a_{y_1}) x_1 + \omega_{02} - \omega_{01} \\ &= \omega_1 + (x_1 - x_{02} + x_{01} - a_{x_2}) (y_1 - y_{02} + y_{01}) - (x_1 - a_{x_1}) y_1 \\ &\quad - (y_{01} - y_{02} + y_{01} - a_{y_2}) (x_1 - x_{02} + x_{01}) + (y_1 - a_{y_1}) x_1 + \omega_{02} - \omega_{01} \\ &= \omega_1 + (a_{x_1} - a_{x_2}) y_1 - (a_{y_1} - a_{y_2}) x_1 + a_{x_2} (y_{02} - y_{01}) \\ &\quad - a_{y_2} (x_{02} - x_{01}) + \omega_{02} - \omega_{01} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Kun nyt kerrotaan yhtälö 1.15, jonka oletetaan olevan voimassa järjestelmässä O_1 ja A_1 , järjestelmän O_2 ja A_2 perusfunktiolla 1, $x_2 = x_1 - (x_{02} - x_{01})$, $y_2 = y_1 - (y_{02} - y_{01})$ ja ω_2 :llä kaavasta 2.18, saadaan

$$N_2 = \int_A \sigma_Z dA = N_1 \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned}
 M_{y_2} &= -\int_A \sigma_z [x_1 - (x_{02} - x_{01})] dA = -\int_A \sigma_z x_1 dA + (x_{02} - x_{01}) \int_A \sigma_z dA \\
 &= M_{y_1} + (x_{02} - x_{01}) N_1
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

$$\begin{aligned}
 M_{x_2} &= -\int_A \sigma_z [y_1 - (y_{02} - y_{01})] dA = \int_A \sigma_z y_1 dA - (y_{02} - y_{01}) \int_A \sigma_z dA \\
 &= M_{x_1} - (y_{02} - y_{01}) N_1
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

$$\begin{aligned}
 B_2 &= \int_A \sigma_z \omega_2 dA = \int_A \sigma_z \omega_1 dA - (a_{x_2} - a_{x_1}) \int_A \sigma_z y_1 dA + (a_{y_2} - a_{y_1}) \int_A \sigma_z x_1 dA + \\
 &\quad + [a_{x_2} (y_{02} - y_{01}) - a_{y_2} (x_{02} - x_{01}) + \omega_{02} - \omega_{01}] \int_A \sigma_z dA \\
 &= B_1 - (a_{x_2} - a_{x_1}) M_{x_1} - (a_{y_2} - a_{y_1}) M_{y_1} + \\
 &\quad + [a_{x_2} (y_{02} - y_{01}) - a_{y_2} (x_{02} - x_{01}) + (\omega_{02} - \omega_{01})] N_1
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

Edellä mainitut kaavat, jotka ovat sellaisenaan käyttökelpoisia laskettaessa esim. leikkaussuureiden siirtymistä profiililtaan erilaisten sauvojen päittäisliitoksissa, voidaan esittää myös vektorimuodossa, olettaen että \bar{N} on z-akselin suuntainen vektori ja bimomentti B on skalaari, \bar{r}_0 on origon siirrosvektori $(x_{02} - x_{01})\bar{i} + (y_{02} - y_{01})\bar{j}$ ja \bar{a}_2 ja \bar{a}_1 ovat sektoriaalisten napojen paikkavektorit järjestelmässä O_1 ja A_1 , \bar{M} on momenttivektori

$$\bar{N}_2 = \bar{N}_1 \tag{2.23}$$

$$\bar{M}_2 = \bar{M}_1 - \bar{r}_0 \times \bar{N} \tag{2.24}$$

$$B_2 = B_1 - (\bar{a}_2 - \bar{a}_1) \cdot \bar{M}_1 + \bar{a}_2 \times \bar{r}_0 \cdot \bar{N} + (\omega_{02} - \omega_{01}) \bar{N} \cdot \bar{k} \tag{2.25}$$

$$(\omega_{02} - \omega_{01} \text{ esiintyy merkityksessä } \frac{S_{\omega_2}}{A} - \frac{S_{\omega_1}}{A}).$$

Vastaava yhtälö matriisina

$$\bar{Q}_2 = \begin{Bmatrix} N_2 \\ M_{y_2} \\ M_{x_2} \\ B_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & , & 0 & , & 0 & , & 0 \\ x_{02}-x_{01} & , & 1 & , & 0 & , & 0 \\ -(y_{02}-y_{01}) & , & 0 & , & 1 & , & 0 \\ \omega_{02}-\omega_{01}+a_{x_2}(y_{02}-y_{01})-a_{y_2}(x_{02}-x_{01}), -(a_{y_2}-a_{y_1}), -(a_{x_2}-a_{x_1}), 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_1 \\ M_{y_1} \\ M_{x_1} \\ B_1 \end{Bmatrix} \quad (2.26)$$

$$= \bar{S}_{1,2}(x_{02}, x_{01}, y_{02}, y_{01}, a_{x_2}, a_{x_1}, a_{y_2}, a_{y_1}, \omega_{02}, \omega_{01}) \cdot \bar{Q}_1$$

$$\bar{S}_{1,2}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & , & 0 & , & 0 & , & 0 \\ -(x_{02}-x_{01}) & , & 1 & , & 0 & , & 0 \\ y_{02}-y_{01} & , & 0 & , & 1 & , & 0 \\ -(\omega_{02}-\omega_{01})-a_{x_1}(y_{02}-y_{01})+a_{y_1}(x_{02}-x_{01}), a_{y_2}-a_{y_1}, a_{x_2}-a_{x_1}, 1 \end{bmatrix}$$

joten

(2.27)

$$\bar{S}_{1,2}^{-1}(x_{02}, x_{01}, y_{02}, y_{01}, a_{x_2}, a_{x_1}, a_{y_2}, a_{y_1}, \omega_{02}, \omega_{01}) =$$

(2.28)

$$= \bar{S}_{2,1}(x_{01}, x_{02}, y_{01}, y_{02}, a_{x_1}, a_{x_2}, a_{y_1}, a_{y_2}, \omega_{01}, \omega_{02})$$

eli

$$\bar{S}_{1,2}^{-1} = \bar{S}_{2,1}$$

(2.29)

$$\|\bar{S}\| = 1.$$

Kummankaan koordinaatistoista O_1, A_1 ja O_2, A_2 ei tarvitse välttämättä olla paino-
piste- eikä leikkauskeskiökoordinaatisto.

Tarkastellaan vielä muodonmuutosvektoreiden \bar{v}_1 ja \bar{v}_2 riippuvuutta koordinaatistosta akseliltaan yhdensuuntaisissa koordinaatistoissa O_1, A_1 ja O_2, A_2 .

Oletetaan, että järjestelmässä O_1, A_1 muodonmuutosvektori on

$$\bar{v}_1 = (v_{z_1}', v_{x_1}'', -v_{y_1}'', -\theta'')^T \quad (2.30)$$

Akselin A_2 siirtymät x, y -tasossa v_{x_2} ja v_{y_2} voidaan esittää koordinaatistossa O_1, A_1 kaavojen 1.3 ja 1.4 perusteella:

$$v_{x_2} = u_{x_1}(a_{x_2}, a_{y_2}, z) = v_{x_1} - \theta(a_{y_2} - a_{y_1}) \quad (2.31)$$

$$v_{y_2} = u_{y_1}(a_{x_2}, a_{y_2}, z) = v_{y_1} + \theta(a_{x_2} - a_{x_1}) \quad (2.32)$$

Vastaavasti pitenemä v_{z_2} akselilla O_2 saadaan lausutuksi järjestelmässä O_1, A_1 kaavan 1.13 perusteella, samalla muistaen, että järjestelmissä voi olla myös erilainen ω_0 :

$$\begin{aligned} v_{z_2} &= u_{z_1}(x_{02}, y_{02}, z) + \theta'(\omega_1(x_{01}, y_{01}) - \omega_{01}) \\ &= v_{z_1} - v_{x_1}'(x_{02} - x_{01}) - v_{y_1}'(y_{02} - y_{01}) - \\ &\quad - \theta'(\Delta\omega_1 - \omega_{02} + \omega_{01}) \end{aligned} \quad (2.33)$$

