

EFEKTIIVISEN MASSAN MENETELMÄ EPÄLINEAARISTEN RAKENTEIDEN DYNAMIIKASSA

Antti Aula

Rakenteiden Mekaniikka, Vol. 18
No. 3 1985, s. 28...50

YHTEENVETO: Artikkelissa on johdettu "efektiivisen massan menetelmäksi" nimetty rakenteen dynamiikan analysointiin sopiva menetelmä. Se on tarkoitettu käytettäväksi ainakin lineaarisen kiihtyvyyden menettelyä suorana aikaintegrointimenetelmänä käytettäessä.

Efektiivisen massan menetelmässä on voitu muuttaa monta vapausastetta omaavan elastisen rakenteen kiihtyvyytilaa kuvaavat yhtälöt yhden vapausasteen omaavan partikkelin kiihtyvyyttä kuvaavan yhtälön kaltaiseksi. Teoria sisältää rakenteen merkittävien, geometrisesti epälineaaristen siirtymien analyysin. Tähän kuuluu yhtä hyvin rakenteen elastisuus kuin sen liike avaruudessa ajan mukana siihen kohdistuvien voimien vaikutuksesta.

Joitakin tehtäviä on laskettu numeerisina esimerkkeinä ristikkosauvaa elementtinä käytävällä, kirjoittajan laatimalla GERDA I -tietokoneohjelmalla.

Artikkelia laadittaessa on tietokoneohjelma muutettu kolmiulotteisten rakenteiden, esimerkiksi jännitettyjen köysiverkkojen analyysiin sopivaksi.

Johdetun teorian ja laskettujen esimerkkien nojalla näyttää siltä, että esitelty menetelmä on sovellusalueeltaan kohtalaisen laaja ja käyttökelpoinen dynaamisen vasteen analyysissä.

Jatkotutkimuksen kohteena on artikkelin liite-osassa kosketeltu menetelmän stabiilisuutta ja tarkkuutta.

JOHDANTO

Rakenne palvelee useimmiten sen laatuksia tehtäviä, että siltä edellytetyt ominaisuudet ovat lujuus ja jäykkyys. Jäykille rakenteille ovat ominaisia pienet siirtymät. Rakenteiden analysointia suoritettaessa on riittänyt geometrisesti lineaaristen rakenteiden teoria: voimien ja siirtymien suhde on ollut suoraviivainen.

Geometrisesti lineaaristen rakenteiden teoria ei ole riittänyt monimutkaisempien ilmiöiden, kuten rakenteen stabiiliuden menetyksen analysointiin: voimien ja siirtymien suhde ei ole ollut enää lineaarinen (esim. /1/ ja /2/).

Molemmille edellä mainituille rakenneanalyysin tyypeille - lineaariselle ja epälineaarisele analyysille, kuten lommahdus- ja nurjahdustehtäville - on yhteistä se, että ns. siirtymämenetelmiä käytettäessä jäykkyys on ensin mainitussa analyysityypissä aina vakio. Jälkimmäisessä tyypissä se on joskus vakio, kuten ominaisarvottehtävissä (esim. Eulerin nurjahduskuorman ratkaisu) /2/ tai joskus muuttuva. Silloin on kysymyksessä luonteeltaan erilainen numeerinen analysointimenetelmä: askelmenetelmä /3/.

ASKELMENETELMÄT

Rakenteiden analyysin kenttä sisältää useita alueita tehtävän luonteen mukaan. Tehtävän pääkategoria voi olla statiikka tai dynamiikka. Edelleen molempien pääkategorioiden sisällä tehtävä voi olla geometrisesti lineaarinen tai epälineaarinen. Se voi olla vielä samanaikaisesti fysikaalisesti eli materiaaliominaisuuksiltaan lineaarinen tai epälineaarinen. Se mihin tehtävätyyppiin analysoinnin kohde kuuluu, määrää, mikä analysointimenetelmä on valittava.

Epälineaaristen rakenteiden FEM-analyysissä kysymykseen tulevia epälineaaristen yhtälöiden ratkaisumenetelmiä ovat puhtaat askelmenetelmät, Newton-Raphsonin iteraatio, muunnettu Newton-Raphsonin iteraatio (vakiojäykkyysiteraatio) ja näiden yhdistelmät (kuva 1) /4/. Näille menetelmille yhteisenä perusominaisuutena on tapa ratkaista siirtymä kertomalla voima rakenteen jäykkyyden käänteisarvolla. Siis

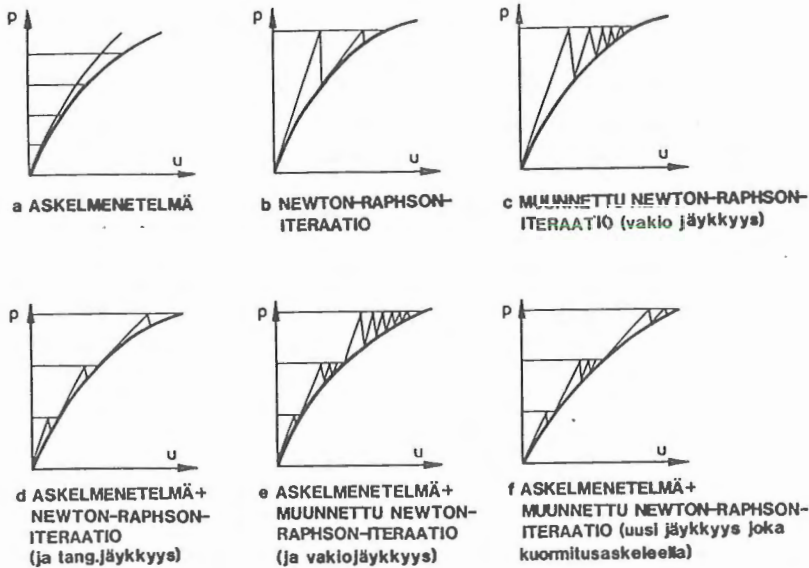
$$\text{siirtymä} = \text{voima} \cdot (\text{jäykkyys})^{-1} \quad (1)$$

tai myös

$$\text{siirtymän lisäys} = \text{voiman lisäys} \cdot (\text{jäykkyys})^{-1} \quad (1a)$$

Menetelmän ja tehtävän luonteen mukaan yhtälöitä (1) ja (1a) käsitellään eri tavoin, toistaen jne. Silti ratkaisun perusidea on näiden yhtälöiden mukainen.

Tähän perusideaan pohjautuvat ehkä useimmat rakenneanalyysin menetelmät. Niin myös dynamiikan alueen askelmenetelmistä esim. Wilsonin θ -menetelmä /5/ sekä Mondkarin ja Powellin /6/ esittämä ja myös Wilsonin ja Cloughin /7/ esittämä menetelmä. Yhtälön (1) yleisin sovellusalue on luonnollisesti statiikan siirtymämenetelmä.



Kuva 1. Epälineaarisesti käyttäytyvien rakenteiden ratkaisumenetelmiä.

GEOMETRINEN EPÄLINEAARISUUS JA DYNAAMINEN ANALYYSI

Jos halutaan analysoida merkittävästi geometriaansa - joko muotonsa tai asemansa puolesta - muuttavan rakenteen ajasta riippuvia siirtymiä ja rasituksia, on edellä luetelluista menetelmistä hylättävä ensimmäisenä vakiojäykkyyteen perustuvat muunnetut Newton-Raphsonin menetelmät (ks. kuva 1). Dynamiikan tehtävässä ilmeisesti kuvan 1 d tyyppinen askelmenetelmä antaa mahdollisuudet parhaaseen tarkkuuteen.

Merkittävästi geometriaansa muuttavia rakenteita ovat esimerkiksi kuvassa 5b-d esitellyt mallirakenteet. Kuvassa 5b on osa voimajohtoa - yksi jänne. Ehyt viiva esittää sen tasapainotilaa ja katkoviiva tiettyinä ajan hetkenä vallitsevaa siirtymätilaa tilanteessa, jossa köysijänteen vasemmasta laidasta (kuvassa 5b) on riippueristimen alapäästä poistettu tasapainottava vaakavoima. Tällä rakennemallilla on jäljitelty köyden käyttäytymistä oletetussa katkeamistilanteessa, /10/.

