

# UUSI SAINT VENANTIN VÄÄNNÖN NUMEERINEN RATKAISUTAPA

Jukka Aalto

Rakenteiden Mekaniikka, Vol. 18  
No. 3 1985, s. 3...27

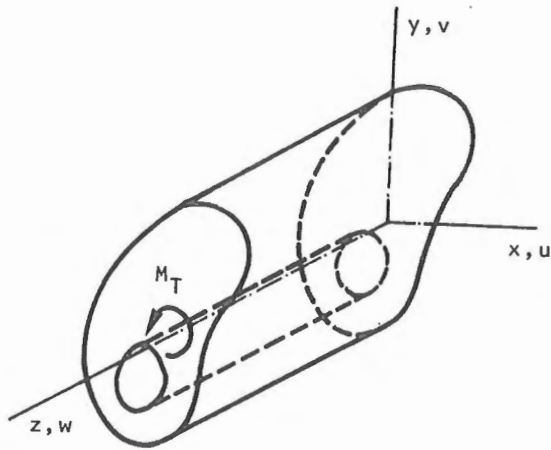
**TIIVISTELMÄ:** Artikkelissa käsitellään Saint Venantin vääntöä elementtimenetelmällä käyttäen pienimmän neliön keinoa. Menetelmässä ovat perustuntemattomina vääntöjännitykset. Poikkipinnan käyristymisfunktion ja vääntöjännitysfunktion määrittämistä varten kehitetään jälkikäsitelymenetelmät.

## JOHDANTO

Tarkastellaan suoran särmiön vääntöä De Saint Venantin vääntöteorian /1/ otaksumien mukaisesti. Tavanomaiset numeeriset ratkaisumenetelmät perustuvat formulaatioihin, joissa joko ns. käyristymisfunktio (engl. warping function) tai siten ns. vääntöjännitysfunktio on perustuntemattomana. Elementtimenetelmää käytettäessä diskretoinnin lähtökohtana ovat vastaavasti potentiaalienergian minimiperiaate (esimerkiksi lähteet /2/ ja /3/) tai komplementaarisen energian minimiperiaate (esimerkiksi lähteet /2/ ja /4/). Tässä artikkelissa pidetään perustuntemattomina suoraan vääntöjännityksiä, joita koskeva yhtälösystemi ratkaistaan elementtimenetelmää ja ns. modifioitua pienimmän neliön keinoa /5/ käyttäen.

Saadun vääntöjännitysratkaisun ominaisuudet mahdollistavat yksinkertaisen viivaintegrointiin perustuvan menettelyn, jolla voidaan jälkikäteen määrittää sekä käyristymisfunktio että vääntöjännitysfunktio. Tietävästi esitettyä menetelmää ja siihen liittyvää jälkikäsitelymenetelmää vääntöprobleeman ratkaisemiseksi ei ole aikaisemmin esitetty.

Työ kuuluu osana Teknillisen korkeakoulun mekaniikan laitoksella vireillä olevaan tutkimukseen, jossa selvitetään erilaisten jäännösmenetelmien ja pienimmän neliön keinon käyttöä elementtimenetelmässä /5/, /6/, /7/, /8/, /9/.



Kuva 1. Vääntömomentin  $M_T$  rasittama sauva.

#### VÄÄNNÖN YHTÄLÖT

Eräitä lausekkeita

De Saint Venantin vääntöteorian [1] mukaan sauvan (kuva 1) siirtymäkomponentit ovat muotoa

$$u = -\theta yz, \quad v = \theta xz, \quad w = \theta \phi(x, y), \quad (1)$$

missä  $\theta$  on vääntymä ja  $\phi$  on ns. käyritysfunktio. Teoria olettaa, että sauvan poikkileikkaus ei muuta muotoaan ja että sauvan akselin suuntainen siirtymä  $w$  on sama kaikissa poikkileikkauksissa. Lineaarisen kimmoteorian siirtymien ja muodonmuutoskomponenttien välisistä yhtälöistä ja siirtymäotaksumasta (1) seuraa, että ainoat nollasta eroavat muodonmuutoskomponentit ovat  $\gamma_{xz}$  ja  $\gamma_{yz}$  ja niille saadaan lausekkeet

$$\begin{aligned} \gamma_x &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \theta \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} - y \right), \\ \gamma_y &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \theta \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} + x \right), \end{aligned} \quad (2)$$

missä on käytetty lyhennysmerkintöjä  $\gamma_x = \gamma_{xz}$  ja  $\gamma_y = \gamma_{yz}$ . Isotrooppisen aineen yleistetystä Hooken laista ja tuloksista (2) seuraa edelleen, että ainoat nollasta eroavat jännityskomponentit, ns. vääntöjännitykset, ovat  $\tau_{xz} = \tau_x$  ja  $\tau_{yz} = \tau_y$  ja niille saadaan lausekkeet