Koska $d\omega = (x - a_x)dy - (y - a_y)dx$, niin

$$\begin{aligned} \Delta\omega_1 &= \omega_1(x_{02}, y_{02}) - \omega_1(x_{01}, y_{01}) = (x_{02} - a_{x_1})y_{02} - (y_{02} - a_{y_1})x_{02} - \\ &\quad - (x_{01} - a_{x_1})y_{01} + (y_{01} - a_{y_1})x_{01} \\ &= -a_{x_1}(y_{02} - y_{01}) + a_{y_1}(x_{02} - x_{01}) \end{aligned}$$

Tästä seuraa, että sektoriaalisten koordinaattien erotus akselilla 0 järjestelmissä O_1, A_1 ja O_2, A_2

$$\Delta\omega = -a_{x_1}(y_{02} - y_{01}) + a_{y_1}(x_{02} - x_{01}) - (\omega_{02} - \omega_{01}) \quad (2.34)$$

Vektoreiden \bar{v}_1 ja \bar{v}_2 välillä vallitsee siis yhtälö

$$\begin{Bmatrix} v'_{z_2} \\ v''_{x_2} \\ -v''_{y_2} \\ -\theta'' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, & -x_{02}+x_{01}, & y_{02}-y_{01}, & -\omega_{02}+\omega_{01}-a_{x_1}(y_{02}-y_{01})+a_{y_1}(x_{02}-x_{01}) \\ 0, & 1, & 0, & a_{y_2}-a_{y_1} \\ 0, & 0, & 1, & a_{x_2}-a_{x_1} \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v'_{z_1} \\ v''_{x_1} \\ -v''_{y_1} \\ -\theta'' \end{Bmatrix}$$

$$\text{eli } \bar{v}_2 = \bar{T}_{2,1} \bar{v}_1 \quad (2.35)$$

Huomataan, että

$$\bar{T}_{2,1} = (\bar{S}_{1,2}^{-1})^T = \bar{S}_{2,1}^T \quad (2.36)$$

$$\stackrel{=-1}{\bar{T}}_{2,1} = \begin{bmatrix} 1, & x_{02}-x_{01}, & -(y_{02}-y_{01}), & \omega_{02}-\omega_{01}+a_{x_2}(y_{02}-y_{01})-a_{y_2}(x_{02}-x_{01}) \\ 0, & 1, & 0, & -(a_{y_2}-a_{y_1}) \\ 0, & 0, & 1, & -(a_{x_2}-a_{x_1}) \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{bmatrix} = \stackrel{=T}{\bar{T}}_{1,2} = \stackrel{=T}{\bar{S}}_{1,2} \quad (2.37)$$

Muunnosmatriisien $\bar{\phi}$ (ϕ) ja \bar{S} ($\Delta x_0, \Delta y_0, \Delta a_x, \Delta a_y, \Delta \omega$) avulla sauvan muodonmuutokset ja jännitykset voidaan lausua mielivaltaisessa järjestelmässä O_n, A_n, ω_n painopiste-leikkauskeskiöjärjestelmän leikkaussuureiden ja muodonmuutosten avulla

$$\begin{Bmatrix} N \\ M_{yn} \\ M_{xn} \\ B_n \end{Bmatrix} = E \bar{S}_{no} \bar{\phi}_{no} \begin{bmatrix} A, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & I_{\eta 0}, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & I_{\xi 0}, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & I_{\omega 0} \end{bmatrix} \bar{\phi}_{no}^T \bar{S}_{no}^T \begin{Bmatrix} v'_{zn} \\ v''_{xn} \\ -v''_{yn} \\ -\theta'' \end{Bmatrix}$$

eli $\bar{Q}_n = E \bar{S}_{no} \bar{\phi}_{no} \bar{D}_o \bar{\phi}_{no}^T \bar{S}_{no}^T \bar{v}_n$, josta (2.38)

$$\begin{Bmatrix} v'_{zn} \\ v''_{xn} \\ -v''_{yn} \\ -\theta'' \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{matrix} =T \\ (S) \end{matrix}^{-1} \begin{matrix} =T \\ (\phi) \end{matrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{A}, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & \frac{1}{I_{\eta o}}, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & \frac{1}{I_{\xi o}}, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & \frac{1}{I_{\omega o}} \end{bmatrix} \begin{matrix} =-1 \\ =-1 \\ S_{no} \end{matrix} \begin{Bmatrix} N \\ M_{yn} \\ M_{xn} \\ B_n \end{Bmatrix} \quad (2.39)$$

Jännitykset saadaan sijoittamalla v'_{zn} , v''_{xn} , v''_{yn} ja θ'' kaavaan 1.15.

Osoittautuu, että koordinaatisto on edullista, mikäli mahdollista, valita siten, että pitenemä, taivutustila ja vääntötila ovat lineaarisesti riippumattomia toisistaan, ja niiden aiheuttamat jännitysjakautumat keskenään ortogonaalisia, eli

$$\begin{aligned} \iint_A \sigma_{z\text{taivutus}} \cdot \sigma_{z\text{vääntö}} dA &= 0 \\ \iint_A \sigma_{z\text{taivutus}} \cdot \sigma_{z\text{pitenemä}} dA &= 0 \\ \iint_A \sigma_{z\text{vääntö}} \cdot \sigma_{z\text{pitenemä}} dA &= 0 \end{aligned} \quad (2.40)$$

Sauvan vääntö- ja taivutustilat ovat lineaarisesti riippumattomia toisistaan, jos on olemassa sellainen sektoriaalinen napa, jonka suhteen lasketut taivutus- ja vääntöjännitysjakautumat ovat ortogonaalisia, ja mahdollisia poistettuja vapausasteita vastaavissa tuennoissa esiintyvien tukireaktioiden resultantti kulkee tämän sektoriaalisen navan kautta. Yhtälössä $\bar{Q} = E \bar{D} \bar{v}$ tämä ilmenee siten, että matriisissa \bar{D} sektoriaaliset keskipakoismomentit $I_{\omega x}$ ja $I_{\omega y}$ joko häviävät tai eivät esiinny jännitysten eivätkä muodonmuutosten lausekkeissa, koska vastaavat vektorin \bar{v} alkioit ovat nollia.

Tällaista sektorialista napaa sanotaan vääntönavaksi ja vääntönapojen uraa sauvan vääntöakseliksi. Vääntöakselilla on seuraavat ominaisuudet:

- 1) Kyseisen akselin kautta kuormitettaessa sauva taipuu vääntymättä, koska vääntökuorma $m(z) = 0$ ja momentit eivät ortogonaalisuudesta johtuen aiheuta Θ :aa.
- 2) Jos rakennetta kuormittaa ainoastaan kyseisen akselin ympäri kiertävä vääntökuorma $m(z)$, niin saman akselin taipumat $v_x \equiv 0$ ja $v_y \equiv 0$, $\Theta \neq 0$, joten sauva kiertyy kyseisen akselin ympäri.

Vääntöakselia voitaisiin nimittää, kuten venäjän kielessä, myös taipuma-akseliksi.

Vastaavasti sellaista pistettä, jota nollapisteenä käyttäen pitenemä ja taivutustila ovat lineaarisesti riippumattomia, voitaisiin nimittää tässä neutraalipisteeksi ja vastaavaa akselia pitenemäakseliksi tai neutraalipisteakseliksi. Pitenemäakselilla on seuraavat ominaisuudet:

- 1) Kun sauva kuormitetaan ainoastaan poikittaisin, vääntöakselin kautta kulkevin kuormin, niin pitenemäakselin pitenemä $u_z(z) \equiv v_z(z) \equiv 0$ koko sauvan pituudella.
- 2) Kun sauvaan vaikuttaa ainoastaan pitenemäakselille kohdistuvia, sauvan pituussuuntaisia kuormia, niin vääntöakselin taipumat $v_x(z) \equiv v_y(z) \equiv 0$ koko sauvan pituudella.