Kuvat 5c ja 5d esittävät lähinnä testaustehtäviksi tarkoitettuja fysikaalista heiluria ja vailla tukia olevaa pakkovoiman takia kiihtyvässä liikkeessä olevaa sauvaa. Näistä, samoin kuin muita kuvan 5 rakenteista on artikkelin loppuosassa esitetty numeerisia esimerkkejä.

Tässä artikkelissa halutaan tarkastella askelmenetelmän teoriaa ja esimerkein soveltamista ei ainoastaan merkittävästi omaa geometriaansa muuttavaan rakenteeseen vaan myös samanaikaisesti merkittävästi sijaintiaan muuttavaan rakenteeseen. Voi sanoa,

että rakenne muuttuu elastisesti muotoaan fysiikan lakien mukaisesti ja samanaikaisesti liikkuu määrättyllä tavalla avaruudessa.

Kuvassa 5a on tavallinen jäykkä ristikko. Edellä sanotun perusteella sitä voi pitää artikkelissa eräänä erikoistapauksena: se ei muuta asemaansa lainkaan eivätkä sen muodonmuutokset ole geometrisesti epälineaarisia. Tämä ristikko on esitelty sen esiintuomiseksi, ettei jäljempänä oleva teoria sulje pois myöskään tällaisen ristikon dynaamisen vasteen analyysiä.

Kun halutaan tarkastella merkittäviä siirtymiä ajasta riippuvina suureina, voidaan nähdä yhteys partikkelin liikettä koskevien perusyhtälöiden ja deformatiivisen kappaleen analyysin välillä, kuten tullaan osoittamaan. Seuraavassa tutkitaan deformatiivisen ja merkittävästi liikkuvan kappaleen liiketilaa ja rasituksia toisin kuin yhtälössä (1) lähtien partikkelin kiihtyvyyden yhtälöstä:

$$\text{kiihtyvyys} = \text{voima} \cdot (\text{massa})^{-1} \quad (2)$$

Siis ei ratkaista siirtymiä kuten yhtälössä (1), vaan saadaan kiihtyvyys kertomalla voima massan käänteisarvolla. Numeerisella integroinnilla sitten ratkaistaan kiihtyvyydestä nopeus ja siirtymä. Se, mikä on massa ja voima, kun on kysymys useita vapausasteita omaavasta elastisesta kappaleesta - rakenteesta on seuraavassa esiteltävän teorian keskeinen kysymys.

EFEKTIIVISEN MASSAN MENETELMÄ

Menetelmä on luonteeltaan ns. implisiittinen, numeerinen dynaamisen vasteen suora integrointimenetelmä. Implisiittisyysluonne seuraa tavasta ratkaista kiihtyvyys askelmene- telmään kuuluvan aika-askeleen lopussa ja vasta sen kautta saada siirtymän 1. aikaderi- vaatan eli nopeuden kautta itse siirtymä ratkaistua, /8/. Efektiivisen massan käsite on ensi kertaa otettu käyttöön kirjoittajan opinnäytteessä, /10/.

Teoria pohjautuu merkintöihin (9) ja (10), jotka on esitetty lähteessä /7/. Wilson ja Clough esittävät tuossa lähteessä lineaarisesti kimmoisan rakenteen analysointimenetel- män, joka perustuu kiihtyvyyden approksimointiin lineaarisena aika-askeleen sisällä (lineaa- risena kiihtyvyyden menetelmä). Sen perusteena ovat kaavat (7) ja (8) esim. lähteessä /7/ ja /9/.

Seuraavassa oletetaan rakenteen materiaali lineaarisesti kimmoisaksi. Liike avaruudessa riippuu ainoastaan rakenteen tuennasta. Tasapainotilan toteutumista tarkasti esim. tasapai- noiteroinnin muodossa ei käsitellä.

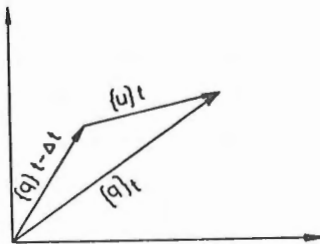
Lähtökohtana on, että rakenne toimii aika-askleen aikana lineaarisesti: sen siirtymän muutos on suoraan verrannollinen muutoksen aiheuttaneisiin voimiin. Jäykkyys aika-askleen aikana on siten vakio ja sama kuin sen jäykkyys nimenomaan aika-askleen alussa. Rakenteen siirtymätila on silloin tunnettu. Se, kuinka paljon jäykkyys muuttuu askleen aikana, riippuu rakennetyypistä ja askleen pituudesta. Käytettävä askelpituus vaikuttaa keskeisesti tarkkuuteen /3/, kuten myös siihen onko ratkaisu numeerisesti stabiili vai ei /3/.

Rakenteen solmujen kiihtyvyydet ovat lineaarisia /7/. Siirtymät ovat tällöin teoreettisesti kolmatta astetta /7/. Kun tarkasteluväli on kahden pisteen, aika-askleen alun ja lopun väli, ei polynomimuoto siirtymissä tule näkyviin.

Geometrisesti epälineaarinen rakenne muuttaa muotoaan siten, että siirtymät aiheuttavat jäykkyysominaisuuksien muuttumista ajan mukana tapahtuneita siirtymiä vastaten. Erikoisesti, jos tarkasteellaan elastisen kappaleen liikkeitä, translaatiota ja rotaatiota avaruudessa, on edullista valita sellainen siirtymätilaa kuvaava vektori että sillä voidaan ilmaista rakenteen solmujen liike aika-askleen alusta mitattuna. Olkoon rakenteen sijaintikoordinaatti hetkellä t yhtä kuin $\{q\}_t$, silloin apukoordinaatti $\{u\}_t$ hetkellä t on

$$\{u\}_t = \{q\}_t - \{q\}_{t-\Delta t} \quad (3)$$

Kuvassa 2 on näytetty havainnollisesti yhtälö (3) vektoreina.



Kuva 2. Suhteellinen koordinaatti $\{u\}_t$.

Tarkasteltaessa yhtälöä (3), on solmujen koordinaatteja hetkellä $t - \Delta t$ osoittava vektori $\{q\}_{t-\Delta t}$ vakio. Derivoimalla (3) ajan suhteen, saadaan nopeus

$$\{\dot{u}\}_t = \{\dot{q}\}_t \quad , \quad (4)$$

jossa aikaderivaatta on merkitty yläpisteellä. Derivoimalla edelleen (4) saadaan kiihtyvyys

$$\{\ddot{u}\}_t = \{\ddot{q}\}_t \quad . \quad (5)$$

Wilson ja Clough ovat käyttäneet /7/:ssä koordinaatteja $\{q\}$. Tässä on tehtävän geometrisen epälineaarisuuden vuoksi käytettävä apukoordinaattia $\{u\}$ ja tarkasteltava sen avulla liiketilaa aika-askeleen alusta lähtien, jolloin $\{u\} = \{0\}$. On huomattava, että $\{u\}$ sisältää yhtä hyvin solmujen ns. jäykän kappaleen liikkeistä kuin elastisista siirtymistä johtuvat siirtymämuutokset aika-askeleen alusta mitattuna. Koordinaatti $\{q\}$ sisältää tiedon solmujen sijainnista ja kertyy aika-askelittain tapahtuvista siirtymistä $\{u\}$ seuraavasti:

$$\{q\}_t = \{q\}_0 + \sum_{i=1}^n \{u\}_i \quad , \quad (6)$$

missä $\{q\}_0$ on alkusijainti, kun $t = 0$ ja $\{u\}_i$ on i :nmen askeleen kokonaissiirtymä.