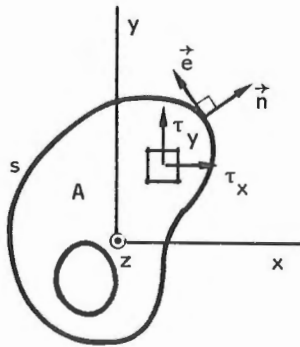
$$\begin{aligned}\tau_x &= G\gamma_x = G\theta\left(\frac{\partial\phi}{\partial x} - y\right), \\ \tau_y &= G\gamma_y = G\theta\left(\frac{\partial\phi}{\partial y} + x\right).\end{aligned}\tag{3}$$

#### Vääntöjännitysten reuna-arvoprobleema

Sijoittamalla kimmoteorian tasapainoyhtälöihin ainoat nollasta eroavat jännityskomponentit  $\tau_{xz} = \tau_x$  ja  $\tau_{yz} = \tau_y$  sekä otaksumalla, että sauvaan ei vaikuta tilavuusvoimia, nähdään  $x$ - ja  $y$ -akselin suuntaisten yhtälöiden toteutuvan identtisesti ja  $z$ -akselin suuntainen yhtälö saa muodon

$$\frac{\partial\tau_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_y}{\partial y} = 0 \quad \text{alueessa } A.\tag{4}$$

Tätä yhtälöä nimitetään vääntöjännitysten tasapainoyhtälöksi ja alue  $A$  merkitsee sauvan poikkipintaa (kuva 2).



Kuva 2. Sauvan poikkileikkaus.

Ratkaistaan ensimmäisestä yhtälöstä (3) termi  $\partial\phi/\partial x$  ja toisesta termi  $\partial\phi/\partial y$  (ks. kaavat (7)). Derivoidaan  $\partial\phi/\partial x$   $y$ :n suhteen ja  $\partial\phi/\partial y$   $x$ :n suhteen. Syntyvillä lausekkeilla tulee olla sama arvo. Tästä ehdosta saadaan yhtälö

$$\frac{\partial\tau_y}{\partial x} - \frac{\partial\tau_x}{\partial y} - 2G = 0 \quad \text{alueessa } A. \quad (5)$$

Liukukerroin  $G$  on otaksuttu tässä paikan suhteen vakioksi. Yhtälö (5) on vääntöjännitysten kompatibiliteettiehto.

Kirjoittamalla kimmoteorian reunaehtoyhtälöt sauvan sivupinnalla, sijoittamalla niihin ainoat nollasta eroavat jännityskomponentit  $\tau_{xz} = \tau_x$  ja  $\tau_{yz} = \tau_y$  sekä otaksumalla sauvan sivupinta kuormittamattomaksi nähdään  $x$ - ja  $y$ -akselien suuntaisten yhtälöiden toteutuvan identtisesti ja  $z$ -akselin suuntainen yhtälö saa muodon

$$\tau_n \equiv n_x \tau_x + n_y \tau_y = 0 \quad \text{reunalla } s, \quad (6)$$

missä reuna  $s$  merkitsee sauvan poikkipinnan reunakäyrää (kuva 2) ja  $n_x$  ja  $n_y$  ovat sen yksikkönormaalien komponentit.

Yhtälöt (4) ja (5) muodostavat ensimmäisen kertaluvun osittaisdifferentiaaliyhtälöparin ja yhtälö (6) vastaavan reunaehdon vääntöjännitysten  $\tau_x$  ja  $\tau_y$  ratkaisemiseksi. Tässä artikkelissa esitetty pienimmän neliön keinon mukainen elementtimenetelmäformulaatio vääntöjännityskentän määrittämiseksi perustuu näihin yhtälöihin.

Käyristymisfunktion, vääntöjännitysfunktion ja vääntömomentin määrittäminen, kun vääntöjännitykset tunnetaan

Käyristymisfunktiolle  $\phi$  saadaan yhtälöistä (3)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial\phi}{\partial x} &= \frac{\tau_x}{G\theta} + y \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} &= \frac{\tau_y}{G\theta} - x \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Ns. vääntöjännitysfunktio  $\psi$  määritellään kaavoilla

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial\psi}{\partial x} &= -\tau_y \\ \frac{\partial\psi}{\partial y} &= \tau_x \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Käyristymisfunktio kuvaa viimeisen kaavan (1) perusteella vakiokerrointa vaille aksiaalista siirtymää. Vääntöjännitysfunktio on funktio, jonka tasavälein piirretyt tasa-arvokäyrät karakterisoivat poikkileikkauksen leikkausjännityskenttää. Niiden suunta yhtyy vääntöjännitysvektorin  $\vec{\tau} = \tau_x \vec{i} + \tau_y \vec{j}$  suuntaan ja niiden välinen etäisyys on sitä pienempi, mitä suurempi on resultoiva leikkausjännitys  $\tau = \sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2}$  niiden välillä.