Vääntö- ja normaalivoima voidaan tarvittaessa ortogonalisoida valitsemalla vakio ω_0 .

LEIKKAUSJÄNNITYKSET JA TASAPAINOEHDOT

Koska olettamuksemme mukaan $\tau_{zr} \equiv 0$, koko profiilin alueessa, niin tasapainon differentiaaliyhtälöt profiilin tilavuusalkiolle koordinaatistossa z, s, r saavat (paloittain suorista osista koostuvalle profiilille) muodon

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zs}}{\partial s} = -f_z \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \tau_{zs}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_s}{\partial s} + \frac{\partial \tau_{sr}}{\partial r} = -f_s \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial \tau_{sr}}{\partial s} + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = -f_r \quad (3.3)$$

f_z , f_s ja f_r ovat tilavuuskuormia.

Koska oletuksen 3) mukaan $\tau_{zr} \equiv 0$ koko profiilin alueessa, niin profiilin pintaan kohdistuvat z-suuntaiset leikkauskuormat esiintyvät kaavoissa seinämän paksuudelle tasan jakautuneina tilavuuskuormina.

Koska oletuksemme 1) mukaan poikkileikkaus ei vääristy, esiintyvät σ_s , σ_r ja τ_{sr} tässä yhtälöryhmässä tällä kertaa tukireaktion luonteisina jännityksinä, joilla emme oleta olevan vaikutusta suureisiin σ_z ja τ_{zs} , emmekä muodonmuutoksiin. Meitä kiinnostaa tässä tapauksessa vain yhtälö 3.1.

Leikkausjännitykselle τ_{zs} saadaan kaavasta (3.1) lauseke

$$\tau_{zs} = -\int_{s_0}^s \left(\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z \right) ds \quad (3.4)$$

Leikkausjännitykset aiheuttavat leikkausvoimat Q_x ja Q_y .

$$\begin{aligned} Q_y &= \iint_A \tau_{zs} \cos(s, y) dA = \iint_A \tau_{zs} \frac{dy}{ds} dA = \left| \int_{s_1 - \frac{t(s)}{2}}^{s_2 - \frac{t(s)}{2}} \tau_{zs} (y - y_0) dr \right| - \iint_A \frac{\partial \tau_{zs}}{\partial s} (y - y_0) dA \\ &= q_2(y_2 - y_0) - q_1(y_1 - y_0) + \iint_A \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} (y - y_0) dA + \iint_A f_z (y - y_0) dA, \end{aligned}$$

joka (2.1.3):a soveltaen

$$= M_x' + q_2(y_2 - y_0) - q_1(y_1 - y_0) + \int_{s_1}^{s_2} p_z (y - y_0) ds, \quad p_z(s, z) = \int f_z dr - \frac{t(s)}{2} \quad (3.5)$$

Tästä seuraa kaava

$$M_x' = Q_y - [q_2(y_2 - y_0) - q_1(y_1 - y_0)] - \int_{s_1}^{s_2} p_z (y - y_0) ds \quad (3.6)$$

Vastaavalla tavalla saadaan

$$M'_y = -Q_x + [q_2(x_2 - x_0) - q_1(x_1 - x_0)] + \int_{s_1}^{s_2} p_z(x - x_0) ds \quad (3.7)$$

Leikkausvoimien momentti saadaan kaavasta

$$\begin{aligned} M_{zS} &= \iint_A \tau_{zS} h_S dA = \iint_A \tau_{zS} \frac{\partial \omega}{\partial S} dA = \left| \int_{s_1 - \frac{t(s)}{2}}^{s_2 - \frac{t(s)}{2}} \tau_{zS} (\omega - \omega_0) dr - \iint_A \frac{\partial \tau_{zS}}{\partial S} (\omega - \omega_0) dA \right. \\ &= q_2(\omega_2 - \omega_0) - q_1(\omega_1 - \omega_0) + \iint_A \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} (\omega - \omega_0) dA + \iint_A f_z (\omega - \omega_0) dA \end{aligned}$$

joka (2.1.4):ää soveltaen

$$= q_2(\omega_2 - \omega_0) - q_1(\omega_1 - \omega_0) + B' + \int_{s_1}^{s_2} p_z(\omega - \omega_0) ds, \quad (3.8)$$

josta seuraa

$$B' = M_{zS} - [q_2(\omega_2 - \omega_0) - q_1(\omega_1 - \omega_0)] - \int_{s_1}^{s_2} p_z(\omega - \omega_0) ds \quad (3.9)$$

Leikkausvoimat Q_x ja Q_y ovat riippumattomia nollapisteen ja sektoriaalisen navan valinnasta. Differentiaaliolkion dz tasapainoehdoista saadaan

$$Q'_x = -q_x \quad (3.10)$$

$$Q'_y = -q_y, \quad (3.11)$$

joissa q_x ja q_y yleisessä tapauksessa merkitsevät ulkoisten kuormien ja tukireaktioiden summaa.

Sen sijaan M'_x ja M'_y riippuvat origon valinnasta, ja ne voidaan laskea suoraan kuormituksesta ainoastaan sellaisessa suunnassa, jossa momentin aiheuttava viiva-kuorma (kaavat 3.10 ja 3.11) muodostuu ainoastaan ulkoisista kuormista.

Näin ollen kaavat (3.6), (3.7), (3.10) ja (3.11) ovat voimassa samanaikaisesti

- a) koordinaatistossa, jossa nollapiste (x_0, y_0) sijaitsee pitenemäkselillä (tai -tasolla) sellaisessa suunnassa, jossa kuormat q_1 , q_2 , p_z ja q_x tai q_y muodostuvat ainoastaan ulkoisista kuormista
- b) koordinaatistossa, jossa nollapiste sijaitsee painopisteessä, kun em. kuormat merkitsevät ulkoisten kuormien ja sauvan pituudella vaikuttavien tukireaktioiden summia.

Leikkausvoimien momentti M_{zS} riippuu sektorიალის ნავის valinnasta, B' sen lisäksi nollapisteen ja ω_0 :n valinnasta.

Jos sektorიალის ნაპი sijaitsee vääntöakselilla, niin ulkoisten kuormien momentti

$$M_z = -\int m(z)dz = M_{zS} + \tilde{M}_z, \text{ jossa} \quad (3.12)$$

$$\tilde{M}_z = GI_v \theta' \quad (3.13)$$

on profiilin seinämän keskiviivan suhteen antimetristen leikkausjännitysten momentti. Tästä saadaan

$$M'_{zS} + GI_v \theta' = -m(z), \text{ jossa} \quad (3.14)$$

$m(z)$ on ulkoisten voimien vääntökuorma vääntöakselin ympäri. Tällöin myös nollapisteen tulee sijaita pitenemäkselillä ja kuormien q_1 , q_2 ja p_z olla ulkoisia kuormia.

Jos taas nollapiste on painopisteakselilla, sektorიალის ნაპი leikkausakselilla ja $\omega_0 = \frac{S}{A} \omega = 0$, niin em. kaavat ovat voimassa siten, että kuormat ovat ulkoisten kuormien ja sauvan pituudelle jakautuvien tukireaktioiden summia ja $m(z)$ on näiden kuormien ja tukireaktioiden vääntökuorma leikkausakselin ympäri.

Jos pitenemäkselin pitenemä on vapaa, niin

$$N' = q_1 - q_2 - \int_{s_1}^{s_2} p_z ds. \quad (3.15)$$

Ohjatun väännön teoria pätee silloin, jos on olemassa määritelmän edellytykset täyttävät pitenemäkseli ja vääntöakseli. Voidaan helposti konstruoida yksinkertaisiakin tuentoja, joissa jompaa kumpaa ei ole olemassa. Tällöin tässä esitetty teoria ei päde. Usein myös jompikumpi akseleista on epämääräinen, toisin sanoen rakenne esimerkiksi taipuu vääntymättä minkä tahansa akselin kautta kuormitettaessa, tai vääntöakseli ei taipu z-suuntaisista kuormista. Tällöin voidaan yleensä nollapiste tai sektorიაალinen napa sijoittaa mihin tahansa vaaditut edellytykset täyttävään pisteeseen, ja laskut johtavat samaan jännitysjakautumaan.

