

KAAREN JÄYKKYYSKERTOIMIEN MÄÄRITTÄMINEN DIFFERENSSIMENETELMÄLLÄ

Pentti Tuominen

Rakenteiden Mekaniikka, Vol. 18
No. 3 1985, s. 61...81

TIIVISTELMÄ: Artikkelissa esitetään kaksi laskentamenetelmää lineaarisesti kimmoisen kaaren jäykkyyskertoimien laskemiseksi. Ensimmäinen menetelmä on rekursiivinen tähtäysmenetelmä, joka perustuu kaaren normaalivoiman ja taivutusmomentin differenssiap-
proksimaatioihin. Menetelmä soveltunee hyvin pientietokoneille ohjelmoitavaksi. Toinen menetelmä pohjautuu kaaren tasapainoyhtälöiden diskretointiin tavanomaisella differenssi-
menetelmällä. Tämä osa on suoranaista jatkoa tässä lehdessä aikaisemmin (Vol. 17. No 3, 1984) julkaistulle kirjoittajan artikkelille. Laskentatarkkuuden parantamiseksi menetel-
miin yhdistetään Richardsonin ekstrapolointi. Menetelmien antamia tuloksia verrataan
ympyränkaarelle analyttisesti laskettuihin tuloksiin. Saavutettu tarkkuus osoittautuu
hyväksi ja menetelmät tarkoitukseensa soveltuviksi. Menetelmiä ja esitettyjä kahta ratkai-
sutyyppeä verrataan keskenään.

JOHDANTO

Kirjoituksessa tarkastellaan käyrän tasosauvan staattisten jäykkyyskertoimien numeerista laskemista differenssimenetelmää käyttäen. Jäykkyyskertoimien määrittämiseksi esitetään kaksi laskentamenetelmää, jotka perustuvat samoihin lähtökohtiin. Toinen menetelmä johtaa rekursiiviseen peräkkäisiin laskutoimituksiin perustuvaan tapaan, ja toinen matriisi-
muotoiseen menetelmään.

Aluksi tarkastellaan rekursiivista menetelmää, jossa jäykkyyskertoimet määritetään lähtemällä poikkileikkauksen jännitysresultanttien lausekkeista. Tässä tarkoituksessa tarkas-
tellaan ensin suoran sauvan jäykkyyskertoimien määrittämistä normaalivoiman ja taivutus-
momentin lausekkeiden perusteella. Taivutukseen liittyvien kertoimien osalta menetelmä
palautuu Mohrin analogiana tunnettuun tapaan määrittää kimmoviiva. Seuraavassa luvussa
suoralle sauvalle esitetty menetelmä yleistetään käyrää sauvaa koskevaksi. Laskentatavan
tarkkuutta parannetaan yhdistämällä siihen kaksi- tai kolmivaiheinen Richardson-tyyppi-
nen ekstrapolaatio. Tuloksia verrataan vastaavan analyttisen ratkaisun antamiin tuloksiin
poikkileikkaukseltaan muuttumattomalle ympyränkaarelle.

Toisena laskentatapana tarkastellaan jäykkyyskertoimien määrittämistä lähtemällä kaarialkioiden tasapainoyhtälöistä, jotka on kirjoitettu siirtymien differenssilausekkeina kaaren tangentin ja normaalin suunnille. Tapa on artikkelissa /1/ esitetyn menetelmän sovellutus kaarelle. Menetelmiä vertaillaan lyhyesti. Pääpaino esityksessä on ensimmäisen laskentatavan käsittelyssä. Toisen tavan suhteen tyydytään lähinnä laskentamenetelmän esittelyyn.

Tarkasteluissa oletetaan, että sauva on jaettu n :ään yhtäsuureen osaan. Näin määräytyneet pisteet on numeroitu yhdestä arvoon $n+1$. Jakopiste 1 on sauvan alkupiste ja $n+1$ sen loppupiste. Suoran sauvan pituus on l ja pisteessä 1 on koordinaatilla x arvo $x = 0$. Vastaavasti on käyrällä sauvalla kaarta pitkin mitatulla koordinaatilla s arvo $s = 0$ pisteessä 1. Laskentapisteen i ja $i + 1$ välipistettä merkitään symbolisesti "indeksillä" $i + \frac{1}{2}$ tai vastaavalla sekaluvulla.

SUORAN SAUVAN JÄYKKYYSKERTOIMIEN MÄÄRITTÄMINEN

Suoran lineaarisesti kimmoisen sauvan normaalivoiman N lauseke on

$$N = EA(x) \frac{du}{dx} \quad , \quad (1)$$

missä EA on sauvan poikkileikkauksen vetojäykkyys, x on sauvan akselin suuntainen koordinaatti ja u on aksiaalinen siirtymä.

Kun sauva on jaettu n kappaleeseen Δx :n pituisia osavälejä, saadaan normaalivoimalle laskentapisteen i ja $i+1$ välissä differenssiapproksimaatio

$$N_{i+\frac{1}{2}} = EA_{i+\frac{1}{2}} \frac{-u_i + u_{i+1}}{\Delta x} \quad (2)$$

Ratkaisemalla yhtälöstä u_{i+1} saadaan aksiaalisen jäykkyyskertoimen laskemiseen soveltuva esitys

$$u_{i+1} = u_i + \frac{N_{i+\frac{1}{2}} \Delta x}{EA_{i+\frac{1}{2}}} \quad (3)$$

Jäykkyyskerroin on sauvan pään siirtymiä $u_1 = 1, u_{n+1} = 0$ tai $u_1 = 0, u_{n+1} = 1$ vastaava normaalivoiman arvo $N_{i+\frac{1}{2}} = N$. Soveltamalla kaavaa (3) toistuvasti saadaan päiden siirtymien u_1 ja u_{n+1} välille yhtälö

$$u_{n+1} = u_1 + N \sum_{i=1}^n \frac{\Delta x}{EA_{i+\frac{1}{2}}} \quad , \quad (4)$$

josta normaalivoima N voidaan laskea siirtymien u_1 ja u_{n+1} funktiona. Laskenta johtaa n :n kasvaessa tulokseen, joka suppenee kohti oikeata arvoa

$$u_{n+1} = u_1 + N \int_0^1 \frac{dx}{EA(x)} . \quad (5)$$

Kaavan (4) suppenemisnopeutta ei voida pitää hyvänä. Suppenemista voidaan kuitenkin parantaa huomattavasti myöhemmin esitettävällä tavalla.