Jos käyristymisfunktion arvo pisteessä  $P_0: (x_0, y_0)$  tunnetaan, voidaan sen arvo pisteessä  $P: (x, y)$  määrittää viivaintegraalina

$$\phi = \phi_0 + \int_{P_0}^P \frac{d\phi}{ds} ds \equiv \int_{P_0}^P (e_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + e_y \frac{\partial \phi}{\partial y}) ds, \quad (9)$$

missä  $e_x$  ja  $e_y$  ovat integroimistien  $s$  suuntaisen yksikkövektorin komponentit ja integrointi on riippumaton tiestä. Vastaava kaava vääntöjännitysfunktiolle on

$$\psi = \psi_0 + \int_{P_0}^P (e_x \frac{\partial \psi}{\partial x} + e_y \frac{\partial \psi}{\partial y}) ds. \quad (10)$$

Ottamalla huomioon yhtälöt (7) ja (8) saadaan näistä

$$\phi = \phi_0 + \int_{P_0}^P \left[ e_x \left( \frac{\tau_x}{G\theta} + y \right) + e_y \left( \frac{\tau_y}{G\theta} - x \right) \right] ds, \quad (11)$$

$$\psi = \psi_0 + \int_{P_0}^P (-e_x \tau_y + e_y \tau_x) ds. \quad (12)$$

Kaavoja (11) ja (12) voidaan käyttää käyristymisfunktion ja vääntöjännitysfunktion määrittämiseen kun vääntöjännityskenttä on tunnettu. Tässä artikkelissa esitetty jälkikäsittelemenetelmä käyristymis- ja vääntöjännitysfunktion määrittämiseksi perustuu näihin kaavoihin.

Vääntömomentille saadaan kuvan 2 perusteella lauseke

$$M_T = \int_A (\tau_y x - \tau_x y) dA. \quad (13)$$

Lauseketta (13) voidaan käyttää vääntömomentin  $M_T$  määrittämiseen, kun vääntöjännityskenttä on tunnettu.

## VÄÄNTÖTEHTÄVÄN RATKAISEMINEN

Pienimmän neliön keino

Vääntöjännitysten tasapainoyhtälöä (4) ja kompatibiliteetti yhtälöä (5) vastaava tavanomainen pienimmän neliön funktionaali on

$$\pi(\tau_x, \tau_y) = \frac{1}{2} \int_A \left[ \left( \frac{\partial \tau_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \tau_y}{\partial x} - \frac{\partial \tau_x}{\partial y} - 2G\theta \right)^2 \right] dA. \quad (14)$$

Lähteessä /6/ on sovellettu tämän tyyppistä pienemmän neliön keinoa kaksidimensi- oisen kokoonpuristumattoman pyörteettömän ideaalivirtauksen analysoimiseen käyttäen nopeuskomponentteja  $u$  ja  $v$  tuntemattomina. Asianomaiset kenttäyhtälöt

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (15)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (16)$$

poikkeavat muodoltaan yhtälöistä (4) ja (5) vain siinä, että yhtälöstä (16) puuttuu vakiotermi. (Väännön ja pyörteellisen ideaalivirtauksen yhtälöiden välinen analogia on esitetty esimerkiksi lähteessä /10/, missä sitä kutsutaan virtaus-analogiaksi.) Saadut tulokset eivät olleet erityisen tarkkoja. Lähteessä /5/ on syytä tähän selvitelty ja esitetty ns. modifioitu pienimmän neliön keino, jolla on saatu tyydyttäviä tuloksia. Tässä artikkelissa esitetään lyhyesti tähän modifioituun pienimmän neliön keinoon johtanut ajatuskulku lähdeä /5/ lainaten - kuitenkin vääntöprobleemaan liittyvänä - ja muodostetaan elementtimenetelmäyhtälöt vääntöjännitysten ratkaisemiseksi. Esille tulee myös joitain seikkoja, jotka yksinkertaistavat menettelyn ennestäänkin yksinkertaista laskentatekniikkaa.