Periaatteena siis on, että sauvan muodonmuutosten yhtälöt asetetaan neutraalipiste-vääntönapakoordinaatistossa, jossa ratkaistut leikkaussuureet ja muodonmuutokset on usein vielä muunnettava painopiste-leikkauskeskiöjärjestelmään tukireaktioiden laskemiseksi.

SAUVAT, JOIDEN TUENTA EI OTA VASTAAN Z-SUUNTAISIA LEIKKAUSVOIMIA JA JOIDEN MAHDOLLISET Z-SUUNTAISET KUORMAT VOIDAAN KATSOA KOHDISTUVAN TUTKITTAVAN ALUEEN PÄIHIN

Rajataan nyt tarkastelu koskemaan yksinomaan otsikossa mainitun tyyppisiä sauvoja, joita useimmat palkki-, orsi- ym. sauvarakenteet ovat. Niille on ominaista, että normaalivoima on taivutus- ja vääntömomenteista riippumaton, jolloin nollapiste x_0, y_0 kannattaa aina sijoittaa profiilin painopisteeseen. Edellä esitetty yleinen teoria yksinkertaistuu merkittävästi:

- Yhtälöryhmässä 2.2 matriisin \bar{D} alkiot $S_x \equiv S_y \equiv 0$ (painopisteorigo). (4.1)

- Yhtälöryhmässä 2.2 matriisin \bar{D} alkiot $S_\omega = 0$, (4.2)

koska normaalivoima ja bimomentti ovat ortogonaalisia,
koska tuenta ei ota vastaan z-leikkausvoimia.

- Samasta syystä eri sektorიაალisille koordinaateille $\omega_{02} - \omega_{01} \equiv 0$. (4.3)

- Kaavat 2.23 - 2.25 menevät muotoon

$$\bar{N}_2 = \bar{N}_1 \quad (4.4.1)$$

$$\bar{M}_2 = \bar{M}_1 \quad (4.4.2)$$

$$B_2 = B_1 - (\bar{a}_2 - \bar{a}_1) \cdot \bar{M}_1 \quad (4.4.3)$$

- Koordinaattijärjestelmien välinen muunnosmatriisi

$$\bar{S} = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & -(a_{y_2} - a_{y_1}), & -(a_{x_2} - a_{x_1}), & 1 \end{bmatrix} \quad (4.5.1)$$

$$\bar{S}^{-1} = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & a_{y_2} - a_{y_1}, & a_{x_2} - a_{x_1}, & 1 \end{bmatrix} \quad (4.5.2)$$

Kaavat 3.6 - 3.15 menevät muotoon:

$$N' = 0 \quad 4.6.1, \quad \text{josta} \quad N'' = 0 \quad (4.7.1)$$

$$M'_x = Q_y \quad 4.6.2, \quad \text{josta} \quad M''_x = Q'_y = -q_y \quad (4.7.2)$$

$$M'_y = -Q_x \quad 4.6.3, \quad \text{josta} \quad M''_y = -Q'_x = q_x \quad (4.7.3)$$

$$B' = M'_{zS} \quad 4.6.4, \quad \text{josta} \quad B'' = M'_{zS} \quad (4.7.4)$$

Jos M'_{zS} on laskettu vääntöakselin suhteen, niin

$$M'_{zS} = -m(z) - GI_V \theta'' \quad (4.7.5)$$

Suure $m(z)$ kaavassa 4.7.5 on viivakuormaresultantin momentti vääntöakselin ympäri.

Peruskaavat 2.38 voidaan nyt, ottaen huomioon kaavat 2.6, kirjoittaa muotoon

$$\begin{Bmatrix} N \\ M_y \\ M_x \\ B_1 \end{Bmatrix} = E \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & -(a_{y_1} - a_{y_0}), & -(a_{x_1} - a_{x_0}), & 1 \end{bmatrix} \cdot$$

$$\begin{bmatrix} A, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & I_y, & -I_{xy}, & 0 \\ 0, & -I_{xy}, & I_x, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & I_{\omega_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & -(a_{y_1} - a_{y_0}) \\ 0, & 0, & 1, & -(a_{x_1} - a_{x_0}) \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v'_z \\ v''_{x_1} \\ -v''_{y_1} \\ -\theta'' \end{Bmatrix}$$

$$= E \begin{bmatrix} A, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & I_y, & -I_{xy}, & I_{\omega y_1} \\ 0, & -I_{xy}, & I_x, & I_{\omega x_1} \\ 0, & I_{\omega y_1}, & I_{\omega x_1}, & I_{\omega_1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v'_z \\ v''_{x_1} \\ -v''_{y_1} \\ -\theta'' \end{Bmatrix} \quad (4.8)$$

Tässä kaavassa mielivaltaisen sektoriaalisen navan (a_{x_1}, a_{y_1}) suhteen lasketuille sektoriaalisille neliömomenteille I_{ω_1} ja sektoriaalisille keskipakoismomenteille $I_{\omega x_1}$ ja $I_{\omega y_1}$ saadaan matriisitulosta seuraavat suljetut lausekkeet koordinaattien a_{x_1}, a_{y_1} , leikkauskeskiön koordinaattien a_{x_0} ja a_{y_0} sekä leikkauskeskiön suhteen lasketun sektoriaalisen neliömomentin I_{ω_0} funktioina

$$I_{\omega x_1} = (a_{y_1} - a_{y_0})I_{xy} - (a_{x_1} - a_{x_0})I_x \quad (4.9.1)$$

$$I_{\omega y_1} = (a_{x_1} - a_{x_0})I_{xy} - (a_{y_1} - a_{y_0})I_y \quad (4.9.2)$$

$$\begin{aligned}
 I_{\omega_1} &= I_{\omega_0} + (a_{x_1} - a_{x_0})^2 I_x + (a_{y_1} - a_{y_0})^2 I_y \\
 &\quad - 2(a_{x_1} - a_{x_0})(a_{y_1} - a_{y_0})I_{xy}
 \end{aligned} \quad (4.9.3)$$

Yhtälö 4.8 voidaan esittää myös käänteisessä muodossa

$$\bar{v}_1 = \begin{Bmatrix} v_z' \\ v_{x_1}'' \\ -v_{y_1}'' \\ -\theta'' \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & a_{y_1} - a_{y_0} \\ 0, & 0, & 1, & a_{x_1} - a_{x_0} \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{A}, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & \frac{I_x}{I_x I_y - I_{xy}^2}, & \frac{I_{xy}}{I_x I_y - I_{xy}^2}, & 0 \\ 0, & \frac{I_{xy}}{I_x I_y - I_{xy}^2}, & \frac{I_y}{I_x I_y - I_{xy}^2}, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & \frac{1}{I_\omega} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & a_{y_1} - a_{y_0}, & a_{x_1} - a_{x_0}, & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N \\ M_x \\ M_y \\ B_1 \end{Bmatrix} \quad (4.10)$$

josta vektorin \bar{v}_1 alkiot voidaan tietenkin laskea myös suljetussa muodossa.

Yhtälöissä 4.8 ja 4.10 voivat olla tuntemattomina aivan yhtä hyvin leikkaussuureet N , M_x , M_y , ja B_1 kuin muodonmuutokset v_z' ja v_{x_1}'' , v_{y_1}'' ja θ'' . Tapausta, jossa rakenne saa pakkosiirtymiä, emme tällä kertaa käsittele, vaan muodonmuutokset v_{x_1}'' , v_{y_1}'' ja θ'' ovat joko vapaita tai ne on tuettu siirtymättömiksi. Sen perusteella, mitkä vapausasteet sauvalla sivusuunnassa on, voidaan erottaa ainakin kuusi tapausta, joita seuraava luku käsittelee.