Suoran kimmoisen sauvan taivutusmomentin M lauseke on

$$M = -EI(x) \frac{d^2v}{dx^2} , \quad (6)$$

missä EI on sauvan taivutusjäykkyys ja v sauvan taipuma. Taivutusmomentin differenssiapproksimaatio pisteessä i on

$$M_i = \frac{-EI_i}{\Delta x^2} (v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}) . \quad (7)$$

Tästä saadaan taipumien peräkkäiseen laskentaan sopiva lauseke

$$v_{i+1} = -v_{i-1} + 2v_i - \Delta x^2 \frac{M_i}{EI_i} . \quad (8)$$

Kiertymän $\phi = dv/dx$ differenssiapproksimaatio sauvan alkupäässä pisteessä 1 on

$$\phi_1 = \frac{-v_0 + v_2}{2\Delta x} , \quad (9)$$

josta saadaan sauvan ajatellulla jatkeella olevalle taipumalle arvo

$$v_0 = v_2 - 2\Delta x\phi_1 . \quad (10)$$

Sijoittamalla v_0 yhtälöön (7) sauvan päässä vaikuttavan taivutusmomentin lausekkeeksi tulee

$$M_1 = \frac{-2EI_1}{(\Delta x)^2} (-\Delta x\phi_1 - v_1 + v_2) . \quad (11)$$

Taipuma v_2 voidaan nyt ratkaista yhtälöstä (11), jolloin saadaan

$$v_2 = \Delta x\phi_1 + v_1 - \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{M_1}{EI_1} . \quad (12)$$

Kun sauvan taivutusmomentit aiheutuvat sauvan päiden taipumista tai kiertymistä, on sauvan kaikissa poikkileikkauksissa leikkausvoimalla vakioarvo

$$Q = \frac{-M_1 + M_{n+1}}{l} \quad (13)$$

Vastaavasti yhtälössä (8) esiintyvä taivutusmomentti M_i on esitettävissä lausekkeella

$$M_i = \left(1 - \frac{x_i}{l}\right) M_1 + \frac{x_i}{l} M_{n+1} \quad (14)$$

Soveltamalla toistuvasti yhtälöä (8) voidaan siirtymä v_{n+1} esittää momenttien M_1 ja M_{n+1} sekä sauvan alkupään kiertymän ϕ_1 ja taipuman v_1 funktiona.

Yhtälöparista

$$\phi_{n+1} = -\frac{v_n + v_{n+2}}{2\Delta x} \quad (15)$$

$$M_{n+1} = -\frac{EI_{n+1}}{(\Delta x)^2} (v_n - 2v_{n+1} + v_{n+2}) \quad (16)$$

voidaan eliminoida palkin kuvitellun jatkeen taipuma v_{n+2} ja päädytään yhtälöön

$$\phi_{n+1} = -\frac{v_n}{\Delta x} + \frac{v_{n+1}}{\Delta x} + \frac{\Delta x}{2} \frac{M_{n+1}}{EI_{n+1}}, \quad (17)$$

jota soveltamalla myös sauvan loppupään kiertymä ϕ_{n+1} voidaan esittää suureiden M_1 , M_{n+1} , ϕ_1 ja v_1 funktiona.

YHTEYS MOHRIN ANALOGIAAN JA MENETELMÄN TARKKUUDEN PARANTAMINEN

Kun yhtälöitä (8) ja (12) käyttäen kehitetään sauvan pisteen i taipuma, tullaan yhtälöön

$$\begin{aligned} v_i &= v_1 + (i-1)\Delta x \phi_1 - (i-1) \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{M_1}{EI_1} - (i-2)(\Delta x)^2 \frac{M_2}{EI_1} - \dots - (\Delta x)^2 \frac{M_{i-1}}{EI_{i-1}} = \\ &= v_1 + x_i \phi_1 - x_i \frac{\Delta x}{2} \frac{M_1}{EI_1} - (x_i - x_2) \frac{\Delta x}{EI_2} M_2 - \dots - (x_i - x_{i-1}) \frac{\Delta x}{EI_{i-1}} M_{i-1} \quad (18) \end{aligned}$$

Sauvan jako-osien lukumäärän n kasvaessa rajatta lähenee lauseke raja-arvoa

$$v_i = x_i \phi_1 + v_1 - \int_0^{x_i} \frac{M(x)}{EI(x)} (x_i - x) dx, \quad (19)$$

josta on nähtävissä laskentatavan yhtäläisyys Mohrin analogian kanssa. Kehittämällä lauseke (17) edelleen, voidaan todeta, että myös se on tämän analogian mukainen numeerinen integraali. Yhtälöihin (17) ja (18) sisältyvät numeeriset integroinnit ovat hitaasti suppenevia. Jonkin paremmin suppenevan integrointitavan käyttö olisi hyvin perusteltua. Seuraavassa esityksessä tutkitaan kuitenkin mahdollisuutta päästä johdettuja yhtälöitä käyttäen tarkempiin tuloksiin.

Tarkastellaan esimerkkinä poikkileikkaukseltaan muuttumattoman palkin taivutusjäykkyyksertoimien määrittämistä. Jaettaessa sauva neljään yhtä pitkään osaan saadaan yhtälöiden (8), (12) ja (17) perusteella momenttien M_1 ja $M_{n+1} = M_5$ ratkaisemiseksi matriisiyhtälö

$$AM = \begin{bmatrix} 0,34375 & 0,15625 \\ 0,5 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_{n+1} \end{Bmatrix} = \frac{EI}{l^2} \begin{bmatrix} \phi_1 l + v_1 - v_{n+1} \\ \phi_1 l - \phi_5 l \end{bmatrix}$$

Antamalla yhtälöryhmän oikean puolen jollekin siirtymälle tai kiertymälle arvo 1 ja muille arvo 0 saadaan vastaavat jäykkyyksertoimet laskettua. Jakoa tihennettäessä kerroinmatriisin A ensimmäisen rivin termit muuttuvat. Eri arvoilla n saatavia matriisin A alkioita on esitetty taulukossa 1. Vertailuarvona ovat vastaavat tarkat arvot.

Taulukko 1. Suoran poikkileikkaukseltaan muuttumattoman sauvan kiinnitysmomenttien kerroinmatriisin termejä. Jako-osien lukumäärä on n , a_{11} ja a_{12} ovat matriisin A alkioita. Vertailukohtana termien tarkat arvot.

n	a_{11}	a_{12}	$a_{11} + a_{12}$
4	0,34375	0,15625	0,50
8	0,3359375	0,1640625	0,50
16	0,333984375	0,166015625	0,50
tarkka	1/3	1/6	0,50

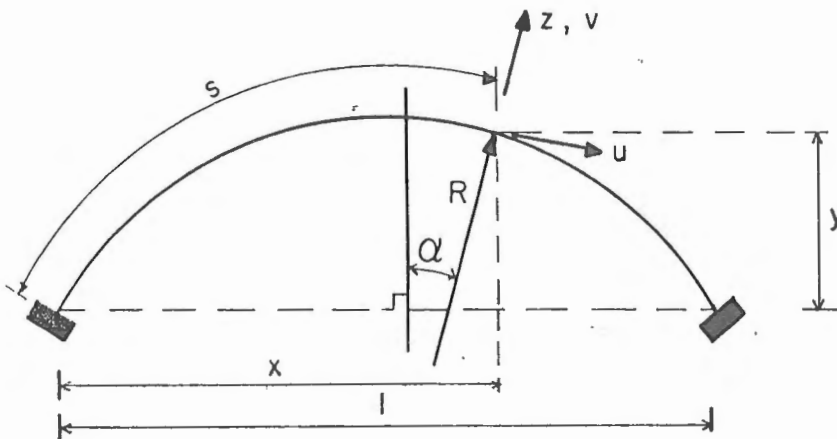
Luvuista on löydettävissä säännönmukaisuus, joka voidaan ilmaista esimerkiksi seuraavalla tavalla: Kun jako-osien lukumäärä kaksinkertaistuu, pienenee kertoimia määritettäessä tehty virhe yhteen neljäsosaan. Tätä tulosta soveltaen A matriisin termeille saadaan tarkat arvot jo laskemalla yhtä ja kahta jako-osaa vastaavat kertoimet.