Lineaarisen kiihtyvyyden menetelmällä nopeuden ja kiihtyvyyden lausekkeet saadaan suoralla integroinnilla aika-askeleen yli, esim. /7/ mukaan

$$\begin{aligned} \{\dot{q}\}_t &= \{\dot{q}\}_{t-\Delta t} + \frac{\Delta t}{2} \{\ddot{q}\}_{t-\Delta t} + \frac{\Delta t}{2} \{\ddot{q}\}_t \\ \{q\}_t &= \{q\}_{t-\Delta t} + \Delta t \{\dot{q}\}_{t-\Delta t} + \frac{\Delta t^2}{3} \{\ddot{q}\}_{t-\Delta t} + \frac{\Delta t^2}{6} \{\ddot{q}\}_t \quad . \end{aligned}$$

Kun noissa yhtälöissä tehdään yhtälöiden (3), (4) ja (5) sijoitus, saadaan

$$\{\dot{u}\}_t = \{\dot{u}\}_{t-\Delta t} + \frac{\Delta t}{2} \{\ddot{u}\}_{t-\Delta t} + \frac{\Delta t}{2} \{\ddot{u}\}_t \quad \text{ja} \quad (7)$$

$$\{u\}_t = \Delta t \{\dot{u}\}_{t-\Delta t} + \frac{\Delta t^2}{3} \{\ddot{u}\}_{t-\Delta t} + \frac{\Delta t^2}{6} \{\ddot{u}\}_t \quad . \quad (8)$$

Tehdään apumerkinnot

$$\{a\} = \{\dot{u}\}_{t-\Delta t} + \frac{\Delta t}{2} \{\ddot{u}\}_{t-\Delta t} \quad \text{ja} \quad (9)$$

$$\{b\} = \Delta t \{\dot{u}\}_{t-\Delta t} + \frac{\Delta t^2}{3} \{\ddot{u}\}_{t-\Delta t} \quad . \quad (10)$$

Näillä merkinnöillä yhtälöt (7) ja (8) tulevat muotoon

$$\{\dot{u}\}_t = \{a\} + \frac{\Delta t}{2} \{\ddot{u}\}_t \quad \text{ja} \quad (11)$$

$$\{u\}_t = \{b\} + \frac{\Delta t^2}{6} \{\ddot{u}\}_t \quad (12)$$

Nämä kaksi ovat muodollisesti samat kuin /7/:ssä. Merkintä (10) sisältää tässä erään suhteellisen siirtymän, kun taas /7/:ssä on {b} voitu "mitata" siirtymänä ajan hetkestä 0 lähtien. Tässä on geometrisen epälineaarisuuden vuoksi mitattava siirtymät kunkin aika-askelen alusta lähtien yhtälön (12) mukaan ja sitten seurattava sijaintikoordinaattia yhtälön (6) avulla.

Yhtälöt (3),..., (12) sisältävät lineaarisen kiihtyvyyden menetelmän perusapproksimaatiot.

Tarkastellaan seuraavassa efektiivisen massan menetelmän dynaamista perustetta, d'Alembertin perinsiippiä, /3/.

Liikkuvan partikkelin tasapaino syntyy pakkovoimien, hitaus- ja vaimennusvoimien ja kimmoisten voimien summana. Yhden vapausasteen systeemille tasapaino voidaan ilmaista yhtäläisyytenä:

$$m\ddot{q} + c\dot{q} + kq = Q_t \quad ,$$

missä Q_t on ajasta riippuva pakkovoima, k on jousivakio (jäykkyys), c viskoosivaimennus ja m partikkelin massa.

Useamman vapausasteen systeemille voidaan d'Alembertin perinsiippi ilmaista esim. /3/:n mukaisesti matriisimuodossa:

$$[M] \{\ddot{q}\} + [C] \{\dot{q}\} + [K] \{q\} = \{Q\}_t \quad (13)$$

Yhtälö (13) on voimassa lineaarisesti kimmoisassa rakenteessa, kun siirtymät ovat pieniä.

Kirjoitetaan yhtälö uudelleen korostaen alaindeksillä sen voimassaoloa hetkellä t :

$$[M] \{\ddot{q}\}_t + [C] \{\dot{q}\}_t + [K] \{q\}_t = \{Q\}_t \quad (14)$$

Kirjoitettu yhtälö (14) on nyt perustana muodostettaessa geometrisesti epälineaarisen tehtävän ratkaisua.

Muutetaan tasapainoyhtälö (14) inkrementaalimuotoon käyttäen artikkelin /5/ tasapainoyhtälöä

$$\left({}^t_t [K]_L + {}^t_t [K]_{NL} \right) u = {}^{t+\Delta t}_t \{R\} - {}^t_t \{Q\} - [M] {}^{t+\Delta t}_t \{\ddot{u}\} \quad (15)$$

Sinä R on sisäinen ja Q ulkoinen voima. $[K]_L$ on elementtimenetelmän mukainen jäyk-

kyysmatriisi, joka on laskettavissa lineaarisen venymä-muunnosmatriisin avulla. $[K]_{NL}$ on vastaava matriisi, joka on laskettava inkrementaalilla epälineaarista venymä-siirtymä-muunnosmatriisia /5/.

Yhtälö (14) voidaan nyt välittömästi kirjoittaa inkrementaaliseen muotoon tämän artikkelin mukaisilla merkinnöillä, jolloin saadaan yhtälö

$$[M] \{\ddot{u}\}_t + [C] \{\dot{u}\}_t + [K]_{t-\Delta t} \{u\}_t = \{Q\}_t - \{R\}_{t-\Delta t} . \quad (16)$$

Se sisältää myös vaimennusmatriisin $[C]$, jota artikkelin /5/ yhtälössä (15) ei ole mukana.

Seuraavassa vaiheessa aletaan lähestyä efektiivisen massan käsitettä.

Sijoitetaan yhtälöt (11) ja (12) yhtälöön (16) ja sievennetään. Saadaan

$$[M] \{\ddot{u}\}_t + [C] \left\{ \{a\} + \frac{\Delta t}{2} \{\ddot{u}\}_t \right\} + [K]_{t-\Delta t} \left\{ \{b\} + \frac{\Delta t^2}{6} \{\ddot{u}\}_t \right\} = \{Q\}_t - \{R\}_{t-\Delta t} , \quad (17)$$

josta kiihtyvyys

$$\{\ddot{u}\}_t = \left[[M] + \frac{\Delta t}{2} [C] + \frac{\Delta t^2}{6} [K]_{t-\Delta t} \right]^{-1} \left\{ \{Q\}_t - \{R\}_{t-\Delta t} - [K]_{t-\Delta t} \{b\} - [C] \{a\} \right\} . \quad (18)$$

Nyt hakasuluissa oleva, kääntämistä edellyttävä matriisi on eräs massamatriisi, joka on rakenteen massan $[M]$, aika-askeleen Δt , vaimennusmatriisin $[C]$ ja jäykkymatriisin $[K]_{t-\Delta t}$ funktio. Tätä massamatriisia voidaan pitää tehollisena, siis kiihtyvyyden $\{\ddot{u}\}_t$ suuruuden ratkaisevana inertia- eli massamatriisina. Merkitään

$$[\bar{M}]_{t-\Delta t} = [M] + \frac{\Delta t}{2} [C] + \frac{\Delta t^2}{6} [K]_{t-\Delta t} \quad (19)$$

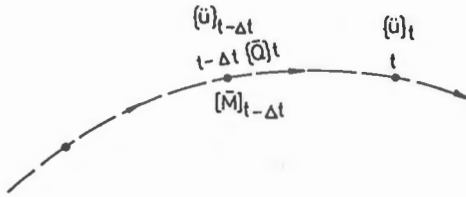
ja nimetään se efektiiviseksi massaksi. Vastaavasti johdonmukaisuutta noudattaen on merkittävä

$$\{\bar{Q}\}_t = \{Q\}_t - \{R\}_{t-\Delta t} - [K]_{t-\Delta t} \{b\} - [C] \{a\} \quad (20)$$

ja nimettävä se efektiiviseksi pakkovoimaksi, jolloin (18) sievenee muotoon

$$\{\ddot{u}\}_t = [\bar{M}]_{t-\Delta t}^{-1} \{\bar{Q}\}_t \quad (21)$$

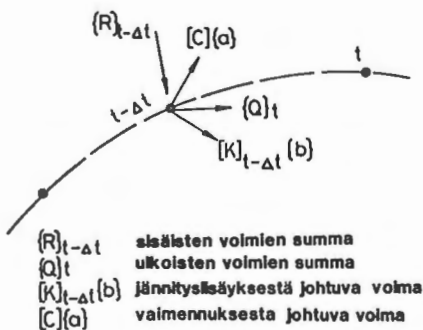
Johdetulla yhtälöllä (21) on elastisen rakennesysteemin tasapaino palautettu muistuttamaan partikkelin dynaamista tasapainoa (2). Analogiaa on havainnollistettu kuvissa 3 ja 4.



Kuva 3. Tehollinen voima $\{\bar{Q}\}_t$ liikkeen aiheuttajana.