On vielä muistutettava siitä, että siirtymät v_{x_1}'' ja v_{y_1}'' ovat kaavojen 1.3 ja 1.4 mukaan nimenomaan valitun sektoriaalisen navan, eivät siis välttämättä leikkauskeskiön, muodonmuutoksia.

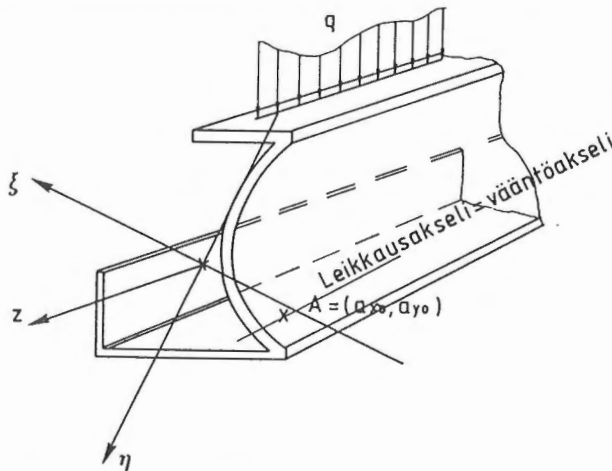
Lähteessä /3/ on todistettu, että väännöttömässä taivutuksessa tämän kohdan 4) mukaisilla sauvoilla leikkausvoimien resultantti kulkee aina leikkauskeskiön kautta. Voidaan osoittaa myös, että väännöttömässä taivutuksessa tämän luvun mukaisilla sauvoilla leikkausvoimien resultantti kulkee aina myös vääntöakselin

kautta. Jos siis vääntöakseli ja leikkausakseli ovat eri paikassa, niin joko väännöttömässä taivutustilassa leikkausvoimien resultantti suuntautuu vääntönä vasta leikkausnapaan tai väännötön taivutus ei ole mahdollinen. Tästä seuraa kaavan 4.7.5 ehto.

POIKKILEIKKAUKSELTAAN VÄÄRISTYMÄTTÖMÄN, POIKITTAISSUUNNASSA ERI TAVOIN TUETUN SAUVAN PERUSTAPAUKSIA

Seuraavassa esityksessä sellaiset voimasuureet jotka ovat tuntemattomia, ts. niitä ei voida laskea suoraan kuormituksesta, on merkitty yläindeksillä kysymysmerkki (?). Sellaiset siirtymät puolestaan, jotka ovat tunnettuja, ts. annetaan lähtötietona, ovat näissä esimerkeissä aina nollan suuruisina. Sellaiset leikkaussuureet, muodonmuutokset ja poikkileikkausarvot, jotka poikkeavat painopiste-leikkauskeskiöjärjestelmän vastaavista suureista, on merkitty alaindeksillä yksi (1).

Tapaus 1. Vapaasti deformoituva sauva, kolme vapausastetta



Kuva 4. Vapaasti deformoituva sauva.

Kuormitus q on edullisinta jakaa pääakselien suuntaisiin komponentteihin, joiden kuvitellaan vaikuttavan leikkausakselilla, joka tunnetusti on tässä tapauksessa myös vääntöakseli, sekä vääntökuorman m , joka on suuruudeltaan $q \times a$, jossa a on kuormitusresultantin lyhin etäisyys leikkausakselista kussakin poikkileikkauksessa.

Matriisi \bar{D} (kaavat 2.2) on tällöin diagonaalinen, ja jännitykset saadaan siis kaavasta

$$\sigma_z = \frac{N}{A} - \frac{M_\eta \cdot \xi}{I_\eta} + \frac{M_\xi \cdot \eta}{I_\xi} + \frac{B \omega}{I_\omega} \quad (5.1.1)$$

$$M_\eta'' = q_\xi \quad (5.1.2)$$

$$M_\xi'' = -q_\eta \quad (5.1.3)$$

$$EI_\omega \theta^{(4)} - GI_V \theta'' = m, \text{ jossa} \quad (5.1.4)$$

$$B = -EI_\omega \theta'', \text{ josta seuraa} \quad (5.1.5)$$

$$B'' - k^2 B = -m, \quad k^2 = \frac{GI_V}{EI_\omega} \quad (5.1.6)$$

Mikäli rakenteessa on vääntöä vastustava jousituenta, kuten esim. katto-orteen kiinnitetty profiilipeltikate, saa väännön differentiaaliyhtälö muodon

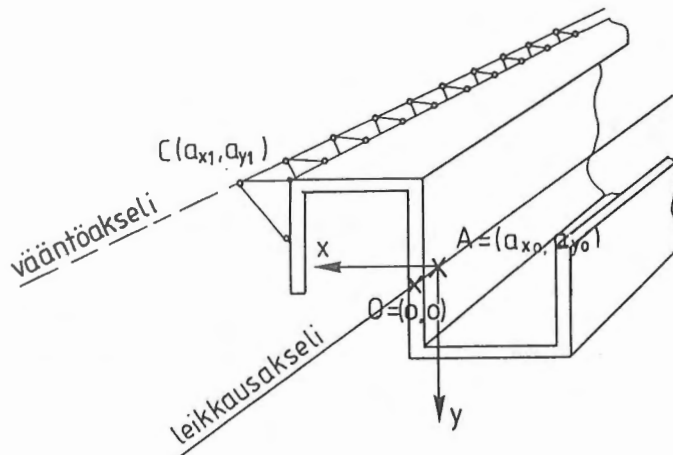
$$EI_\omega \theta^{(4)} - GI_V \theta'' + k_\theta^2 \theta = m, \text{ jossa } k_\theta^2 \text{ on jousivakio.} \quad (5.1.7)$$

Myös tällöin

$$B = -EI_\omega \theta''. \quad (5.1.8)$$

Jos taas rakenteeseen liittyy taipumaa vastustava jousituenta, voidaan sauva laskea kimmoisella alustana olevana palkkina ainoastaan silloin, jos jouset kiinnittyvät profiiliin leikkausakselin kohdalla ja vääntökuorma $m \equiv 0$. Muussa tapauksessa analyysi johtaa monimutkaisiin yhtälöryhmiin.

Tapaus 2. Sauva on tuettu pituussuuntaisella, pituussuuntaisia leikkausvoimia vastaanottamattomalla nivelellä jäykkään alustaan, yksi vapausaste



Kuva 5. Yhden poikittaisen vapausasteen ohjattu vääntö.

Vääntöakseli on nyt annettu, koska ainoa liikemahdollisuus on kiertyminen akselin C ympäri. Kun nyt sektorიაალinen napa sijoitetaan kiinnitykselille C, jonka etäisyydet leikkausakselista A valitussa koordinaatistossa ovat $a_{x_1} - a_{x_0}$ ja $a_{y_1} - a_{y_0}$, menee kaava 4.8 muotoon

$$\begin{pmatrix} N \\ M_x^? \\ M_y^? \\ B_1 \end{pmatrix} = E \begin{bmatrix} A, & 0 & , & 0 & , & 0 \\ 0, & I_y & , & -I_{xy} & , & I_{\omega} y_1 \\ 0, & -I_{xy} & , & I_x & , & I_{\omega} x_1 \\ 0, & I_{\omega} y_1, & I_{\omega} x_1, & I_{\omega_1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_z^? \\ 0 \\ 0 \\ -\theta'' \end{pmatrix} \quad (5.2.1)$$

(Yläindeksi kysymysmerkki merkitsee sitä, että kyseisiä voimasuureita ei voida laskea suoraan kuormituksesta.)