Tämä ekstrapolaatiota koskeva sääntö on ilmeisesti voimassa, kun M/EI -pinta (tai N/EA -

pinta) muuttuu lineaarisesti. Se pitää myös suhteellisen tarkasti paikkansa, kun differenssi-
 pisteet ovat niin tiheässä, että muutos niiden välillä on likimain lineaarinen. Seuraavissa
 käyrää sauvaa koskevissa tarkasteluissa ekstrapolaation tarkkuutta pyritään vielä paranta-
 maan lisäämällä siihen vielä kaksi vaihetta.

KAAREN JÄYKKYYSKERTOIMIEN MÄÄRITTÄMINEN

Tarkastellaan kuvan 1 mukaista käyrää tasosauvaa



Kuva 1. Kaaren koordinaatit ja siirtymät sekä muita merkintöjä.

Kaaren akselin venymä on

$$\epsilon = \frac{du}{ds} + \frac{v}{R} \quad (20)$$

ja tangentin suunnanmuutos

$$\phi = \frac{u}{R} - \frac{dv}{ds} \quad (21)$$

Etäisyydellä \$z\$ sauvan akselista saa venymä arvon

$$\epsilon_z = \frac{1}{1+z/R} \left[\frac{du}{ds} + z \frac{d}{ds} \left(\frac{u}{R} \right) + \frac{v}{R} - z \frac{d^2v}{ds^2} \right] \quad (22)$$

Kun venymä tunnetaan, saadaan integroimalla yhtälöt taivutusmomentille /15/

$$M = \int_{-a_1}^{a_2} \sigma_z z b(z) dz \approx EI \left(\frac{d^2 v}{ds^2} + \frac{v}{R^2} + \frac{u}{R^2} \frac{dR}{ds} \right) \quad (23)$$

ja normaalivoimalle

$$N = \int_{-a_1}^{a_2} \sigma_z b(z) dz \approx EA \left(\frac{du}{ds} + \frac{v}{R} \right) + \frac{EI}{R} \left(\frac{d^2 v}{ds^2} + \frac{v}{R^2} + \frac{u}{R^2} \frac{dR}{ds} \right) = EA \left(\frac{du}{ds} + \frac{v}{R} \right) + \frac{M}{R} \quad (24)$$

Yhtälöissä $b(z)$ on kaaren leveys sekä a_1 ja a_2 poikkileikkauksen reunaetäisyydet. Kaarevuussäteen R derivaatasta käytetään seuraavassa esityksessä hieman lyhyempää merkintää $R' = dR/ds$. Yhtälöitä (23) ja (24), jotka yhdistetään tavallisesti Flüggen nimeen, pidetään tarkkoina, mikä pitääkin verraten hyvin paikkansa ohuilla sylinterikuorille tai kaarille, joiden korkeus on pieni säteeseen verrattuna. Yhtälöt poikkeavat kuitenkin vastaavista, jotka esiintyvät suomenkielisissä lähteissä /2/ ja /3/. Niissä on yhtälössä (22) olevan termin $1/(1+z/R)$ sarjakehitelmä otettu ylläolevaa tarkemmin huomioon. Tällöin tulee poikkileikkauksen neliömomentin I tilalle tarkempi termi I_1 . Sopivia yhtälöitä sen laskemiseksi on lähteessä /3/ sivuilla 482...490. Kaikkien mainittujen yhtälöiden johdolle on yhteistä se, että teknillisen taivutusteorian tavoin jätetään poikkileikkauspinnan muodonmuutokset huomiotta. Yhtälöt soveltuvat siten parhaiten massiivisten poikkileikkaustyyppien käsitteilyyn.

Edellisessä luvussa esitetty tapa suoran sauvan jäykkyyskertoimien määrittämiseksi voidaan yleistää käyrälle tasosauvalle, kun taivutusmomentin ja normaalivoiman riippuvuus siirtymistä tunnetaan.

Korvataan taivutusmomentin lauseke (23) differenssiapproksimaatiolla:

$$M_i = \frac{EI_i}{R_i^2} R_i \dot{u}_i + \frac{EI_i}{\Delta s^2} (v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}) + \frac{EI_i}{R_i^2} v_i \quad (25)$$

Tästä saadaan taipumien laskemiseen soveltuva yhtälö

$$v_{i+1} = \frac{-\Delta s^2}{R_i^2} R_i \dot{u}_i - v_{i-1} + \left(2 - \frac{\Delta s^2}{R_i^2} \right) v_i + \Delta s^2 \frac{M_i}{EI_i} \quad (26)$$

Korvataan yhtälö (24) pisteiden i ja $i + 1$ välissä likiarvolla

$$N_{i+\frac{1}{2}} = \frac{EA_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta s} (-u_i + u_{i+1}) + \frac{EA_{i+\frac{1}{2}}}{2R_{i+\frac{1}{2}}} (v_i + v_{i+1}) + \frac{M_{i+\frac{1}{2}}}{R_{i+\frac{1}{2}}} . \quad (27)$$

Täten

$$u_{i+1} = u_i - \frac{\Delta s}{2R_{i+\frac{1}{2}}} v_i - \frac{\Delta s}{2R_{i+\frac{1}{2}}} v_{i+1} - \frac{\Delta s}{R_{i+\frac{1}{2}}} \frac{M_{i+\frac{1}{2}}}{EA_{i+\frac{1}{2}}} + \Delta s \frac{N_{i+\frac{1}{2}}}{EA_{i+\frac{1}{2}}} . \quad (28)$$

Yhtälöiden (26) ja (28) lisäksi on siirtymä laskettaessa otettava huomioon reunaehdot. Sauvan kiertymä vastaa yhtälön (21) mukaisesti pisteessä i differenssiapproksimaatio

$$\phi_i = \frac{u_i}{R_i} - \frac{-v_{i-1} + v_{i+1}}{2\Delta s} . \quad (29)$$

Ratkaisemalla kiertymän ϕ_1 ja momentin M_1 lausekkeista taipuma v_0 ja edelleen v_2 saadaan

$$v_2 = \left(\frac{\Delta s}{R_1} - \frac{\Delta s^2}{R_1^2} \frac{R_1'}{2} \right) u_1 + \Delta s \phi_1 + \left(1 - \frac{\Delta s^2}{2R_1^2} \right) v_1 + \frac{\Delta s^2}{2} \frac{M_1}{EI_1} . \quad (30)$$

Sijoittamalla M_{n+1} :n lausekkeesta ratkaistu v_{n+2} kiertymän ϕ_{n+1} lausekkeeseen tullaan yhtälöön

$$\phi_{n+1} = \left(\frac{1}{R_{n+1}} + \frac{\Delta s}{2R_{n+1}^2} R_{n+1}' \right) u_{n+1} + \frac{v_n}{\Delta s} - \left(\frac{1}{\Delta s} - \frac{\Delta s}{2R_{n+1}^2} \right) v_{n+1} - \frac{\Delta s}{2} \frac{M_{n+1}}{EI_{n+1}} . \quad (31)$$

Tarkastellaan vielä yhtälöissä (26) ja (28) esiintyviä jännitysresultantteja. Suoran sauvan yhteydessä todettiin, että sauvan pään siirtymä tai kiertymä aiheuttaa sauvan vakiosuuruisen normaali- tai leikkausvoiman. Tätä ehtoa vastaa käyrässä sauvassa leikkausvoiman ja normaalivoiman resultantin vakioarvo kaikissa poikkileikkauksissa. Kuvan 2 mukaisesti se on voimien H ja V resultantti.