Helposti voidaan osoittaa, että funktionaalia (14) vastaavat Eulerin yhtälöt ovat

$$\frac{\partial^2 \tau_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_x}{\partial y^2} = 0 \quad \text{alueessa } A, \quad (17)$$

$$\frac{\partial^2 \tau_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_y}{\partial y^2} = 0 \quad \text{alueessa } A, \quad (18)$$

$$\frac{\partial \tau_y}{\partial x} - \frac{\partial \tau_x}{\partial y} - 2G\theta = 0 \quad \text{reunalla } s, \quad (19)$$

kun luvallisilta  $\tau_x$ :iltä ja  $\tau_y$ :iltä vaaditaan, että ne toteuttavat reunaehdon (6). Yhtälöt (17) ja (18) eivät siis ole samat kuin yhtälöt (4) ja (5). Ne sisältävät kuitenkin pääosan näiden informaatiosta. Tämä nähdään siitä, että yhtälö (17) saadaan derivoimalla yhtälö (4) osittain  $x$ :n suhteen ja yhtälö (5)  $y$ :n suhteen ja vähentämällä näin saadut yhtälöt toisistaan. Vastaavasti yhtälö (18) saadaan derivoimalla yhtälö (4) osittain  $y$ :n suhteen ja yhtälö (5)  $x$ :n suhteen ja laske-  
malla näin saadut yhtälöt yhteen. Alkuperäisten yhtälöiden sisältämästä informaatiosta on kuitenkin jotakin kadonnut. Tämä puute pyritään korjaamaan seuraavasti. Jaetaan probleeman määrittelyalue osa-alueisiin ja muodostetaan rajoiteyhtälöitä, jotka vaativat, että yhtälöt (4) ja (5) toteutuvat keskimäärin kussakin osa-alueessa. Tässä nämä osa-alueet valitaan samoiksi kuin elementit. Rajoite-ehdot ovat siis muotoa

$$\int_{A^e} \left( \frac{\partial \tau_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial y} \right) dA = 0, \quad (20)$$

$$\int_{A^e} \left( \frac{\partial \tau_y}{\partial x} - \frac{\partial \tau_x}{\partial y} - 2G\theta \right) dA = 0 \quad (21)$$

ja ne sisällytetään alkuperäiseen pienimmän neliön funktionaaliin Lagrangen kertojia käyttäen. Näin saadaan ns. modifioitu pienimmän neliön funktionaali

$$\begin{aligned} & \pi(\tau_x, \tau_y; \lambda_1^1, \lambda_2^1, \lambda_1^2, \dots) \\ &= \frac{1}{2} \int_A \left[ \left( \frac{\partial \tau_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \tau_y}{\partial x} - \frac{\partial \tau_x}{\partial y} - 2G\theta \right)^2 \right] dA \\ &+ \sum_e \left[ \lambda_1^e \int_{A^e} \left( \frac{\partial \tau_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial y} \right) dA + \lambda_2^e \int_{A^e} \left( \frac{\partial \tau_y}{\partial x} - \frac{\partial \tau_x}{\partial y} - 2G\theta \right) dA \right]. \end{aligned} \quad (22)$$

Todettakoon, että  $\tau_x(x,y)$  ja  $\tau_y(x,y)$  ovat tuntemattomia funktioita, mutta  $\lambda_1^1, \lambda_2^1, \lambda_1^2, \dots$  tuntemattomia vakioita.

#### Elementtimenetelmäyhtälöt

Approksimoimalla vääntöjännityksiä  $\tau_x(x,y)$  ja  $\tau_y(x,y)$   $C^0$ - jatkuvalla elementtimenetelmäapproksimaatiolla

$$\left. \begin{aligned} \hat{\tau}_x &= \sum N_i \tau_{xi} \\ \hat{\tau}_y &= \sum N_i \tau_{yi} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

ja asettamalla stationaarisuusehdot solmuparametrien  $\tau_{xi}$  ja  $\tau_{yi}$  sekä Lagrangen kertojien  $\lambda_1^e$  ja  $\lambda_2^e$  suhteen saadaan tulokseksi lineaarinen yhtälöryhmä

$$\underline{\underline{K}} \underline{\underline{a}} = \underline{\underline{R}}, \quad (24)$$

missä  $\underline{\underline{a}}$  on solmuvääntöjännityksistä  $\tau_{xi}$  ja  $\tau_{yi}$  sekä Lagrangen kertojista muodostettu pystyvektori ja kerroinmatriisi  $\underline{\underline{K}}$  ja pystyvektori  $\underline{\underline{R}}$  saadaan vastaavien elementtimatriisien  $\underline{\underline{K}}^e$  ja elementtipystyvektorien  $\underline{\underline{R}}^e$  alkioista tavanomaisesti kokoamalla. Koska Lagrangen kertojia on kaksi kappaletta kuten solmuvääntöjännityksiäkin, on kokoamista silmälläpitäen käytännöllistä ajatella, että kussakin elementissä on yksi ylimääräinen solmu, jossa on vapausasteina ao. elementin Lagrange'n kertojat. Tämän solmun on seuraavassa oletettu sijaitsevan elementin solmunumeroinnin viimeisenä. Elementtimatriisi  $\underline{\underline{K}}^e$  on tyyppiä  $2(n+1) \times 2(n+1)$ , missä  $n$  on elementin varsinaisten solmujen lukumäärä ja se muodostuu seuraavista  $2 \times 2$  alimatriiseista