Suureilla $I_{\omega x_1}$, $I_{\omega y_1}$ ja I_{ω_1} on kaavojen 4.9.1 - 4.9.3 mukaiset arvot. Tällöin saadaan kaavat

$$N = EA v_z^? , \text{ josta } v_z^? = \frac{N}{EA} \quad (5.2.2)$$

$$M_x^? = -EI_{\omega y_1} \cdot \theta'' \quad (5.2.3)$$

$$M_y^? = -EI_{\omega x_1} \cdot \theta'' \quad (5.2.4)$$

$$B_1 = -EI_{\omega_1} \cdot \theta'', \text{ josta } \theta'' = -\frac{B_1}{EI_{\omega_1}} \quad (5.2.5)$$

Koska toisaalta kaavan 4.7.4 mukaan $B_1'' = -m + GI_V \theta''$ saadaan tässä tapauksessa väännön differentiaaliyhtälöksi, kun m_C on kuormitusresultantti kertaa sen etäisyys vääntöakselista C

$$EI_{\omega_1} \theta^{(4)} - GI_V \theta'' = m_C, \text{ eli } B_1'' - k_1^2 B_1 = -m_C. \quad (5.2.6)$$

Kun nyt $v_z' = \frac{N}{EA}$, $v_{x_1}'' = 0$, $v_{y_1}'' = 0$ ja $\theta'' = -\frac{B_1}{EI_{\omega_1}}$ sijoitetaan normaalijännitysten lausekkeeseen 1.15

$$\sigma_z = E [v_z' - v_{x_1}''(x - x_0) - v_{y_1}''(y - y_0) - \theta'' \omega_1], \text{ jossa}$$

ω_1 on sektoriallinen koordinaatti akselin C suhteen, saadaan jännitysten kaavaksi

$$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{B_1 \omega_1}{I_{\omega_1}}, \quad (5.2.7)$$

joten jännitykset määräytyvät ainoastaan normaalivoimasta ja bimomentista akselin C suhteen.

Koordinaattiakseleiden x ja y suunnassa väännöstä johtuen vaikuttavat tukireaktiot nivelessä C saadaan nyt derivoimalla momenteista $M_x^?$ ja $M_y^?$, koska nollapiste on painopisteessä (pitenemäakseli on epämääräinen, koska vääntöakseli ei taivu)

$$q_x^* = -M_y^{?''} = EI_{\omega x_1} \cdot \theta^{(4)} \quad (5.2.8)$$

$$q_y^* = M_x^{?''} = -EI_{\omega y_1} \cdot \theta^{(4)} \quad (5.2.9)$$

Kokonaistukireaktiot saadaan lisäämällä nämä suoraan kuormituksesta seuraaviin tukireaktioihin.

Koska koordinaattiakselien suunnat eivät vaikuta suureisiin N , B_1 , ω_1 , A , I_{ω_1} , voidaan koordinaatisto asettaa profiilin painopisteeseen esim. seuraavilla tavoilla

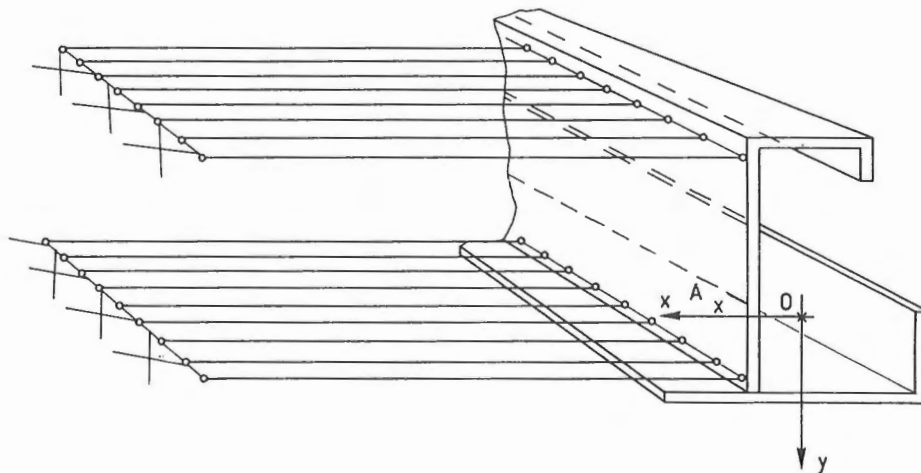
- profiilin pääkselien suuntaiseksi, koska tällöin kaavat 4.9.1 - 4.9.3 saavat yksinkertaisimman muodon
- suuntaan, jossa profiilin poikkileikkausarvot on helpointa laskea
- vääntöakselin ja leikkausakselin välisen janan suuntaiseksi toiselta akseliltään, koska tätä suuntaa vastaan kohtisuorassa suunnassa esiintyy ilmeisesti nivelen leikkausvoiman q maksimi.

Jos nivelessä on jousituenta, saadaan väännön differentiaaliyhtälöksi

$$EI_{\omega_1} \theta^{(4)} - GI_V \theta'' + k_{\theta}^2 \theta = m_c.$$

Yhden vapausasteen ohjatun väännön alainen profiili voidaan aina ajatella sellaisen antimetrisen, pelkällä vääntökuormalla kuormitetun vapaasti vääntyvän profiilin puolikkaaksi, jonka antimetria-akseli on kiinnityspisteessä.

Tapaus 3. Pitkin pendelein tasossa taipumaan tuettu sauva, yksi vapausaste



Kuva 6. "Ohjattu taivutus": x- ja y-akselit käyttäytyvät pääakselien tavoin.

Painopistekoordinaatisto kannattaa nyt suunnata kuvan osoittamalla tavalla, jossa toinen akseli on pendeleiden suuntainen. Vääntöakseli on nyt epämääräinen, koska profiili taipuu aina vääntymättä, joten sektoriaalinen napa sijoitetaan leikkauskeskiöön. Taso $y = 0$ on neutraalitaso. Kaavat 4.8 saavat nyt entisiä merkintöjä käyttäen muodon

$$\begin{Bmatrix} N \\ M_y^? \\ M_x \\ B^? \end{Bmatrix} = E \begin{bmatrix} A, & 0 & , & 0 & , & 0 \\ 0, & I_y & , & -I_{xy} & , & 0 \\ 0, & -I_{xy} & , & I_x & , & 0 \\ 0, & 0 & , & 0 & , & I_\omega \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_z' \\ 0 \\ -v_y'' \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.3.1)$$

josta

$$N = EAv_z' \quad , \quad v_z' = \frac{N}{EA} \quad (5.3.2)$$

$$M_y^? = EI_{xy}v_y'' \quad , \quad (v_x'' = 0) \quad (5.3.3)$$

$$M_x = -EI_xv_y'' \quad , \quad v_y'' = -\frac{M_x}{EI_x} \quad (5.3.4)$$

$$B^? = 0 \quad , \quad (\theta'' = 0) \quad (5.3.5)$$

Pendelivoimat saadaan tasapainoehdoista, kun

$$q_x^* = M_y^{?''} = EI_{xy}v_y^{(4)} \quad \text{ja}$$

$$m = EI_\omega \theta^{(4)} - GI_V \theta'' \equiv 0.$$

Jännitykset saadaan sijoittamalla v_z' , v_x'' , v_y'' ja θ'' kaavaan 1.15

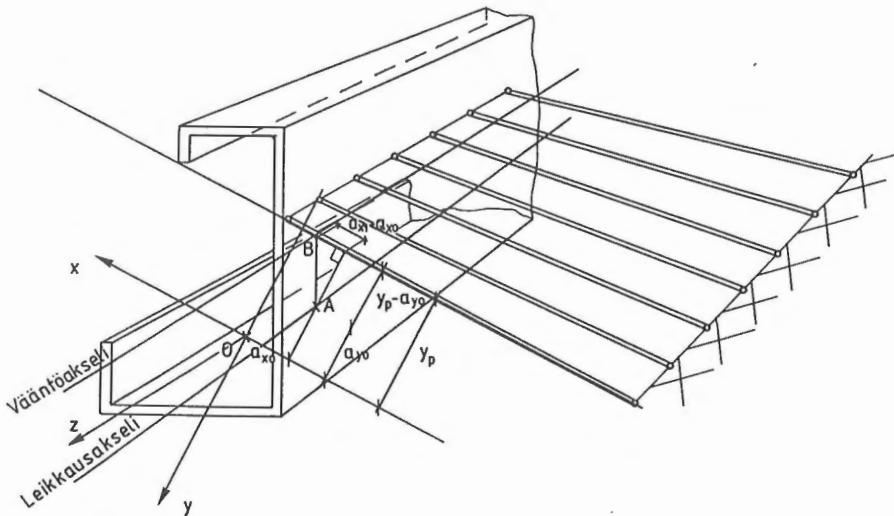
$$\sigma_z = E(v_z' - v_x''(x - x_0) - v_y''(y - y_0) - \theta''\omega) = E\left(\frac{N}{EA} + \frac{M_{x,y}}{EI_x}\right)$$

$$= \frac{N}{A} + \frac{M_{x,y}}{I_x}.$$

Jännitykset voidaan siis laskea samoin kuin jos pendelitasojen suuntaiset akselit olisivat pääakselit ja rasituksena olisi ainoastaan momentti M_x .