Kaavoihin (26) ja (28) sisältyvät taivutusmomentit ovat laskettavissa yhtälöstä

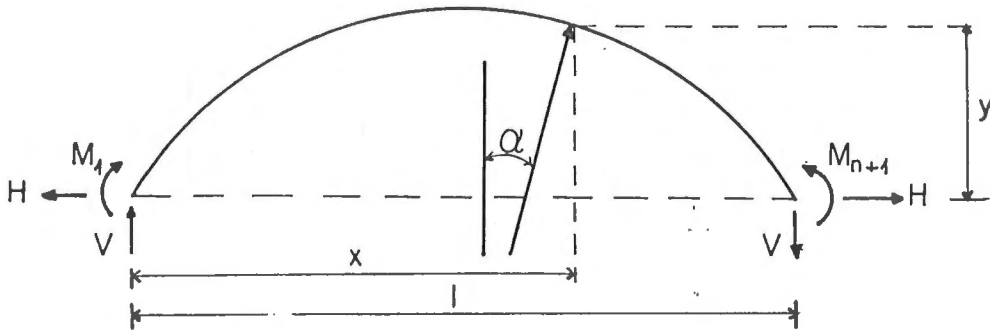
$$M = Hy + Vx + M_1 \quad (32)$$

ja normaalivoima yhtälöstä

$$N = H \cos \alpha + V \sin \alpha . \quad (33)$$

Lausekkeissa (32) ja (33) voidaan voiman V tilalle kirjoittaa vielä

$$V = \frac{-M_1 + M_{n+1}}{l} \quad (34)$$



Kuva 2. Kaaren tukireaktiot.

Soveltamalla ensin yhtälöitä (30) ja (28) sitten toistavasti yhtälöitä (26) ja (28) ja lopuksi yhtälöä (31) saadaan kaaren pisteen $(n+1)$ siirtymät ja kiertymä lausuttua voimasuureiden H , M_1 ja M_{n+1} sekä siirtymäsuureiden u_1 , v_1 ja ϕ_1 funktioina.

Tuloksena on kolmen yhtälön ryhmä

$$CF = V_{n+1} - BV_1 \quad (35)$$

missä

$$F = \begin{Bmatrix} H \\ M_1 \\ M_{n+1} \end{Bmatrix}, \quad V_1 = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \phi_1 \end{Bmatrix}, \quad V_{n+1} = \begin{Bmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ \phi_{n+1} \end{Bmatrix}.$$

Antamalla kaaren päiden jollekin siirtymälle tai kiertymälle arvo 1 ja muille arvo 0 voidaan ratkaista vektori F , jonka komponentit ovat samalla jäykkyyks kertoimia. Muut ykkössiirtymää vastaavat jäykkyyks kertoimet lasketaan kaaren tasapainoehdoista.

Laskentaprosessin antamia tuloksia voidaan vielä parantaa soveltamalla edellisessä luvussa käytettyä ekstrapolointia useampivaiheisena yhtälöryhmän (35) kertoimiin aina kaksinkertaistaen jako-osien lukumäärän. Seuraava taulukko esittää ekstrapolaation kulkua.

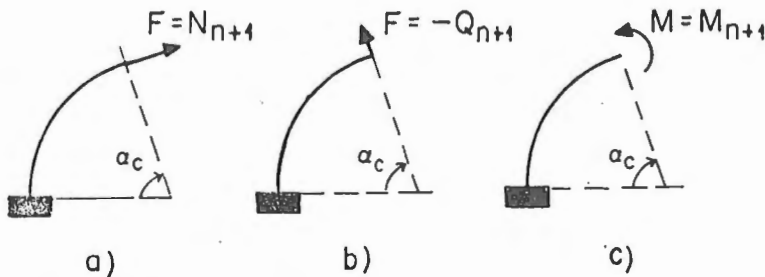
Taulukko 2. Kolmivaiheinen ekstrapolaatio. Ekstrapolointi tapahtuu oletetun virheen muutoksen perusteella.

Jako- osien luku- määrä	Lasket- tu suure	Oletettu virhe	I vaiheen ekstrapoloitu arvo	Oletettu virhe	II vaiheen ekstrapoloitu arvo	Oletet- tu virhe	III vai- heen ekstra- poloitu arvo
n	F_n	f	$G_{n,2n}$	g			
2n	F_{2n}	f/4	$G_{2n,4n}$	g/16	$H_{n,2n,4n}$	h	$I_{n,8n}$
4n	F_{4n}	f/16	$G_{4n,8n}$	g/16/16	$H_{2n,4n,8n}$	h/64	
8n	F_{8n}	f/64					

Jako-osien lukumäärän kasvattaminen tarkemman tuloksen saamiseksi on vanha keino. Lähteen /6/ perusteella ensimmäinen soveltaja lienee ollut Archimedes ympyrää ja paraabelia käsittelevissä tutkimuksissaan. Saman lähteen mukaan ekstrapoloinnin ensimmäistä vaihetta on käytetty Huygens'in ajalta saakka. Ekstrapoloinnin muut vaiheet esiintyvät samanlaisina ainakin em. Salan julkaisussa /6/ suoran sauvan värähtelytehtävään sovellettuna. Käytetty ekstrapolointi tunnetaan yleisesti Richardsonin ekstrapoloinnin nimellä /4, s. 171/.

POIKKILEIKKAUKSELTAAN MUUTTUMATTOMAN YMPYRÄNKAAREN ANALYYTTINEN RATKAISU

Tarkastellaan ympyränkaarta, joka on toisesta päästään jäykästi kiinnitetty toisen päässä ollessa vapaa. Kuormitetaan kaarta vapaasta päästään vuorotellen kuvan 3 mukaisilla kuormilla.



Kuva 3. Poikkileikkaukseltaan muuttumattoman ympyränkaaren kuormitustapaukset.

Koska ympyränkaaren kaarevuussäde on vakio, yksinkertaistuu yhtälö (23) muotoon

$$\frac{d^2v}{ds^2} + \frac{v}{R^2} = \frac{M}{EI} \quad (36)$$

Kun EI on vakio, yhtälön integraalifunktio on (/3, s. 501/)

$$v = \left[A - \frac{R^2}{EI} \int M \sin \alpha \, d\alpha \right] \cos \alpha + \left[B + \frac{R^2}{EI} \int M \cos \alpha \, d\alpha \right] \sin \alpha \quad (37)$$

Kaaren tangentin suuntainen siirtymä u voidaan edelleen ratkaista yhtälöstä (24) ja tangentin suunnan muutos yhtälöstä (21).