$$\underline{\underline{K}}_{ij}^e = \int_A \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_j}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_j}{\partial y} - \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_j}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_j}{\partial x} - \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_j}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_j}{\partial y} \end{bmatrix} dA \quad (i, j = 1, \dots, n), \quad (25)$$

$$\underline{\underline{K}}_{i, n+1}^e = \int_A \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & -\frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} dA \quad (i = 1, \dots, n), \quad (26)$$

$$\underline{\underline{K}}_{n+1, j}^e = \int_A \begin{bmatrix} \frac{\partial N_j}{\partial x} & \frac{\partial N_j}{\partial y} \\ -\frac{\partial N_j}{\partial y} & \frac{\partial N_j}{\partial x} \end{bmatrix} dA \quad (j = 1, \dots, n), \quad (27)$$

$$\underline{\underline{K}}_{n+1, n+1}^e = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (28)$$



Elementtipystyvektori  $\tilde{R}^e$  on tyyppiä  $2(n+1) \times 1$  ja se muodostuu seuraavista  $2 \times 1$  alipystyvektoreista

$$\tilde{R}_i = 2G\theta \int_A^e \left\{ \begin{array}{c} - \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ + \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{array} \right\} dA \quad (i = 1, \dots, n), \quad (29)$$

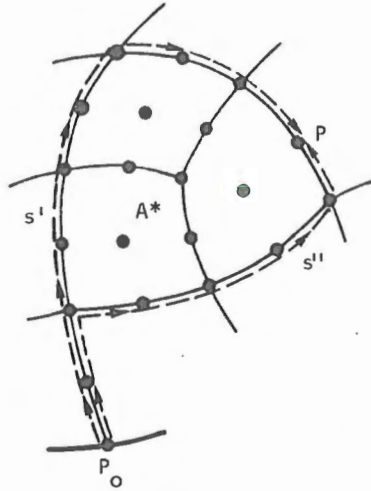
$$\tilde{R}_{n+1} = 2G\theta A^e \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right\}. \quad (30)$$

Käyristymisfunktion ja vääntöjännitysfunctiön määrittäminen

Seuraavassa esitetään kaavoihin (11) ja (12) perustuva jälkikäsittelemenetelmä, jolla voidaan määrittää käyristymisfunktiolle  $\phi(x,y)$  ja vääntöjännitysfunktiolle  $\psi(x,y)$  approksimaatiot, kun vääntöjännitysten  $\tau_x(x,y)$  ja  $\tau_y(x,y)$  approksimaatiot (23) tunnetaan.

Näiden suureiden määrittämiseksi voitaisiin myös kehittää pienimmän neliön keinoon perustuva menettely, jonka tyyppistä on käytetty lähteessä /11/ siirtymien määrittämiseksi muodonmuutoksista. Menettelyä vastaavat elementtimenetelmäyhtälöt tulisivat olemaan muodoltaan samantyyppiset kuin lähteessä /12/ on esitetty suotvirtauksen virtafunktion määrittämiseksi virtaamanopeuskentästä. Ratkaistavaksi tulisi kaksi lineaarista yhtälöryhmää, joissa olisi yhtä monta tuntematonta kuin elementtiverkossa on solmuja. Tässä artikkelissa esitettävässä menettelyssä ei sitävastoin yhtälöryhmän ratkaisemista tarvita.

Tarkan vääntöjännityskentän perusteella kaavoista (11) ja (12) lasketut  $\phi$  ja  $\psi$  ovat luonnollisesti integroimistiestä riippumattomia. Jos sensijaan kaavoja (11) ja (12) käytetään vääntöjännitysten approksimaatioita  $\hat{\tau}_x(x,y)$  ja  $\hat{\tau}_y(x,y)$ , vastaavien käyristymisfunktion  $\hat{\phi}(x,y)$  ja vääntöjännitysfunktion  $\hat{\psi}(x,y)$  määrittämiseen ei tulos yleisessä tapauksessa ole integroimistiestä riippumaton. Seuraavassa osoitetaan kuitenkin, että tässä artikkelissa esitetyllä modifioidulla pienimmän neliön keinolla määritetyistä vääntöjännityksistä  $\hat{\tau}_x(x,y)$  ja  $\hat{\tau}_y(x,y)$  kaavojen (11) ja (12) avulla elementtien reunoilla lasketut  $\hat{\phi}$ :n ja  $\hat{\psi}$ :n arvot ovat integroimistiestä riippumattomia, kun integrointi suoritetaan pitkin elementtien reunoja. Tarkastellaan käyristymisfunktion  $\hat{\phi}$  arvon määrittämistä pisteessä P (kuva 3), kun sen arvo pisteessä  $P_0$  tunnetaan, käyttäen integroimistietä  $s^1$  ja  $s^1$ . Integroimistietä  $s^1$  käyttäen saadaan