Momenttivektori ei tietenkään ole pendelitasojen suuntainen. Jos asetetaan molemmat momentit M_x ja M_y vaikuttamaan kuten vapaasti deformoituvalla sauvalla, on momenttivektori muunnettava pääakselikoordinaatistoon ja jännitykset laskettava tämän jälkeen kaavoista 5.1.1. Päädytään samaan lopputulokseen jännitysjakautumassa.

Tapaus 4. Yhdellä pendelitasolla tuettu sauva, kaksi vapausastetta



Kuva 7. Ns. kahden vapausasteen ohjattu vääntö.

Tässä tapauksessa painopisteeseen sijoitettu koordinaatisto kannattaa suunnata siten, että x -akseli on pendelitason suuntainen, jolloin jokaisella sellaisella sektoriaalilla navalla, joka sijaitsee pendelitasolla, $v_{x_1} = v'_{x_1} = v''_{x_1} = 0$. Tällöin navan etäisyys y -suunnassa leikkauskeskiöstä

$$a_{y_1} - a_{y_0} = y_p - a_{y_0} \quad (5.4.1)$$

$$(5.4.2)$$

Kaavat 4.8 menevät nyt muotoon, kun sektoriaalisen navan tuntematonta x-koordinaattia merkitään kirjaimella a_{x_1}

$$\begin{pmatrix} N \\ M_y^? \\ M_x \\ B_1 \end{pmatrix} = E \begin{bmatrix} A, & 0 & , & 0 & , & 0 \\ 0, & I_y & , & -I_{xy} & , & I_{\omega y_1} \\ 0, & -I_{xy} & , & I_x & , & I_{\omega x_1} \\ 0, & I_{\omega y_1} & , & I_{\omega x_1} & , & I_{\omega_1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v'_z \\ 0 \\ -v''_{y_1} \\ -\theta'' \end{pmatrix} \quad (5.4.3)$$

Tällöin

$$N = EA v'_{z_1} \quad (5.4.4)$$

$$M_y^? = EI_{xy} v''_{y_1} - EI_{\omega y_1} \theta'' \quad (5.4.5)$$

$$M_x = -EI_x v''_{y_1} - EI_{\omega x_1} \theta'' \quad (5.4.6)$$

$$B_1 = -EI_{\omega x_1} v''_{y_1} - EI_{\omega_1} \theta'' \quad (5.4.7)$$

Momenttiin M_x pätee nyt yhtälö $M_x'' = -q_y$, jossa q_y muodostuu ulkoisista kuormista, koska pendeliä vastaan kohtisuoria sauvan pituudelle jakautuvia tukireaktioita ei ole. Herää kysymys: Onko olemassa sellainen sektoriaalinen napa, jonka kautta kulkiessaan kuorma q_y ei aiheuta lainkaan vääntöä? Onko olemassa sellainen piste, joka pysyy paikallaan, kun ortta väännetään pendelitason suuntaisella voimalla q_0 , jonka etäisyys pendelitasosta on y_0 , eli siis $q_y = 0$ ja vääntökuorma $m = q_0 \cdot y_0$? Selväinen piste on olemassa.

Tarkastelemalla yhtälöitä 5.4.6 ja 5.4.7 huomataan, että mikäli sektoriaalinen keskipakoismomentti

$$I_{\omega x_1} = (a_{y_1} - a_{y_0}) I_{xy} - (a_{x_1} - a_{x_0}) I_x \quad (5.4.8)$$

$$= (y_p - a_{y_0}) I_{xy} - (a_{x_1} - a_{x_0}) I_x = 0, \text{ joka}$$

toteutuu, kun

$$\boxed{a_{x_1} - a_{x_0} = \frac{I_{xy}}{I_x} \cdot (y_p - a_{y_0})}, \text{ eli } a_{x_1} = a_{x_0} + \frac{I_{xy}}{I_x} (y_p - a_{y_0}) \quad (5.4.9)$$

niin kaavat 5.4.5 - 5.4.7 saavat muodon

$$M_y^? = EI_{xy} v''_{y_1} - EI_{\omega} y_1 \theta'' \quad (5.4.10)$$

$$M_x = -EI_x v''_{y_1}, \quad \text{josta} \quad v''_{y_1} = -\frac{M_x}{EI_x} \quad (5.4.11)$$

$$B_1 = -EI_{\omega} \theta'', \quad \text{josta} \quad \theta'' = -\frac{B_1}{EI_{\omega_1}} \quad (5.4.12)$$

Tästä havaitaan, että jos y -suuntainen kuorma q_y on nolla, niin piste (a_{x_1}, y_p) koordinaatistossa, jonka x -akseli on pendelin suuntainen pysyy paikallaan sauvan kiertyessä, joten sauva kiertyy tämän pisteen ympäri. Jos taas y -suuntainen kuorma kohdistuu tähän pisteeseen, niin taipuma ei aiheuta bimomenttijännityksiä eli taivutus ja vääntö ovat ortogonaalisia järjestelmässä, jonka nollapisteen koordinaatit ovat painopiste $x_0 = 0, y_0 = 0$ ja sektoriaalinen napa on (a_{x_1}, y_p) . Mielivaltaisen viivakuorman, jonka vaikutusviiva kulkee vääntöakselin kautta, x -suuntainen komponentti siirtyy pendelin kuormaksi.

Vääntökuorma lasketaan tämän navan ympäri, ja näiden napojen ura on sauvan vääntöakseli. Näin ollen

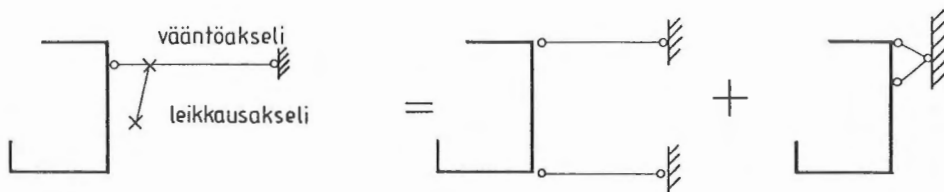
$$EI_{\omega_1} \theta^{(4)} - GI_V \theta'' = m_B, \quad \text{eli } B_1'' - k_1^2 B_1 = -m_B, \quad (5.4.13)$$

jossa vääntökuorma m_B lasketaan pisteen B ympäri.

Jännitykset saadaan sijoittamalla kaavaan 1.15

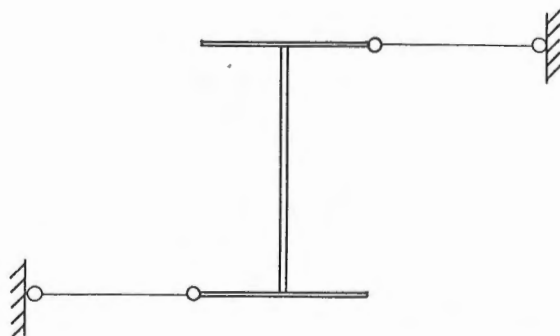
$$\begin{aligned} \sigma_z &= E \left(\frac{N}{EA} + \frac{M_x y}{EI_x} + \frac{B_1 \omega_1}{EI_{\omega_1}} \right) \\ &= \frac{N}{A} + \frac{M_x y}{I_x} + \frac{B_1 \omega_1}{I_{\omega_1}} \end{aligned} \quad (5.4.14)$$

Tapauksen 4) mukainen rakenne on siis tapauksien 2) ja 3) superpositio, kun tapauksen 2) kiinnitysakseliksi otetaan tapauksen 4) mukainen vääntöakseli.