Kaaren vapaan pään siirtymät u_{n+1} ja v_{n+1} ja kiertymä ϕ_{n+1} ovat siten ilmaistavissa voimasuureiden N_{n+1} , $-Q_{n+1}$ ja M_{n+1} funktioina yhtälöryhmällä

$$\begin{Bmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ \phi_{n+1} \end{Bmatrix} = \underline{A} \begin{Bmatrix} N_{n+1} \\ -Q_{n+1} \\ M_{n+1} \end{Bmatrix} \quad (38)$$

Matriisin \underline{A} alkioiden laskemiseksi tarvittavat vapaan pään siirtymät kuvan 3 kuormitus-tapauksissa jätetään tilan säästämiseksi esittämättä. Tehdään yhtälön (38) oikealla puolella sijoitus

$$\begin{Bmatrix} N_{n+1} \\ -Q_{n+1} \\ M_{n+1} \end{Bmatrix} = \underline{T} \begin{Bmatrix} H \\ M_1 \\ M_{n+1} \end{Bmatrix} = \underline{T} \underline{F} \quad (39)$$

missä

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} c & -s/l & s/l \\ s & c/l & -c/l \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad c = \cos \alpha_c/2 \quad \text{ja} \quad s = \sin \alpha_c/2.$$

Tällöin on matriisiyhtälö

$$\underline{V}_{n+1} = \underline{A} \underline{T} \underline{F} = \underline{C} \underline{F} \quad (40)$$

yhtälöryhmän (35) analyyttinen vastine tapaukselle, jossa u_1 , v_1 ja d_1 ovat nollia. Kaaren loppupään ja alkupään siirtymien välistä yhteyttä esittää yhtälö

$$\underline{V}_{n+1} = -\underline{B} \underline{V}_1 \quad (41)$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_C & -\sin \alpha_C & R(1 - \cos \alpha_C) \\ \sin \alpha_C & \cos \alpha_C & -R \sin \alpha_C \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

LASKENTAESIMERKKEJÄ TÄHTÄYSMENETelmäSTÄ

Edellä kuvattu laskentamenetelmä on ohjelmoitu Oulun yliopiston Sperry 1100 tietokoneelle. Esimerkkirakenteina käsitellään ympyränkaaria, joiden poikkileikkaukset ovat muuttumattomia. Lasketuille rakenteille on siten saatavissa vastaava analyyttinen ratkaisu edellisessä luvussa esitetyllä tavalla.

Käsiteltyyn menetelmään perustuvissa laskelmissa on käytetty kaksinkertaisen tarkkuuden reaalityyppisiä. Muuttujat ovat tällöin 72 bitin pituisia mikä vastaa kahdeksantoista numeron tarkkuutta kymmenjärjestelmässä. Vertailulaskelmat on tehty mikrotietokoneella 64 bitillä eli kuudellatoista merkitsevällä numerolla.

Tietokoneajoista esitetään vain kolmivaiheisen ekstrapolaation antamat tulokset. Laajempi tulostus käsittää yhtälön (35) mukaiset matriisien \tilde{C} ja \tilde{B} alkiot kullakin jako-osien lukumäärällä n sekä ekstrapolaation eri vaiheissa.

Ensimmäisenä esimerkkinä tarkastellaan ympyränkaarta, jonka säde on $R = 30,0$ m ja kaaren keskuskulma $\alpha_0 = 18,0^\circ$. Kaaren poikkileikkauksen korkeus on $h = 0,2$ m ja leveys $b = 0,1$ m sekä kimmokerroin $E = 10\,000$ MN/m². Taulukossa 3 on esitetty yhtälön (35) \tilde{C} -matriisin alkiot, jotka on laskettu jako-osien lukumäärillä $n = 4, 8, 16$ ja 32 sekä $n = 8, 16, 32$ ja 64 . Vertailuarvona ovat vastaavat yhtälön (40) \tilde{C} -matriisin analyyttisesti lasketut alkiot. Samoilla jako-osien lukumäärillä lasketut yhtälön (35) \tilde{B} -matriisin alkiot on esitetty taulukossa 4.

Taulukko 3. Joustomatriisin \tilde{C} alkiot, jotka on laskettu kolmivaiheisella ekstrapolaatiolla. Jako-osien lukumäärä on n . Vertailuarvona vastaavat analyyttisesti lasketut arvot. Otsikossa termi, jonka kerroin on esitetty sarakkeessa.

	n	H	M_1	M_{n+1}
u_{n+1}	4..32	-1,49 270 122 380 5007	-5,20 733 476 949 5622	-1,73 630 185 527 4208
	8..64	6755	5694	4163
	anal.	9178	5703	4150
v_{n+1}	4..32	16,2 896 753 121 9941	43,9 944 711 605 9693	22,0 792 318 409 4573
	8..64	9837	9787	4771
	anal.	9857	9790	4478
ϕ_{n+1}	4..32	-3,47 805 544 665 8782	-7,06 860 965 051 5812	-7,06 860 965 051 5814
	8..64	8793	5802	5811
	anal.	8866	5815	5815

Taulukko 4. Kaaren 1 loppupään siirtymien riippuvuus alkupään siirtymistä (yht. (35) matriisi \underline{B}). Tulokset on laskettu kolmivaiheisella ekstrapolaatiolla. Jako-osien lukumäärä on n. Vertailukohtana termien analyttisesti lasketut arvot yht.(41).

siirt.	n	u_1	v_1	ϕ_1
u_{n+1}	4..32	0,95 105 651 629 51536	0.30 901 699 437 49474	1,46 830 451 114 5393
	8..64	1536	9472	5392
	anal.	1536	9474	5392
v_{n+1}	4..32	0,30 901 699 437 49472	0,95 105 651 629 51534	-9,27 050 983 124 8416
	8..64	9471	1516	8415
	anal.	9474	1536	8422
ϕ_{n+1}	4..32	0,00 000 000 000 0000	0,00 000 000 000 00000	0,99 999 999 999 99995
	8..64	01	05	9973
	anal.	00	00	1,0

Matriisin \underline{C} alimmalta riviltä ja myös osittain \underline{B} matriisista on jo nähtävissä jaon tihentämisen seurauksena kasvaneen pyöristysvirheen tuloksia huonontava vaikutus. Joidenkin matriisien alkioden osalta tarkkuus paranee jakovälien määrän kasvaessa. Seuraavassa on vielä esitetty jäykkyykskertoimet H , M_1 ja M_{n+1} , kun on asetettu vuorotellen $u_{n+1} = 1$, $v_{n+1} = 1$ ja $\phi_{n+1} = 1$.

Taulukko 5. Kaaren 1 loppupään yksikkösiirtymiä vastaavat jäykkyykskertoimet. Alimpien rivien tuloksissa on otettu huomioon kaarevuuden aiheuttama lisäys taivutusjäykkyyteen, lähde /3, s. 477-490/.

siirt.	n	$u_{n+1} = 1$	$v_{n+1} = 1$	$\phi_{n+1} = 1$
H	8..64	4,52 512 316 356	0,71 670 909 9661	1,12 715 329 090
	anal.EI	361	668	91
	anal. EI ₁	4,52 517 057 923	0,71 671 660 9565	1,12 716 509 481
M_1	8..64	-1,12 032 644 001	-0,13 181 192 8028	-0,13 653 056 1138
	anal.EI	02	030	41
	anal.EI ₁	-1,12 033 819 259	-0,13 181 318 1049	-0,13 653 158 6502
M_{n+1}	8..64	-1,10 622 588 697	-0,22 083 931 6132	-0,55 954 715 2289
	anal.EI	698	134	292
	anal.EI ₁	-1,10 623 745 155	-0,22 084 175 6189	-0,55 955 381 7896

Toisena esimerkkinä on puoliympyrän kaari, jonka säde on $R = 30,0$ m ja poikkileikkauksen mitat $h = 1,2$ m ja $b = 0,5$ m sekä kimmomoduuli $E = 10\,000$ MN/m². Tulokset on esitetty taulukoissa 6,7 ja 8.