Tehollisen massan käsitteestä saattaa olla etua tarkasteltaessa merkittäviä geometrisia muodonmuutoksia saavia rakenteita. Yhtälöstä (19) voi havaita, ettei efektiivinen massamatriisi ole singulaarinen, vaikka jäykkyys ja vaimennus olisivat nollamatriiseja. Singulaariseksi se ei tule myöskään, vaikka Δt lähestyy nollaa. Efektiivisen massan nimike lienee siten perusteltu kuvaamaan menetelmän sovellusalueen luonnetta jäljempänä olevien esimerkkienkin valossa.

Erona /7/:ään verrattuna on tässä artikkelissa esitetty geometrisesti epälineaarisen rakenteen numeerinen käsittely sekä efektiivisen massan menetelmän käsitteen käyttöönotto ja painotus. Keskeistä menetelmälle ovat yhtälöt (17),..., (21). Edeltävät yhtälöt (3),..., (16) liittyvät geometriseen epälineaarisuuteen yhdessä lineaarisen kiihtyvyyden menetelmän kanssa.



Kuva 4. $\{\bar{Q}\}_t$:n koostuminen.

Yhtälö (21) ilmaisee kiihtyvyyden tehollisen massamatriisin avulla. Yhtälöistä (11) ja (12) saadaan edelleen välittömästi aika-askeleen lopussa esiintyvät solmujen nopeus- ja siirtymävektorit $\{\dot{u}\}_t$ ja $\{u\}_t$. Edelleen yhtälöä (3) soveltamalla saadaan uusi solmun sijaintikoordinaatti.

Tässä luvussa on johdettu efektiivisen massan menetelmä liikkuvan kappaleen laskentaan. Rakenne jää kuitenkin liikkumattomaksi, jos epätasapaino puuttuu. Alkuhetkellä $t = 0$ joutuu rakenne epätasapainoa vastaavaan alkukiihtyvyyttilaan. Se on ratkaistavissa yhtälöä (14) soveltaen ratkaisemalla kiihtyvyys

$$\{\ddot{q}\}_0 = [M]^{-1} \{Q\}_0 - [K]_0 \{q\}_0 - [C] \{\dot{q}\}_0 \quad . \quad (22)$$

joka voidaan (4) ja (5) huomioiden yhtä hyvin kirjoittaa muodossa

$$\{\ddot{u}\}_0 = [M]^{-1} \{ \{Q\}_0 - [K]_0 \{q\}_0 - [C] \{\dot{u}\}_0 \} \quad . \quad (23)$$

Ilman alkunopeutta systeemi pysyy tasapainossa, kun $\{Q\}_0 = [K]_0 \{q\}_0$ eli staattinen tasapaino toteutuu. (Tässä $\{q\}_0$ on pieni alkusiirtymä.) Muussa tapauksessa käynnistyy liike ja dynaaminen tapahtuma alkaa.

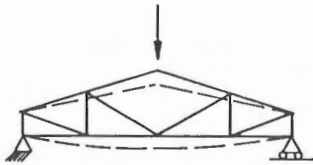
Koska yhden artikkelin puitteissa ei ole mahdollisuutta kovin pitkästi eritellä esimerkiksi aiheeseen liittyviä merkityksellisiä ja ehkä lukijaa kiinnostavia tarkkuus- ja stabiilisuuskysymyksiä, siirrytään tarkastelemaan menetelmästä esimerkkien kautta saatuja kokemuksia. Jäljempänä olevassa liite-osassa on vielä tarkasteltu vapausastemäärän vaikutusta stabiilisuuteen ja sivuttu tarkkuuskysymystä.

SOVELLUSESIMERKKEJÄ

Kokemusteni mukaan menetelmä soveltuu - mitä tulee merkittävästi geometrisesti epälineaaristen rakenteiden siirtymien laskentaan - verraten pieniä ja myös suuria siirtymiä saavien rakenteiden laskentaan.

Tietokoneohjelmalla GERDA I (geometrisesti epälineaarisen ristikon dynaaminen analyysi), jonka rakenne on lähteessä /10/ kuvattu, on laskettu mm. kuvassa 5 esiteltyjen rakenteiden liikettä. Valitettavasti ei ole mahdollista tämän artikkelin puitteissa kuvata itse ohjelman rakennetta tai toimintaa, vaan on tyydyttävä esittämään lasketut numeroesimerkit. Sama koskee tarkkuus- ja stabiilisuuskysymyksiä, jotka ansaitsisivat oman lukunsa. Tässä viitataan niiden suhteen lähteisiin /3/ tai vertailuartikkeliin /12/. GERDA I -ohjelman käyttämästä elementistä mainittakoon, että siinä on ns. 2. asteen muodonmuutokset otettu huomioon lähteessä /10/ johdetulla tavalla. Elementin jäykkyysmatriisissa on

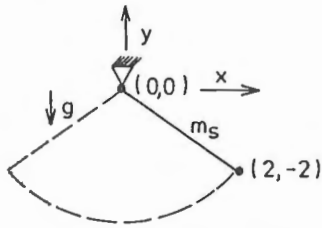
mukana jännitystilasta riippuva osuus. Sen mukanaolon on todettu parantavan stabiilisuutta ja tarkkuutta /10/. Asia on tällä hetkellä jatkotutkimusten kohteena.



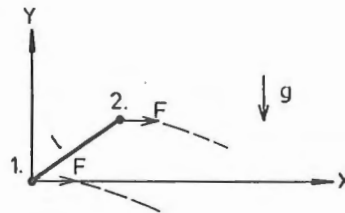
a RISTIKKO



b KÖYSI



c HEILURI (testaustehtävä)



d LENTÄVÄ SAUVA (testaustehtävä)

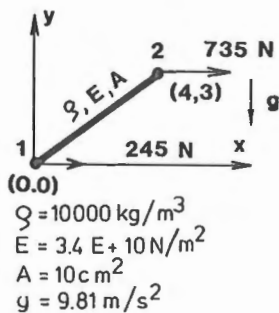
Kuva 5. Tehtävätyypit joihin teoriaa on sovellettu.

Koska tässä artikkelissa on pääkohteena efektiivisen massan menetelmän esittäminen, painotetaan seuraavissa esimerkkivalinnoissa sovellusten verrattain suuren laaja-alaisuuden esittelyä. Esimerkkirakenteiden toimintaa sinänsä ei siten tutkita kovin syvällisesti. Tämän artikkelin liite-osassa on täydennyksenä tutkittu hieman elementtimäärän ja stabiilisuuden yhteyttä erään numeerisen esimerkin valossa.

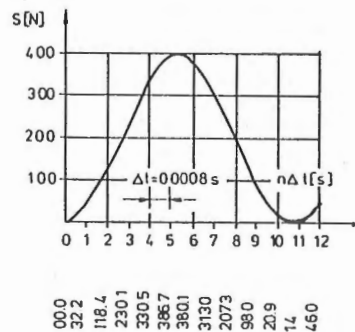
Sovellusesimerkkien yhteisenä piirteenä on GERDA I -ohjelman edellytys: ohjelman nykyisestä rakenteesta johtuen ulkoisten kuormien tulee olla muuttumattomia. Toistaiseksi tehtävät ovat 2-ulotteisia. Liiketilän käynnistäjänä on alkuhetkellä vallitseva voimien epätasapaino. Rakenteet ovat maan vetovoiman kiihtyvyydentässä $9,81 \text{ m/s}^2$, jonka suunta on y-akselin negatiivinen suunta. Elementin massamatriisi voi olla joko diagonaalinen tai ei-diagonaalinen. Vaimennusta ei huomioida esimerkeissä.

N:o 1. Vapaa sauva translaatioliikkeessä

Tässä esimerkissä on seurattu tuettoman, mahdollisimman yksinkertaisen rakenteen liikettä ja rasituksia. Rakenteena on suora sauva (kuva 6) xy-tasossa. Sauvan tiheys $\rho = 10000 \text{ kg/m}^3$ pinta-ala $A = 10 \text{ cm}^2$ ja kimmomoduli $E = 34000 \text{ N/mm}^2$. Pituus l määräytyy annettujen päiden solmukoordinaattien avulla ja on alussa 5 m . Sauvaan vaikuttaa maan vetovoiman lisäksi vaakavoimat (x-akselin suunnassa) kumpaankin päähän $F_{x1} = 245 \text{ N}$ ja $F_{x2} = 735 \text{ N}$. Alkunopeudet ovat nolliä. Vaimennusta ei ole.



a) SAUVA



b) SAUVAVOIMA

Kuva 6. Esimerkkitehtävä n:o 1.