Kuva 3. Kaksi integroimistietä  $s'$  ja  $s''$  käyrästymisfunktion  $\hat{\phi}$  arvon määrittämiseksi.

$$\hat{\phi}' = \phi_0 + \int_{s'} \left[ e_x \left( \frac{\hat{\tau}x}{G\theta} + y \right) + e_y \left( \frac{\hat{\tau}y}{G\theta} - x \right) \right] ds \quad (31)$$

ja integroimistietä  $s''$  käyttäen

$$\hat{\phi}'' = \phi_0 + \int_{s''} \left[ e_x \left( \frac{\hat{\tau}x}{G\theta} + y \right) + e_y \left( \frac{\hat{\tau}y}{G\theta} - x \right) \right] ds, \quad (32)$$

josta saadaan edelleen

$$\begin{aligned} \hat{\phi}'' = \phi_0 + \int_{s'} \left[ e_x \left( \frac{\hat{\tau}x}{G\theta} + y \right) + e_y \left( \frac{\hat{\tau}y}{G\theta} - x \right) \right] ds \\ + \oint \left[ e_x \left( \frac{\hat{\tau}x}{G\theta} + y \right) + e_y \left( \frac{\hat{\tau}y}{G\theta} - x \right) \right] ds, \end{aligned} \quad (33)$$

missä jälkimmäinen integrointi tapahtuu käyrien  $s'$  ja  $s''$  rajoittaman pinnan  $A^*$  ympäri. Kaavan (33) jälkimmäistä integraalia voidaan muokata seuraavasti

$$\begin{aligned}
& \oint \left[ e_x \left( \frac{\hat{\tau}_x}{G\theta} + y \right) + e_y \left( \frac{\hat{\tau}_y}{G\theta} - x \right) \right] ds \\
&= \oint \left[ -n_y \left( \frac{\hat{\tau}_x}{G\theta} + y \right) + n_x \left( \frac{\hat{\tau}_y}{G\theta} - x \right) \right] ds \\
&= \int_{A^*} \left[ -\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\hat{\tau}_x}{G\theta} + y \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\hat{\tau}_y}{G\theta} - x \right) \right] dA \\
&= \int_{A^*} \frac{1}{G\theta} \left( \frac{\partial \hat{\tau}_y}{\partial x} - \frac{\partial \hat{\tau}_x}{\partial y} - 2G\theta \right) dA \\
&= \sum_e \frac{1}{G\theta} \int_A \left( \frac{\partial \hat{\tau}_y}{\partial x} - \frac{\partial \hat{\tau}_x}{\partial y} - 2G\theta \right) dA \\
&= 0 .
\end{aligned} \tag{34}$$

Yhtälöketjun (34) ensimmäinen yhtäsuuruus seuraa sijoituksista  $e_x = -n_y$  ja  $e_y = n_x$ , missä  $n_x$  ja  $n_y$  ovat pinnan  $A^*$  reunan yksikkönormaalien komponentit ja toinen yhtäsuuruus seuraa Gaussin lauseesta. Summaus yhtälöketjun viidennessä lausekkeessa tapahtuu yli pinnan  $A^*$  elementtien ja viides yhtäsuuruus seuraa rajoitusehdosta (21). Näin siis kaavan (33) viimeinen termi häviää ja  $\phi' = \phi''$ . Vastaavalla tavalla voidaan todistus suorittaa myös funktion  $\hat{\psi}$  osalta.

Valitaan käyristymisfunktiolle  $\phi(x,y)$  ja vääntöjännitysfunktiolle  $\psi(x,y)$  myös  $C^0$  - jatkuvat approksimaatiot

$$\left. \begin{aligned}
\hat{\phi} &= \sum N_i \phi_i \\
\hat{\psi} &= \sum N_i \psi_i
\end{aligned} \right\} , \tag{35}$$

missä muotofunktioiden  $N_i$  asteluku on joko sama tai yhtä astetta korkeampi kuin vääntöjännitysapproksimaatiossa (23). Yllä esitetyn perusteella  $\hat{\phi}$ :n tai  $\hat{\psi}$ :n solmuarvo voidaan määrittää elementtien rajaviivalla sijaitsevassa solmussa yksikäsitteisesti integroimalla pitkin sopivaa elementtien rajaviivoista muodostuvaa reittiä. Solmuarvolle elementin sisäsolmussa ei sensijaan saada täsmällisesti yksikäsitteistä integrointitietä riippumatonta arvoa. Jos kuitenkin ensin määritetään solmuarvot elementin reunasolmuissa ja sitten kunkin sisäsolmun solmuarvo integroimalla pitkin sopivaa ao. elementin sisällä sijaitsevaa reittiä lähtien

jostain reunasolmusta, saadaan myös elementin sisäsolmujen solmuarvoille käytännöllisesti katsoen yksikäsitteiset arvot.