Taulukko 6. Kaari 2, matriisi C .

siirt.	n	H	M_1	M_{n+1}
u_{n+1}	40..240 anal.	-74,9 999 999 999 4070 9998	-2,94 550 491 212 8233 8230	-0,98 200 950 363 46087 6094
v_{n+1}	40..240 anal.	58,9 048 622 548 0845 0861	1,25 000 000 000 0005 0000	1,24 999 999 999 9999 1,250
ϕ_{n+1}	40..240 anal.	-2,49 999 999 999 8029 -2,500	0,06 545 857 359 60474 0473	-0,06 545 857 359 60473 0473

Taulukko 7. Kaari 2, matriisi B . Jako-osien lukumäärä $n = 30..240$.

siirt.	u_1	v_1	ϕ_1
u_{n+1}	-1,00 000 000 000 0005	-0,00 000 000 000 003	60,0 000 000 000 0011
v_{n+1}	0,00 000 000 000 0009	-1,00 000 000 000 001	-0,00 000 000 000 0237
ϕ_{n+1}	-0,0	0,0	1,00 000 000 000 0003

Taulukko 8. Kaaren 2 jäykkyyksertoimet. Taulukon alimmilla riveillä tulokset, jotka saadaan, kun otetaan huomioon kaarevuuden taivutusjäykkyyttä lisäävä vaikutus.

	n	$u_{n+1} = 1$	$v_{n+1} = 1$	$\phi_{n+1} = 1$
H	30..240	0,0	0,08 956 765 5060	1,71 038 815 352
	anal.EI	0,0	060	353
	anal.EI ₁	0,0	0,08 961 062 9155	1,71 120 867 935
M_1	30..240	0,50 929 581 7894	-1,71 038 815 352	-25,0 211 968 973
	anal.EI	94	353	975
	anal.EI ₁	-0,50 954 031 4821	-1,71 120 867 935	-25,0 331 951 738
M_{n+1}	30..240	0,50 929 581 7894	-1,71 038 815 352	-55,5 789 459 710
	anal.EI	94	353	712
	anal.EI ₁	0,50 954 031 4821	-1,71 120 867 935	-55,6 056 140 631

Esimerkkejä tarkastelemalla tulosten tarkkuus voidaan todeta hyväksi. Laskentamenetelmä näyttää antavan tarkimmat tulokset yhtälön (35) matriisin \underline{B} alkioille ja matriisin \underline{C} momenttien kertoimille. Saman yhtälön \underline{C} matriisia tarkasteltaessa nähdään, että huonoin tarkkuus on kaarivoiman H kertoimilla. Lasketuissa tapauksissa on näihin kertoimiin saatu kaksitoista oikeata numeroa. Esimerkit osoittavat myös, että kaarevuus lisää rakenteen taivutusjäykkyyttä siinä määrin, että tämä vaikutus on syytä ottaa huomioon. Käsitelty menetelmä soveltuu myös kaaren ekvivalenttien solmukuormien määrittämiseen. Niiden laskeminen vaatii kuormituksen vaikutuksen huomioonottamista yhtälöissä (32) ja (33).

TOINEN RATKAISUTAPA TASAPAINOYHTÄLÖITÄ KÄYTTÄEN

Samoista lähtökohdista alkaen voidaan kaaren jäykkyykskertoimien määrittämiseksi päätyä esitetyn rekursiivisen menetelmän sijasta matriisimuotoiseen ratkaisutapaan. Yhtälön (25) perusteella tunnetaan kaaren taivutusmomenttien differenssiapproksimaatio. Leikkausvoimalle voidaan laskea approksimaatio yhtälöstä

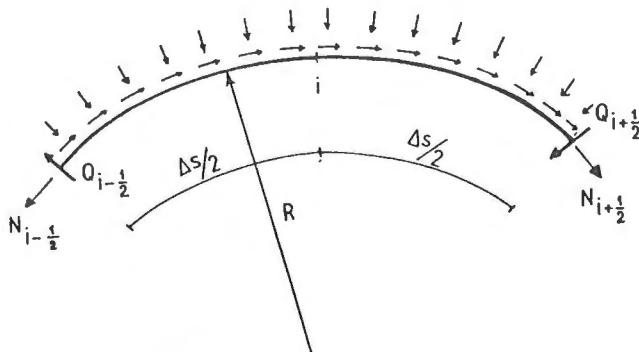
$$Q_{i+\frac{1}{2}} = \frac{-M_i + M_{i+1}}{\Delta s} \quad (42)$$

Normaalivoimalle käytetään approksimaationa lauseketta

$$N_{i+\frac{1}{2}} = \frac{EA_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta s} (-u_i + u_{i+1}) + \frac{EA_{i+\frac{1}{2}}}{2R_{i+\frac{1}{2}}} (v_i + v_{i+1}) + \frac{EI_{i+\frac{1}{2}}}{2R_{i+\frac{1}{2}}} \left(\frac{M_i}{EI_i} + \frac{M_{i+1}}{EI_{i+1}} \right) \quad (43)$$

missä M_i ja M_{i+1} saadaan yhtälöstä (25).

Tarkastellaan seuraavaksi kuvan 4 esittämää kaaren differenssialkiota.



Kuva 4. Kaaren keskiosan alkiio.

Alkion tangentin suuntaisten voimien tasapainoyhtälö on

$$-N_{i-\frac{1}{2}} + N_{i+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta s}{2R_i} (Q_{i-\frac{1}{2}} + Q_{i+\frac{1}{2}}) + X_i \Delta s = 0 \quad (44)$$

Alkion normaalin suuntaisten voimien tasapainoyhtälö on

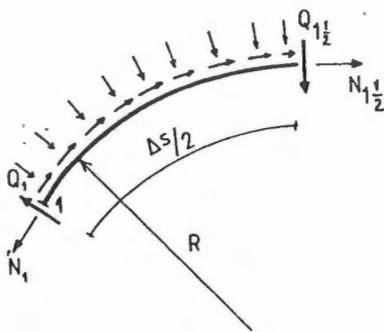
$$(N_{i-\frac{1}{2}} + N_{i+\frac{1}{2}}) \frac{\Delta s}{2R_i} - Q_{i-\frac{1}{2}} + Q_{i+\frac{1}{2}} + Y_i \Delta s = 0 \quad (45)$$

Sijoittamalla kumpaankin yhtälöön normaali- ja leikkausvoimien lausekkeet muuttuvat yhtälöt siirtymien u ja v väliseksi yhtälöiksi. Yhtälöt voidaan kirjoittaa kaikille kaaren sisäpisteille. Kun yhtälöitä muodostetaan kaaren päätepisteiden viereisille pisteille on otettava huomioon kaaren tangentin kiertymän kaaren päätepisteessä määrittävä yhtälö (29), josta voidaan ratkaista kaaren jatkeella oleva ajateltu taipuma v_0 tai v_{n+2} . Sijoittamalla ne yhtälöön (25) saadaan lausekkeet kaaren päässä vaikuttaville taivutusmomenteille sekä edelleen leikkausvoimille $Q_{1+\frac{1}{2}}$ ja $Q_{n+\frac{1}{2}}$. Niissä ovat mukana kiertymät ϕ_1 ja ϕ_{n+1} . Kun tasapainoyhtälöt kirjoitetaan kaaren kaikille sisäpisteille, esiintyvät muodostuvassa yhtälöryhmässä kaikkien laskentapisteiden siirtymät ja lisäksi edellä mainitut kiertymät.