Tulokset

GERDA I-ohjelmalla voitiin laskea efektiivisen massan menetelmää käyttäen solmujen 1 ja 2 siirtymät ja sauva voiman arvot aika-askelittain. Menetelmässä tarvittava kääntematriisi (ks. (19)) on olemassa, vaikka jäykkyysmatriisi ilmeisesti on singulaarinen tukien puuttumisen takia.

Sauva lähtee liikkeelle täysin odotetulla tavalla noudattaen pystyliikkeen osalta maan vetovoiman kiihtyvyyttä ja vaakasuuntaisen liikkeen osalta päihin vaikuttavien voimien takia aiheutuvan kiihtyvyyden mukaista liikettä. Päihin vaikuttavien voimien erilaisen suuruuden takia sauva lähtee kiertymään. Samasta syystä syntyy sauvaan sisäinen aksiaalinen värähtely (huom. elementtimalli). Seuraavassa on eritelty numeerisia tuloksia.

Tarkastellaan liikkeitä esim. hetkellä $t = 0,0640$ s.

Saadut siirtymät ovat $\Delta x_1 = 0,0329$ m, $\Delta x_2 = 0,0474$ m, $\Delta y_1 = -0,0105$ m ja $\Delta y_2 = -0,0297$ m. Sauvan massa $m_s = \rho A l = 10000 \cdot 10 \cdot 10^{-4} \cdot 5$ kg = 50 kg. Voimat yhteensä x-suunnassa ovat 245 N + 735 N = 980 N. x-suunnan kiihtyvyys on siten $a_x = 980$ N/50 kg = $19,6$ m/s². Sauvan tulisi olla liikkunut määrä $s_x = 0,5 a_x t^2 = 0,5 \cdot 19,6 \cdot 0,0640^2$ m = $0,04014$ m x-suunnassa. Keskiarvo $(\Delta x_1 + \Delta x_2)/2 = (0,0329 + 0,0474)m/2 = 0,04015$ m GERDA I:n tuloksista on $0,00001$ m:n erolla sama. Helposti voi todeta yhtäpitävyyden myös y-suunnassa, jossa $a_y = -9,81$ m/s².

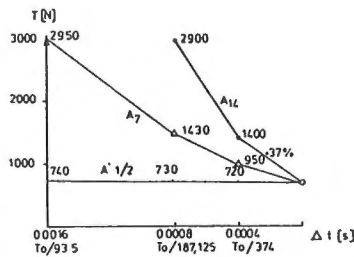
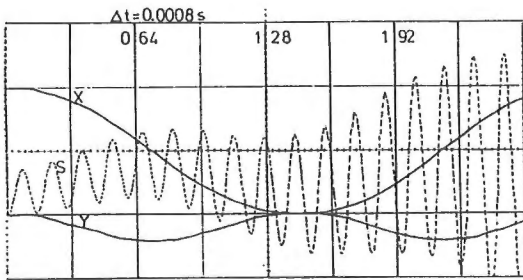
Samalla ajan hetkellä on sauvavoima $S = 362,4056$ N ja sauvan pituus $l = 5,0000533$ m (tietokoneohjelman tuloksina). Suhteellinen venymä $\epsilon = 1,066 \cdot 10^{-5}$ ja jännitys $\sigma = \epsilon E = 1,066 \cdot 10^{-5} \cdot 34000$ N/mm² = $0,36244$ N/mm². Sauvavoima = $0,36244 \cdot 10 \cdot 10^2 = 362,44$ N. Tämä sauvan hetkellisestä pituudesta laskettu voima on siten lähes sama kuin tietokoneen tulos.

Sauvavoima ei pysy vakiona. Vaihtelu on kuvassa 6 b piirretty näkyviin. Arvot on tulostettu jokaisen aika-askeleen $0,0008$ s jälkeen. Maksimiarvo on graafisen kuvion 6b mukaan $n. 390$ N. Tarkastellaan ulkoisen voiman sauvan suuntaista komponenttia: solmussa 1 se on $0,8 \cdot 245 = 196$ N ja solmussa 2 $0,8 \cdot 735 = 588$ N. Näiden erotus $588 - 196 = 392$ N on tasapainotettava hitausvoimilla sauvassa. Tulos 390 N vastaa graafisen tarkkuuden puitteissa tätä erotusta 392 N. (Mikäli sauvan toinen pää olisi kiinnitetty, tulisi sauvavoiman olla teoreettisesti tasan 2-kertainen huippuarvoltaan. Tässä se voi olla vain 1-kertainen.

N:o 2. Heilurisauva

Tehtävässä lasketaan yläpäästään kiinnitetyn, massaltaan $99,84$ kg, kimmomoduliltaan $4,7 \cdot 10$ N/m², alaltaan $0,00353$ m² ja pituudeltaan $2,8284$ m olevan sauvan heilahdustaan vetovoiman kiihtyvyydentilässä. Heilahdus lähtee 45° :een kaltevuudesta. Sauva on aluksi tuettu pystyvoimalla alapäästään ja sauvavoima on nolla. Hetkellä $t = 0$ tukeva voima poistetaan ja sauva heilahtaa vapaasti ilman vaimennusta. Kun massa on ajateltu sauvan pituudelle jakaantuneeksi, on analyyttinen heilahdusaika $T_{45} = 1,0405 T_0$, jossa T_{45} on 45 asteen irroituskulmaa vastaava heilahdusaika ja $T_0 = 2\pi \sqrt{J/mgh}$ on pienen heilahduksen heilahdusaika. Siinä $J = m_s l^2/3 = 99,84 \cdot 2,8284^2/3$ kgm² = $266,24$ kgm² (massapisteen m_s etäisyys heilahdusakselista, ks. esim. Rakennustekniikan käsikirja 1). Näillä arvoilla analyyttinen heilahdusaika $T_{45} = 1,0405 \cdot 2\pi \sqrt{266,24/(99,84 \cdot 9,81 \cdot 2,8284/2)} = 2,8663$ s. Akselin suuntaisen sisäisen värähtelyn värähdysaika on analyyttisesti $T_a = 2\pi \sqrt{m/k}$. Siinä $m = m_s/3 = 33,28$ kg ja $k = EA/l = 58658$ N/m, jolloin $T_a = 0,1497$ s. Piirturituloksesta 7a saadaan värähdysajaksi $0,15$ s 10 jakson keskiarvona. Tulosta voi pitää lukemistarkkuuden puitteissa tarkkana.

Kuvassa 7a on aika-askelta $\Delta t = 0,0008$ s käyttäen laskettu, piirturilla tulostettu sauvan alapään (x,y)-koordinaatti (2,-2)-koordinaatista lähtien. 1 ruutu on 2 m. Molemmat siirtymät on mitattu ruudukon keskiviivasta. Kuviosta voi lukea puolijakson heilahdusajan n. 1,44 s, joka vastaa heilahdusaikaa 2,88 s, kun edellä laskettu analyttinen on 2,8663 s. Sauvavoiman pitkittäisvärähtelyä kuvaa saman piirturituloksen katkoviiva. Sen nollassa on toiseksi alin vaakaviiva. Voiman ensimmäisen huipun teoreettinen arvo on $m_S/2 \cdot g/\cos 45^\circ = 693$ N. Graafisesta tuloksesta on saatu 730 N. Kuten kuvasta 7a havaitaan, amplitudi kasvaa ajan mukana. Pienemmällä aika-askeleella kasvu on todettu vähäisemmäksi. Kuviossa 7 b on yhdistetty eri askelilla laskettujen tulosten voima-arvoja. Aika-askeleen Δt merkitys tarkkuus- ja stabiiliustekijänä käy siitä hyvin ilmi.