Jotta jälkikäsitteilymenetelmä  $\hat{\phi}$ :n ja  $\hat{\psi}$ :n solmuarvojen määrittämiseksi olisi mahdollisimman helppokäyttöinen, tulisi sen valita integroimistiet automaattisesti ilman näihin liittyvien lisälähtötietojen antamista. Automaattinen integrointi voidaan toteuttaa seuraavalla tavalla.

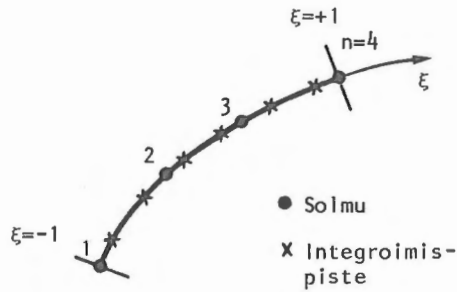
- 1<sup>o</sup> Etsitään elementti, jonka vähintään yhden nurkkasolmun solmuarvo tunnetaan (ts. on annettu tai määritetty aikaisemmin) ja jonka yhden tai useamman solmun solmuarvoa ei ole vielä määritetty. Jos tällaista elementtiä ei löydy, lopetetaan.
- 2<sup>o</sup> Määritetään ao. elementin reunasolmujen solmuarvot lähtemällä liikkeelle nurkkasolmusta, jonka solmuarvo on tunnettu ja kiertämällä elementti esimerkiksi vastapäivään. Saman tyyppinen viivaintegrointi, jota tarkastellaan yksityiskohtaisemmin jäljempänä, toistuu kullakin elementin sivulla.
- 3<sup>o</sup> Määritetään ao. elementin sisäsolmujen solmuarvot seuraavasti: Lähdetään liikkeelle reunasolmusta, jolla on sama luonnollisen koordinaatin  $\eta$  (tai  $\xi$ ) arvo kuin yhdellä tai useammalla sisäsolmulla ja määritetään ao. sisäsolmujen solmuarvot integroimalla pitkin suoraa  $\eta = \eta_0$  (tai  $\xi = \xi_0$ ), missä  $\eta_0$  (tai  $\xi_0$ ) on ao. luonnollisen koordinaatin arvo. Toimenpide toistetaan kunnes kaikkien sisäsolmujen solmuarvot on määritetty.

4<sup>o</sup> Palataan kohtaan 1<sup>o</sup>.

Yhden funktion  $\hat{\phi}$  ja funktion  $\hat{\psi}$  solmuarvon tulee olla etukäteen annettu ja ao. solmujen edellytetään tässä olevan nurkkasolmuja. Viivaintegrointitehtävää, joka esiintyy sekä elementin reunoilla (vrt. kohta 2<sup>o</sup>) että sen sisällä (vrt. kohta 3<sup>o</sup>), on luonnehdittu kuvassa 4. Ajatellaan, että olemme integroimassa pitkin käyrää, jolla sijaitsevat solmut 1, ..., n ja joilla on yhteinen  $\eta$  - koordinaatti  $\eta_0$  ja että olemme päässeet solmuun  $i$ , jota vastaava  $\hat{\phi}$ :n solmuarvo  $\phi_i$  on siis tunnettu. Kaavan (11) perusteella seuraavalle solmuarvolle saadaan

$$\phi_{i+1} = \phi_i + \int_{s_i}^{s_{i+1}} \left[ e_x \left( \frac{\hat{T}_x}{G\theta} + y \right) + e_y \left( \frac{\hat{T}_y}{G\theta} - x \right) \right] ds, \quad (36)$$

missä  $s_i$  ja  $s_{i+1}$  ovat solmujen  $i$  ja  $i+1$  asemat integroimiskäyrällä. Toteamalla yhteydet



Kuva 4. Viivaintegrointi pitkin käyrää, jolla  $n = n_0$ .

$$e_x ds = dx = \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi, \quad e_y ds = dy = \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi, \quad (37)$$

voidaan suorittaa integroimismuuttujan vaihto, jonka tuloksena kaava (36) saa muodon

$$\phi_{i+1} = \phi_i + \int_{-1+2\frac{i}{n-1}}^{-1+2\frac{i-1}{n-1}} \left[ \left( \frac{\hat{\tau}_x}{G\theta} + y \right) \frac{\partial x}{\partial \xi} + \left( \frac{\hat{\tau}_y}{G\theta} - x \right) \frac{\partial y}{\partial \xi} \right] d\xi. \quad (38)$$