Kaaren tukivoimien määrittämiseksi on tarkasteltava vielä kaaren päihin rajoittuvien $\Delta s/2$:n pituisten alkioiden tasapainoa. Tarkastellaan kaaren pisteeseen 1 rajoittuvaa alkiota, jota esittää kuva 5. Alkion tasapainoyhtälöt ovat

$$-N_1 + N_{1\frac{1}{2}} - Q_{1\frac{1}{2}} \frac{\Delta s}{2R_1} + X_1 \Delta s = 0 \quad , \quad (46)$$

$$N_{1\frac{1}{2}} \frac{\Delta s}{2R_1} - Q_1 + Q_{1\frac{1}{2}} + Y_1 \Delta s = 0 \quad . \quad (47)$$



Kuva 5. Kaaren päähän rajoittuva alkiio.

Yhtälöt määrittävät kaaren tukivoimat N_1 ja Q_1 , kun voimat $N_{1\frac{1}{2}}$ ja $Q_{1\frac{1}{2}}$ tunnetaan. Vastaavasti voidaan määrittää tukivoimat N_{n+1} ja Q_{n+1} .

Kaaren jäykkyyskertomia määritettäessä muodostetaan kaaren pisteille $2\dots n$ siirtymien väliset tasapainoyhtälöt. Tuloksena on symmetrinen yhtälöryhmä, jonka nauhan leveys on yhdeksän. Toisena vaiheena ratkaistaan sisäpisteiden siirtymät kaaren päiden siirtymien ja kiertymien funktiona. Tämä tapahtuu siirtämällä tasapainoyhtälöissä suureet u_1 , v_1 ja ϕ_1 sekä u_{n+1} , v_{n+1} ja ϕ_{n+1} kertoimineen yhtälöryhmän oikealle puolelle. Menettelytapa on aivan sama kuin artikkelissa /1/ suoran sauvan yhteydessä käytetty. Kunkin oikealle puolelle siirretyn siirtymäsuureen ykkösarvoa vastaa oma siirtymäkenttänsä.

Kolmantena vaiheena jäykkyyskertomia määritettäessä lasketaan tunnetuista siirtymistä kaaren päiden ykkössiirtymiä (myös ϕ_1 ja ϕ_{n+1}) vastaavat taivutusmomentit M_1 ja M_{n+1} sekä normaalivoimat $N_{1\frac{1}{2}}$ ja $N_{n+1\frac{1}{2}}$ ja leikkausvoimat $Q_{1\frac{1}{2}}$ ja $Q_{n+1\frac{1}{2}}$. Lopuksi ratkaistaan reuna-alkioiden tasapainoyhtälöistä (46) ja (47) kaaren kannassa vaikuttavat normaali- ja leikkausvoimat, jotka momenttien M_1 ja M_{n+1} ohella ovat jäykkyyskertomia. Koordinaatiston kierto-yhtälöillä voidaan vielä laskea kuvan 2 mukaiset voimakomponentit H ja V , jolloin tulokset vastaavat rekursiivisella menetelmällä laskettuja tuloksia.

Kun tasapainoyhtälöiden oikeana puolena on kuormitus ja laskenta toteutetaan kuvatulla tavalla, saadaan tuloksina kaaren ekvivalentit solmukuormat. Toistamalla laskenta useampaa jako-osien lukumäärää n käyttäen voidaan tulosten tarkkuutta parantaa ekstrapoloidulla. Keino ei ole kuitenkaan aivan yhtä tehokas kuin aikaisemmin käsitellyn rekursiivisen menetelmän yhteydessä.

LASKENTAESIMERKKEJÄ TASAPAINOYHTÄLÖIHIN PERUSTUVASTA MENETelmäSTÄ

Edellisessä luvussa kuvattu laskentatapa on ohjelmoitu Sperry 1100 tietokoneelle. Ohjelma käsittelee vain poikkileikkaukseltaan muuttumatonta ympyränkaarta. Laskennassa on käytetty tarkkuutena 18 merkitsevää numeroa. Esimerkkirakenteina ovat aikaisemmin käsitellyt ympyränkaaret. Tulokset esitetään taulukoissa 9 ja 10. Aikaisemmasta poiketen esitetään myös kaaren päihin vaikuttavien normaali- ja leikkausvoimien numeeriset arvot, joista voidaan tarkastella Bettin-Maxwellin säännön toteutumista.

Laskettujen tulosten vertailu taulukoiden 5 ja 8 lukuihin osoittaa, että tasapainoyhtälöitä käyttäen ei päästä yhtä tarkkoihin tuloksiin kuin esitetyllä tähtäysmenetelmällä. Tämä aiheutuu siitä, että jäykkyyskerrointen arvot muuttuvat selvästi enemmän kuin C -matriisin alkiot (yht. 35) jako-osien lukumäärän n kasvaessa, eikä ekstrapolaatio ole tässä syystä yhtä tarkka.

Taulukko 9. Kaaren 1 tasapainoyhtälöistä (44) ja (45) lasketut otsikossa mainittuja ykkössiirtymiä vastaavat jäykkyyskertoimet. Tulokset on ekstrapoloitu jako-osien lukumääriä $n = 8..64$ vastaavista tuloksista.

	$u_{n+1} = 1$	$v_{n+1} = 1$	$\phi_{n+1} = 1$
H	4,52 512 2864	0,71 670 90521	1,12 715 3208
M_1	- 1,12 032 635 788	- 1,31 811 915 019	-0,13 653 053 8427
M_{n+1}	- 1,10 162 258 0484	- 0,22 083 930 3103	-0,55 954 712 9488
N_1	4,46 917 608 363	0,70 936 896 4278	1,12 032 635 811
Q_1	0,70 936 896 4277	0,10 274 971 7060	0,13 181 191 5055
N_{n+1}	4,46 964 610 206	0,70 640 138 4676	1,10 162 258 0508
Q_{n+1}	-0,70 640 138 4674	-0,12 148 627 7273	-0,22 083 930 3140

Taulukko 10. Kaaren 2 tasapainoyhtälöistä (44) ja (45) lasketut jäykkyyskertoimet. Laskennassa käytetyt jako-osien lukumäärät ovat $n = 30,60,120,240$.

	$u_{n+1} = 1$	$v_{n+1} = 1$	$\phi_{n+1} = 1$
H	-0,00 000 000 0003	0,08 956 765 5060	1,71 038 815 353
M_1	-0,50 929 581 7867	-1,71 038 815 353	-25,0 211 968 976
M_{n+1}	0,50 929 581 7872	-1,71 038 815 350	-55,5 789 459 708
N_1	-0,01 697 652 7267	-0,00 000 000 0004	0,50 929 581 7861
Q_1	-0,00 000 000 0003	0,08 956 765 5060	1,71 038 815 353
N_{n+1}	-0,01 697 652 7263	0,00 000 000 0002	-0,50 929 581 7872
Q_{n+1}	-0,00 000 000 0002	-0,08 956 765 5056	-1,71 038 815 350

ERÄITÄ HUOMIOITA JA LOPPUSANAT

Kirjoituksessa on käsitelty kaaren jäykkyyskertoimien määrittämistä kahdella differenssien käyttöön perustuvalla menetelmällä, joissa sauvan jako-osat ovat yhtäpitkiä. Kumpikin menetelmä käyttää aliohjelmää, joka tunnetun s-koordinaatin perusteella laskee kaaren pisteen x- ja y-koordinaatit (kuva 1) sekä kaaren geometrian tässä pisteessä. Tämä aliohjelma vaikuttaa molempien menetelmien laskentanopeuteen ja tarkkuuteen. Siihen kannattaa kiinnittää siten tavallista suurempaa huomiota.