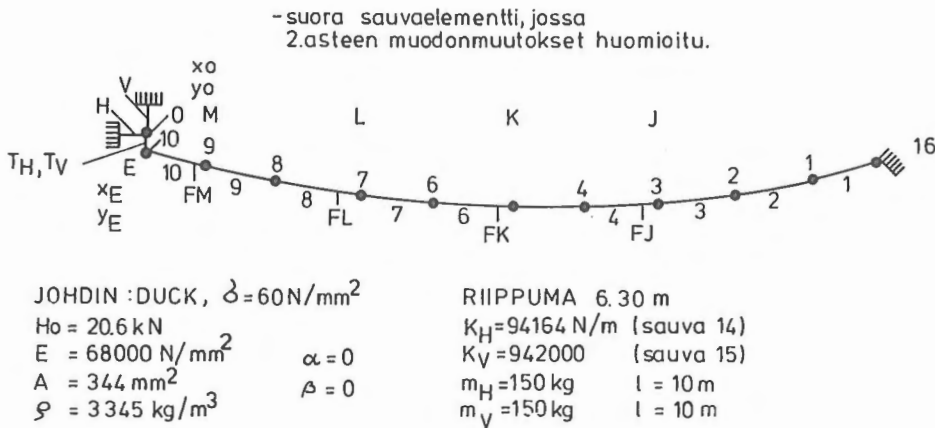


Kuva 7 a). Heiluritulos. $\Delta t = 0,0008$ s.

b) Amplitudin muuttuminen jakson järjestysnumeron ja Δt :n funktiona.

N:o 3. Voimajohdon katkeaminen

Kuvassa 8 on eräs lähteessä /10/ laskettu rakennemalli. Voimat ja siirtymät on tulostettu piirturilla, koska on haluttu tutkia eri suureiden, kuten mm. vaaka- ja pystyvoimien H ja V, elementtivoimien FM, FL, FK ja FJ, siirtymien x_0 ja y_0 , x_E ja y_E ja myös keskipisteen K pystykoordinaatin eli riippuman vaihtelua ajan mukana riittäväksi arvioidulla tarkkuudella. Piirturin käytöllä on voitu saavuttaa 16 eri muuttujan dynaamisen käyttäytymisen seuranta kohtuullisella 5%:n tarkkuudella numeeriseen arvoon verrattuna ja saada näin käsitystä ennen analysoimattoman ilmiön tekijöiden suuruusluokista, esiintymisjärjestyksestä ja mahdollisesta vaikutuksesta toisiin.



Kuva 8. 10 elementin kannatusjänne.

Kun lähtöarvoina käytettiin 300 m:n jänteistä Duck-teräsalumiinijohdinta, jossa riippuma on 6,3 m (lähtöarvot, kts. kuva 8) saatiin vaakavoiman huippuarvoiksi 23 kN hetkellä $t = 0,94 \text{ s}$, 32 kN hetkellä $t = 1,18 \text{ s}$, 38 kN hetkellä $t = 1,45 \text{ s}$ ja 45 kN hetkellä $t = 1,69 \text{ s}$. Käytetty aika-askel oli 0,0008 s ja massamallina elementille tasan jakautunut massa. Voima $H_0 = 20,6 \text{ kN}$ on lähtöarvoissa pisteessä E vasemmalle vaikuttava vaakavoima joka poistetaan hetkellä $t = 0$. ρ on köyden eli elementtien 1-10 ja kolmesta osasta muodostuvan eristimen O-E tilavuuspaino (välillä O-E on kolme yhtä pitkää elementtiä). Eristimen pinta-ala on $0,007175 \text{ m}^2$, kimmomoduli $2,1 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$ ja pituus $3 \times 0,5 \text{ m} = 1,5 \text{ m}$. Köyden muoto alkutilassa on tasapainossa oleva paraabeli, jonka keskipiste K on 6,3 m pisteitä E ja 16 alempana. Vaaka- ja pystyjousien H ja V (jousivakiot K_H ja K_V) pituudet ovat 10 m.

Köyden elementin malli oli suora sauvaelementti, jonka jäykkyydsmatriisissa on tavanomaisen aksiaalisen kimmojäykkyyden lisäksi huomioitu jännitystilasta riippuva geometrinen jäykkyys /10/. Jäykkyydsmatriisi uusittiin joka 20. askeleella tässä esimerkissä.

Lähteen /10/ köysilaskelmissa todettiin geometrisen jäykkyydsmatriisin käytön parantavan stabiilisuutta. Samaan suuntaan vaikutti merkittävästi myös keskitetyn massamallin (engl. lumped mass) käyttö jakautuneen massamallin käytön asemesta.

N:o 4. Ristikön värähtely

GERDA I-ohjelmalla on tutkittu lineaarisesti kimmoisan ristikön värähtelyä (kuva 9). Paarteiden pinta-ala on 70 cm^2 ja diagonaalien (myös sauvan 1-2) pinta-ala 35 cm^2 . Kimmomoduli on $7 \cdot 10^9 \text{ N/mm}^2$. Ristikön jänne on 12 m, harjakorkeus 1,656 m ja lapekaltevuus 1:5. Koordinaatit alussa ovat:

solmu 1 :	x =	6,000 m	ja	y =	0,000 m
2:		5,230 m			0,610 m
3:		4,450 m			0,000 m
4:		3,000 m			1,056 m
5:		1,750 m			0,000 m
6:		0,000 m			1,656 m

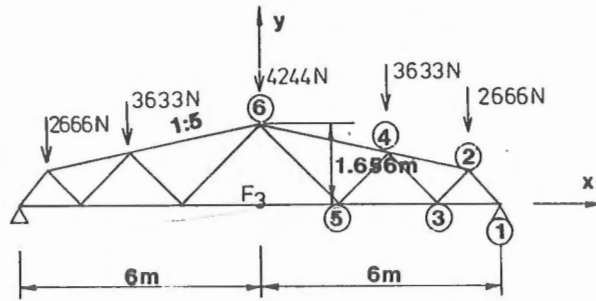
Ristikko on y-akselin suhteen symmetrinen.

Laskelma suoritettiin siten, että hetkellä $t = 0$ ristikko on yllä mainittujen koordinaattien osoittamassa muodossa. Samalla alkavat vaikuttaa omapaino ja kuvassa 9a näytetyt pystykuormat yläpaarteiden solmuihin alaspäin: solmussa 2 2666 N, solmussa 4 3633 N ja solmussa 6 4244 N ja toisella lappeella samat symmetrisesti. Omapaino lasketaan tiheyden (2500 kg/m^3) sauvojen pituuksien ja pinta-alojen avulla. Tiheys on huomioitu tarkoituksellisesti kuivan puun arvoa suurempana, koska näin saadaan tähän tehtävään mukana toimivaksi suurempi pysyvä kuorma todellisen tilan jäljittelemiseksi.

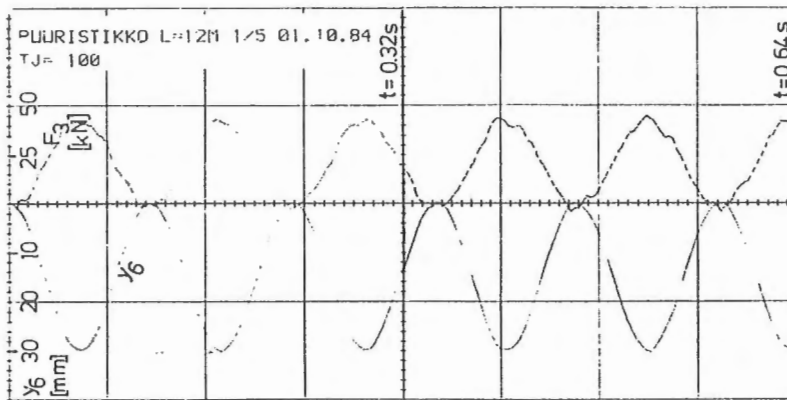
Kuvassa 9b on näytetty pisteen 6 taipuma ja voiman F_3 vaihtelu piirturitulostuksena. Luku $TJ = 100$ ilmoittaa tulostuksen tapahtuneen lasketun 100 pisteen avulla "tulostusruutua" kohti (tässä ajan hetkeen $t = 0,32 \text{ s}$ asti toinen ruutu on välillä $0,32-0,64 \text{ s}$). Voima F_3 saavuttaa arvon n. 43 kN ja taipuma n. 30 mm enimmäisarvon. Värähdysaika on n. 0,116 s. Käytetty aika-askel oli 0,0016 s. Tässä esimerkissä ei jäykkyysmatriisia muutettu lainkaan.