Kuva 8. Kahden vapausasteen systeemi jaetaan kahdeksi yhden vapausasteen systeemiksi. Taso $y = 0$ on neutraalitaso.

Tapaus 5. Lyhyin pendelein kuvan 11 mukaan tuettu sauva, 1 (vajaa) vapausaste



Kuva 9. Tämä on esimerkki rakenteesta, jonka liikemahdollisuutta ei voida pelkistää toisistaan lineaarisesti riippumattomiksi vääntö- ja taivutus-tilaksi. Jos sauvaa taivutetaan, se välttämättä myös vääntyy ja päinvastoin. Vääntöakselia ei siis ole olemassa tälle tapaukselle.

LÄHDELUETTELO

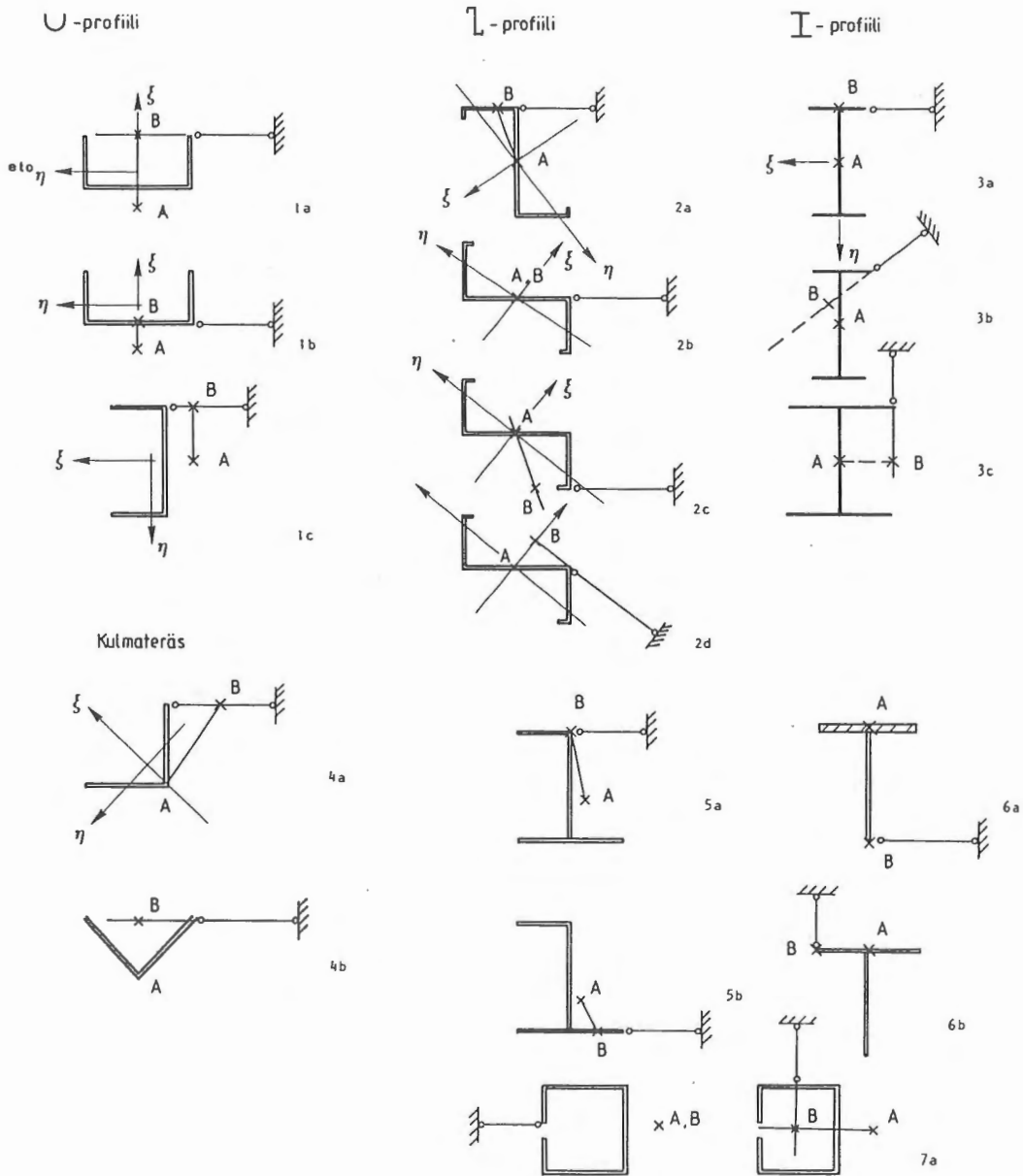
- /1/ Vlasov, V.Z., Tonkostennye uprugie steržni, Moskova 1959.
- /2/ Parland, H., Luennot, Tampereen teknillinen korkeakoulu, Rakennustekniikan osasto, Rakennusstatiikka.
- /3/ Parland, H., Rakenteiden vääntö, Tampereen teknillinen korkeakoulu, Rakennetekniikan laitos, 1972.

- /4/ Parland, H., Mikkola, M., Heinisuo, M., Ylinen, K., Poimu- ja kotelorakenteiden levy- ja laattatila osat 1 ja 2, Tampereen teknillinen korkeakoulu, Rakennustekniikan osasto, Rakennusstatikka, 1978.
- /5/ Heinisuo, M., Likimääräisteoria eräiden avoikkileikkauksisten sauvojen laattatilan määrittämiseksi, Diplomityö, Tampereen teknillinen korkeakoulu, Rakennusstatikka, 1977.
- /6/ Alho, P., Eräiden likimenetelmien soveltuminen avoprofiilisten elementtien levy- ja laattatilan määrittämiseen, Diplomityö, Tampereen teknillinen korkeakoulu, Rakennusstatikka, 1982.
- /7/ Haapio, J., Likimääräisten laskentamenetelmien soveltuvuus levy- ja laatta-vaikutuksen tutkimiseen elementin väännössä, Diplomityö, Tampereen teknillinen korkeakoulu, Rakennusstatikka, 1983.
- /8/ Kaukasalo, J., Eräiden likiteorioiden soveltuvuus vääntörasitetun reunapalkillisen laattaelementin rasitusten määritykseen, Diplomityö, Tampereen teknillinen korkeakoulu, Rakennusstatikka, 1981.
- /9/ Lindberg, R., Teräsohutlevymuotosauvojen mitoitus, Tampereen teknillinen korkeakoulu, Talonrakennustekniikka, Koekuormitukset, 1983.
- /10/ Stahlwerke im Hochbau, Berechnung von Dachpfetten und Wandriegeln, VEB Metalleichtbaukombinat, Leipzig (DDR:n teräsrakennenneormeihin liittyvä mitoitusohje).

Risto Koivula, dipl.ins., Fexima Oy

LIITE

Esimerkkejä vääntökeselin paikoista kahden vapausasteen systeemeissä. A on leikkauskeseli (t.-keskiö), B on vääntökeseli (t.-napa).



Vääntökeskiö voi siis siirtyä hyvin yllättäviin paikkoihin, kuten kuvassa 4a tai ei minnekään, kuten kuvissa 2b ja 7a. Kuvan 2b rakenne käyttäytyy kuitenkin pendeliä vastaan kohtisuoraan kuormitettaessa aivan toisin kuin vapaasti deformoitava sauva, vaikka vääntökeseli onkin samassa pisteessä.