Molemmissa esitetyissä laskentamenetelmissä on käytetty hyväksi Richardsonin ekstrapolaatiota tulosten tarkkuuden parantamiseksi. Ekstrapolaation edullisuus ei liity yksistään

differenssimenetelmään. Lähteen /7/ tarkasteluissa on kaari korvattu suorilla sauvaelementeillä. Ekstrapolaation voidaan todeta soveltuvaan myös näin laskettujen tulosten /7, s. 109/tarkentamiseen.

Kun tässä kirjoituksessa esitettyjä kahta laskentamenetelmää verrataan keskenään voidaan sanoa, että rekursiivinen menetelmä vaatii vähemmän muistitilaa ja laskenta-aikaa kuin matriisimuotoinen menetelmä. Rekursiivinen laskentatapa soveltuu hyvin pientietokoneille.

Rekursiivisen menetelmän etuna on lisäksi tulosten suurempi tarkkuus. Menetelmän laskentatarkkuuden tasoa voidaan lisäksi säädellä helposti lisäämällä ja vähentämällä ekstrapolaation vaiheiden lukua. Lisäämällä laskennassa käytettävää sananpituutta pyöristysvirheen vaikutuksen eliminoimiseksi voitane diskreetointivirhettä pienentää edelleen. Matriisimuotoisella menetelmällä halutun tarkkuustason saavuttaminen ei ole yhtä helppoa, mutta rakenteiden suunnitteluun riittävä tarkkuus on kuitenkin mahdollista saavuttaa.

Matriisimuotoisen menetelmän etu on sen systemaattisuus. Kun ilmiötä hallitseva differentiaaliyhtälö tunnetaan, voidaan yhtälö diskretisoida vakiotoimenpitein differenssimenetelmällä. Käsitelty tasapainoyhtälöihin perustuva menetelmä on laajennettavissa jokseenkin suoraviivaisesti käsittämään ominaisarvotehtävät.

Rekursiivista menetelmää käyttäen on helppo määrittää suoran päistään nivelöidyn sauvan nurjahdusvoimaa. Muiden reunaehtojen ja kaarevuuden käsittelemiseksi ominaisarvotehtävissä tarvitaan lisätutkimuksia. Sama koskee molempia menetelmiä leikkausmuodonmuutoksen ja epälineaarisuuden huomioonottamiseksi sauvarakenteiden yhteydessä.

Tasapainoyhtälöihin perustuvan menetelmän systemaattisuus aiheuttaa sen, että laskentatapa lienee ilman suuria vaikeuksia sovellettavissa laatta- ja kuorirakenteisiin. Lähteessä /10/ on differenssimenetelmää käytetty Ghalin ja Bathen esittämällä tavalla (lähde /11/ ja /12/) laattaelementtien yhteydessä. Lähteissä laatan reunaan vastaan kohtisuora siirtymän derivaatta on korvattu differenssiverkon ensimmäisten verkkopisteiden välissä lasketulla arvolla. Tällainen laskentatapa ei liene tarpeellinen. Se voitaneen välttää esimerkiksi artikkelin /13/ esitystä soveltaen. Rekursiivisen menetelmän soveltamisesta pintarakenteisiin ei kirjoittajalla ole käsitystä ehkä kiertosymmetrisiä rakenteita lukuunottamatta.

Suoralle sauvalle johdetut yhtälöt (4), (17) ja (18) lähestyvät jakoa tihennettäessä määrättyjä integraaleja. Samanlainen yhteys on varmaankin löydettävissä esitettyjen kaaren yhtälöiden perusteella. Ehkä joku lukijoista selvittää tämän tehtävän, jonka ratkaisemisessa kirjoittaja ei ole onnistunut. Yleensäkin on sanottava, että differenssimenetelmä vaatii muissakin suhteissa lisäselvityksiä.

KIITOKSET

Apulaisprofessorit Eero-Matti Salonen ja Tapio Salmi ovat eri vaiheissa tarkastaneet tämän kirjoituksen luonnoksen ja tehneet runsaasti parannusehdotuksia. Huomautuksilla on ollut suuri vaikutus artikkelin sisältöön.

Rouva Helvi Kantola ja dipl.ins. Timo Jaako ovat piirtäneet kirjoituksen kuvat. Rouva Raija Tapio on tehnyt artikkelin puhtaaksikirjoitustyön ja Tauno Tönningin säätiö on tukenut sen laatimista apurahalla.

Esitän mainituille henkilöille ja säätiölle kiitokseni.

KIRJALLISUUSVIITTEET

- [1] Tuominen, P., Tasokehien analysoinnista differenssimenetelmällä. Rakenteiden mekaniikka. Vol. 17. No 3 1984, s. 21-36.
- [2] Salmi, T., Avaruudessa käyrän sauvan liikeyhtälöt. Rakenteiden mekaniikka. Vol. 16. No 1 1983, s. 1-24.
- [3] Ylinen, Arvo, Kimmo- ja lujuusoppi II. Werner Söderström Oy. Porvoo 1970.
- [4] Crandall, S.H., Engineering Analysis. McGraw-Hill 1956.
- [5] Sala, I., A Numerical Method for Calculating Critical Speeds of Rotating Shafts. Acta Polytechnica Scandinavica. Mechanical Engineering Series No 11. Helsinki 1962.
- [6] Sala, I., On the numerical solution of certain boundary value problems and eigenvalue problems of the second and fourth order with the aid of integral equations. Acta Polytechnica Scandinavica. Mathematics and Computing Machinery Series No 9. Helsinki 1963.
- [7] Kikuchi Fumio, Tanizawa Kazuo, Accuracy and locking-free property of the beam element approximation for arch problems. Computers & Structures. Vol 19. No. 1-2, s. 103-110, 1984.
- [8] Moan, T., A note on the convergence of finite element approximations for problems

- formulated in curvilinear coordinate systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 3 (1974) s. 209-235. North-Holland Publishing Company.
- [9] Dawe, D.J., Curved finite elements for the analysis of shallow and deep arches. *Computers & Structures*. Vol. 4. s. 559-580. Pergamon Press 1974.
- [10] Beskos, D.E., Leung, K.L., Dynamic response of plate systems by combining finite differences, finite elements and laplace transform. *Computers & Structures*. Vol. 19. No. 5/6, s. 763-775, 1984.
- [11] Ghali, A. and Bathe, K.J., Analysis of plates subjected to in-plane forces using large finite elements. *IABSE. Publ. 30-I*, s. 29-40 (1970).
- [12] Ghali, A., Bathe, K.J., Analysis of plates in bending using large finite elements. *IABSE. Publ. 30-II*, s. 61-72 (1970).
- [13] Salonen, E-M., Arectangular plate bending element the use of which is equivalent to use of the finite difference method, *International Journal of Numerical Methods in Engineering* Vol. 1. 1971, s. 261-274.
- [14] Mäkelä, Matti, Nevanlinna, Olavi, Virkkunen, Juhani, Numeerinen matematiikka. Toinen painos. Gaudeamus. Mänttä 1984.
- [15] Mah, Gordon, B.J., Numerical Analysis of Noncircular Cylindrical Shells, *Journal of the Engineering Mechanics Division, Proceedings of American Society of Civil Engineering*, June 1967, s. 219-237.

Pentti Tuominen, tekn.lis., Oulun yliopisto, Rakentamistekniikan osasto.