Tuloksissa todettiin, että amplitudi ei muuttunut laskennassa toisinkuin heiluriesimerkissä. y_6 :n vaihtelu muistuttaa sinifunktiota. F_3 :n vaihteluun tuo siitä poikkeamista ilmeisesti vieristen sauvojen erilainen värähtelyn vaihekulma. Tässäkin tehtävässä käytettiin keskitetyn massan mallia.

Edellä esitetyt esimerkit ovat kaikki tasotehtäviä. Ohjelma GERDA I on sittemmin muutettu 3-dimensioisten tehtävien ratkaisuun sopivaksi. Lähteessä /13/ on muutetulla versiolla ratkaistu eräs sovellus: yksittäisen köyden heilahtelu 3-ulotteisessa tilassa köyden akselia vastaan kohtisuoran pakkovoiman vaikutuksesta.



a) RAKENNEMALLI



b) VÄRÄHTELYN KUVAAJIA

Kuva 9. Esimerkkiristikon rakennemalli (a). Värähtelyn kuvaajia (b).

LÄHDELUETTELO

- [1] Ylinen, A., Kimmo- ja lujuusoppi I, WSOY, Porvoo 1965.
- [2] Ylinen, A., Kimmo- ja lujuusoppi II, WSOY, Porvoo 1970.
- [3] Zienkiewicz, O.C., The Finite Element Method (third edition), McGraw-Hill Book Company (UK) Ltd. 1977.
- [4] Grundmann, Stein, Wunderlich (toim.): Finite Elemente, Anwendungen in der Baupraxis. Ernst & Sohn, Berlin 1985.

- [5] Bathe, Ramm, Wilson, Finite Element Formulations for Large Deformation Dynamic Analysis, Int. Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 9, No. 2 (1975).
- [6] Mondkar, D.P. and Powell, G.H., Finite Element Analysis of Non-linear Static and Dynamic Response, Int. Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 11, 499-520, (1977).
- [7] Wilson, E.L. and Clough, R.W., Dynamic Response by Step-by-step Matrix Analysis, Paper n:o 45. Symposium on the Use of Computers in Civil Engineering, Lisbon 1962.
- [8] Belytschko, T., Mullen, R., Explicit Integration of Structural Problems, Papers presented at the Int. Conf. on Finite Elements in Nonlinear Solid and Structural Mechanics held at Geilo, Norway in Aug. 1977. Tapir, Trondheim (1978).
- [9] Paz, Mario, Structural Dynamics, Theory and Computation, Van Nostrand Reinhold Company, New York, NY.
- [10] Aula, Antti, Lineaarisen kiihtyvyyden menetelmä ja köyden dynamiikka. Lisensiaattityö, Oulun yliopisto, Oulu 1984.
- [11] Huston, R.L. and Kamman, J.W., Validation of Finite Segment Cable Models, Computers & Structures Vol. 15 No. 6, pp. 653-660, 1982, Great Britain.
- [12] Kaasinen, Harri: Suorien integrointimenetelmien vertailu stabilisuus- ja tarkkuusominaisuuksien suhteen. Rakenteiden Mekaniikka Vol. 14, No. 1 1981.
- [13] Aula, Antti: Kokoojaköyden heilahtelu dynaamisten oikosulkuvoimien vaikutuksesta. Sähkö-Electricity and Electronics, Vol. 58, No. 8, elokuu 1985.

Antti Aula, tekn.lis., Oulun yliopisto, Rakentamistekniikan osasto

LIITE

STABILISUUDESTA JA VAPAUASSTEMÄÄRÄSTÄ

YHDEN VAPAUASSTEEN VÄRÄHTELIJÄ

Kriittinen aika-askel on määritelty yhden vapausasteen lineaariselle värähtelijälle homogeenisen yhtälön

$$m\ddot{q} + c\dot{q} + kq = 0 \quad (L1)$$

avulla mm. lähteessä /3/. Yhtälön (L1) kuvaaman värähtelyn ominaiskulmanopeus $\omega = \sqrt{k/m}$ ja ominaisvärähdysaika $T_0 = 2\pi/\omega$. Kriittinen aika-askel on /3/:n mukaan tällöin

$$\Delta t_{kr} = \frac{\sqrt{3}}{\pi} T_0 \quad (L2)$$

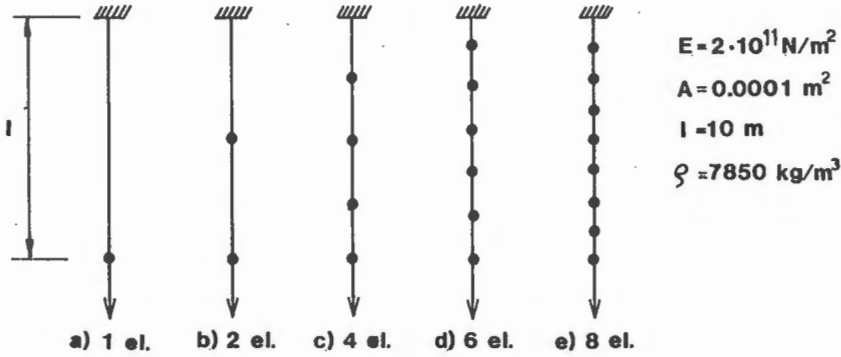
kun käytetään yhtälöiden (7) ja (8) mukaista approksimaatiota numeeriselle aikaintegroinnille. Menetelmä on stabiili, jos laskennan aika-askel on pienempi kuin kriittinen aika-askel. Menetelmän sanotaan olevan ehdollisesti stabiili (/3/, /12/).

Kun analysoidaan useamman vapausasteen systeemiä, olisi osattava arvioida suurin kulmanopeus ω ko. systeemissä. Poikkeako silloin aika-askel vapausastemäärän takia (L2):n antamasta teoreettisesta arvosta? Eräs huomionarvoinen viite aika-askeleen valinnassa on Irons'in tutkimus /3/, jonka mukaan systeemin korkein ominaisvärähdystaajuus ei voi ylittää yksittäisen, korkeimman ominaistajuuden omaavan elementin ominaistajuutta. Jos valitaan aika-askel sen mukaan, saatetaan joutua käyttämään liian pientä aika-askelta. Se hidastaa laskelmien suoritusta. Aina ei kuitenkaan voida valita askeleen pituutta stabiiliuden mukaan, vaan se on määrättävä tarkkuusvaatimuksen perusteella. Tässä liite-osassa tarkastellaan näitä kahta asiaa erään esimerkin valossa.

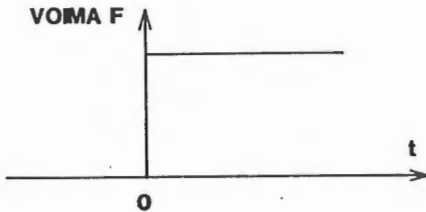
VAPAUASSTEMÄÄRÄN VAIKUTUS STABILISUUTEEN ERÄÄSSÄ TAPAUKSESSA

Vapausastemäärän vaikutuksen selvittämiseksi suoritettiin yksinkertaisen mallin (kuva L1) analyysi vaihdellen elementtimäärää yhdestä kahdeksaan. Rakennemalli on suora, lineaarisesti kimmainen sauva, jonka värähtelyn akselinsa suunnassa aiheuttaa hetkeä

$t=0$ alkaen toisessa päässä vaikuttava vakiovoima F (ks. kuva L2). Voima F antaa värähtelylle amplitudin. Taajuus määräytyy massan m_s ja jäykkyyden k mukaan; $m_s = \rho A l$ ja $k = EA/l$ (ks. kuva L1). Rakenne laskettiin GERDA I -tietokoneohjelmalla käyttäen solmuihin keskitetyn massan mallia.



Kuva L1. Lasketut mallit.



Kuva L2. Aktiovoima F .

Laskelmat suoritettiin sellaisten aika-askelrajojen löytämiseksi, joiden väliin laskelmassa todettava kriittinen aika-askel jää. Näistä pitempi, stabiili aika-askel on merkitty Δt_2 :lla ja lyhyempi ei-stabiili Δt_1 :llä. Laskelman ei-stabiilisuus on todettu tietokonelaskelman aikana syntyneenä numeerisen laskutarkkuuden ylityksenä (overflow). Ajan hetkeä, jolloin se tuli esiin, ei ole kirjattu eikä sen merkitystä arvioitu.

Saatuja ala- ja ylärajaa ei etsitty minkään ennalta asetetun tarkkuustoleranssin puitteissa. Tavoitteena oli löytää suuntaa-antava tulos kriittisen aika-askeleen muuttumisesta elementtimäärää ja siten vapausasteita lisättäessä.

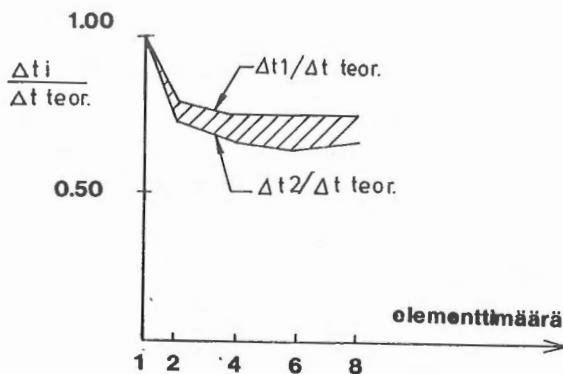
Taulukossa 1 on koottu numerotulokset: yhden elementin ominaisvärähdysaika T_0 , teoreettisesti kaavan (L2) mukaan odotettavissa oleva stabiilisuusrajan ilmaiseva eli kriittinen aika-askel Δt , laskennassa saadut, kokeelliset aika-askeleet Δt_1 ja Δt_2 sekä näiden lasketut suhteet edellä mainittuun teoreettisesti saatuun askelpituuteen. Värähdysajat T_0 on laskettu analyttisesti kaavasta $T_0 = 2\pi/\omega$ eli $T_0 = 2\pi\sqrt{m/k}$. Siinä $m = m_S/2n$. Massa on ajateltu jaetuksi kahtia sauvan pään solmuille. Luku n on elementtimäärä.

Taulukko 1.

Suure \ elementtimäärä	1	2	4	6	8
Elementin ominaisvärähdysaika T_0	0.00880	0.00440	0.00220	0.00147	0.00110
Teor. stab. aika-askel $\Delta t = \frac{\sqrt{3}}{\pi} T_0$	0.00485	0.00243	0.00121	0.00081	0.00061
Kokeellisesti ei-stabiili askel Δt_1	0.0049	0.0019	0.0009	0.0006	0.00045
Kokeellisesti stabiili askel Δt_2	0.0048	0.0018	0.0008	0.0006	0.0004
Suhde $\Delta t_1 / \Delta t_{teor.}$	1.010	0.78	0.74	0.74	0.74
Suhde $\Delta t_2 / \Delta t_{teor.}$	0.99	0.74	0.66	0.63	0.66

Kuvassa L3 on piirrettyä taulukon 1 tiedot. Tulos osoittaa, että yhdellä elementillä, jolla on 1 vapausaste yhdessä suunnassa, ovat analyttinen ja laskennassa todettu askel 1%:n tarkkuudella samoja. Elementtimäärän lisääntyessä lyhenee aika-askel ensin nopeammin (2, 4 elementtiä) ja sitten hitaammin (6, 8 elementtiä), kuin mitä analyttinen elementin värähdysaika T_0 antaa odottaa. Kuvan L3 perusteella näyttää edelleen siltä, että kriittinen aika-askelten suhde lähenee jotain raja-arvoa elementtimäärän yhä kasvaessa.

Sen tutkiminen, voidaanko havainnolle löytää teoreettisia perusteita, jätetään avoimeksi.

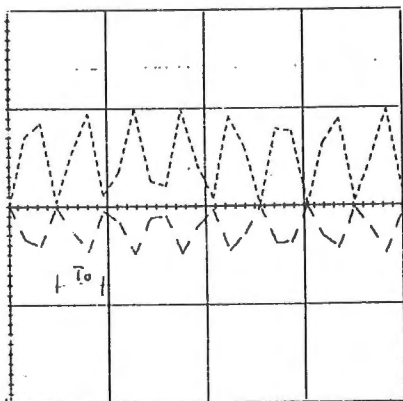


Kuva L3. Rajat, joiden välissä esimerkin stabiili aika-askel on.

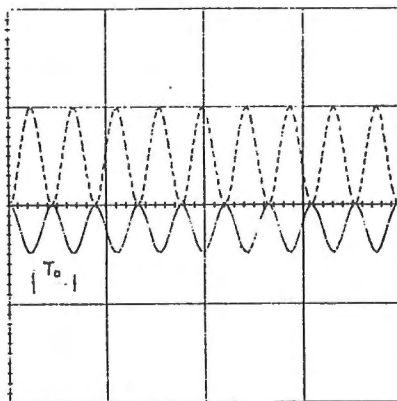
STABIILISUUDESTA JA TARKKUUDESTA

Stabiilisuus on numeeristen integrointimenetelmien kyseessä ollen tärkeä peruskysymys dynaamisen vasteen analyysissä. Tehtävän laadusta riippuen se voi sisältää laajan skaalan taajuuksia, korkeita ja alhaisia. Tämän artikkelin esimerkkien laskennassa saatujen kokemusten perusteella (samoinkuin /10/:ssä) näyttää siltä, että ehdottomasti stabiililla integrointimenetelmällä voitaisiin efektiivisen massan menetelmän yhteydessä saavuttaa etuja varsinkin tehtävissä, joissa taajuuksien skaala on laaja. Tällöin voidaan hyödyntää korkeiden taajuuksien ns. suodattumisilmiötä, joka on mainittu mm. lähteissä /3/ ja /12/.

Jos tarkastellaan tehtävän korkeimpia taajuuksia, ei menetelmän ehdottomalla stabiilisuudella saavuteta sinänsä etua. Tällöin menetelmän tarkkuus eikä stabiilisuus määrää käytettävän aika-askelen. Kuvassa L4 on esimerkkinä esitetty piirturituloskaksina kaksi samalla tarkkuudella laskettua, mutta eri jaolla tulostettua kuvaajaa. Toisessa on 3.1 pistettä (kuva L4a) ja toisessa 11.1 pistettä (kuva L4b) värähdysaikaa T_0 kohti (värähtelijänä kuvan L1 sauva). Selvästikin kuvan L4a tarkkuus on riittämätön. Kaavan (L2) mukainen kriittinen aika-askel on n. 0,55 T_0 , eikä se tulostustarkkuutena myöskään voi olla riittävä.



Kuva L4a. Piirtotarkkuus 25 pistettä/
0,32 s eli 3.1/ T_0 .



L4b) Piirtotarkkuus 100 pistettä/
0,32 s eli 11.1/ T_0 .

JOHTOPÄÄTÖKSET

Näyttää siltä, että tehtävän vapausastemäärällä on selvä vaikutus numeerisen integroinnin tabiilisuuteen. Lasketusta esimerkistä voi arvioida, että havaitun kriittisen aika-askeleen suhde teoreettiseen saattaa lähestyä jotakin raja-arvoa, kun elementtimäärää kasvatetaan pitäen elementtien ominaisuudet keskenään yhtäläisinä.

Analysoitaessa tehtävän korkeimpia taajuusalueita, ei numeerisen integroinnin stabiiliuden ehdollisuudesta ole sinänsä ehdottomuuteen verraten ilmeisesti haittaa tietokonealokennassa. Kriittinen aika-askel on kuitenkin värähtelyn kuvaamisen kannalta pituudeltaan riittämätön värähdysaikaan verrattuna. Värähtelyn kuvaamiseen esimerkiksi sinimuotoisena tarvitaan aika-askel, joka on $1/10 \dots 1/20$ ko. värähtelyn kriittisestä aika-askeleesta lineaarisen kiihtyvyyden menetelmää käytettäessä. Analysoitaessa keski- ja alataajuuksia on perusteltua arvioida ehdottomasti stabiili integrointimenetelmä tehokkaammaksi tietokoneen käytön kannalta.

Artikkelissa on kuvattu efektiivisen massan menetelmää dynaamisen vasteen analyysissä. Menetelmä edellyttää toimiakseen askelmenetelmänä numeerista integrointia, mutta ei ole kuitenkaan sidottu sinänsä esimerkiksi lineaarisen kiihtyvyyden menetelmään: myös muita muotoja, kuten esimerkiksi vakiokiihtyvyyttä askeleen aikana voidaan käyttää.

Jatkotutkimuksena on käynnistetty ehdottomasti stabiilin integrointimenetelmän käyttö ko. teorian yhteydessä.