Vastaavalla tavalla saadaan kaavasta (12) lähtien  $\hat{\psi}$ :n solmuarvoille integroimis-kaava

$$\psi_{i+1} = \psi_i + \int_{-1+2\frac{i}{n-1}}^{-1+2\frac{i-1}{n-1}} \left( \hat{\tau}_x \frac{\partial y}{\partial \xi} - \hat{\tau}_y \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) d\xi \quad (39)$$

Integroinnit kaavoissa (38) ja (39) voidaan suorittaa numeerisesti Gaussin kaavaa /4, s. 198/ käyttäen. Integroimisalue ei nyt kuitenkaan ole tavanomainen  $(-1,1)$  vaan  $(-1+2(i-1)/(n-1), -1+2i/(n-1))$ . Saadaan helposti seuraavat lopulliset kaavat

$$\phi_{i+1} = \phi_i + \sum_k w_k \left\{ \left[ \frac{\hat{\tau}_x(\xi_k)}{G\theta} + y(\xi_k) \right] \frac{\partial x}{\partial \xi}(\xi_k) + \left[ \frac{\hat{\tau}_y(\xi_k)}{G\theta} - x(\xi_k) \right] \frac{\partial y}{\partial \xi}(\xi_k) \right\}, \quad (40)$$

$$\psi_{i+1} = \psi_i + \sum_k w_k \left[ \hat{\tau}_x(\xi_k) \frac{\partial y}{\partial \xi}(\xi_k) - \hat{\tau}_y(\xi_k) \frac{\partial x}{\partial \xi}(\xi_k) \right], \quad (41)$$

joissa

$$w_k = \frac{\bar{w}_k}{n-1}, \quad \xi_k = \frac{-n+2i+\bar{\xi}_k}{n-1}. \quad (42)$$

Kaavassa (40) - (42)  $\bar{w}_k$  ja  $\bar{\xi}_k$  ovat k:nnen integrointipisteen painokerroin ja  $\xi$  -koordinaatti tavanomaisessa välillä  $(-1,1)$  tapahtuvassa integroinnissa /4, s. 198/ ja  $w_k$  ja  $\xi_k$  nämä suureet, kun integroimisväli on  $(-1+2(i-1)/(n-1), -1+2i/(n-1))$ . Käyttämällä riittävää määrää integrointipisteitä saadaan integroimistulos ilman virhettä.

Vääntömomentin laskeminen.

Vääntömomentilla saadaan kaavan (13) perusteella kaava

$$\hat{M}_T = \sum_e \int_A (\hat{\tau}_y x - \hat{\tau}_x y) dA. \quad (43)$$

Reikien käsittely

Jos sauvan poikkipinnassa on reikiä, tulee vääntöjännitysten toteuttaa kutakin reikää kohti yksi lisäyhtälö /1/. Tämä syntyy ehdosta, että aksiaalisen siirtymän  $w = \theta\phi$  tulee olla jatkuva kierrettäessä reiän ympäri. Ehto on

$$\oint_{s_r} dw \equiv \oint_{s_r} \frac{dw}{ds} ds \equiv \theta \oint_{s_r} \frac{d\phi}{ds} ds = 0 \quad (44)$$

eli

$$\oint_{s_r} (e_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + e_y \frac{\partial \phi}{\partial y}) ds = 0, \quad (45)$$

missä  $e_x$  ja  $e_y$  ovat reunakäyrän  $s_r$  suuntaisen yksikkövektorin komponentit. Lausekkeiden (7) sijoitus ehtoon (45) antaa muodon

$$\oint_{s_r} (e_x \tau_x + e_y \tau_y) ds = 2G\theta A_r, \quad (46)$$

missä

$$A_r = \frac{1}{2} \oint_{s_r} (e_y x - e_x y) ds \quad (47)$$

on reiän  $r$  pinta-ala. Tulos (47) voidaan näyttää toteen seuraavasti.

$$\left. \begin{aligned} \oint_{s_r} (e_y x - e_x y) ds &= \oint_{s_r} (n_x x + n_y y) ds \\ &= \int_{A_r} \left( \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} \right) dA = \int_{A_r} 2 dA = 2A_r \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

Yhtälöketjun (48) ensimmäinen yhtäsuuruus seuraa sijoituksista  $e_x = -n_y$  ja  $e_y = n_x$ , missä  $n_x$  ja  $n_y$  ovat reiän reunan yksikkönormaalien komponentit ja toinen yhtäsuuruus seuraa Gaussin lauseesta.

Reikää koskeva rajoite-ehto (46) otetaan huomioon Lagrangen kertoja-menettelyllä. Funktionaaliin (22) tulee kutakin reikää  $r$  kohti lisätermi

$$\Lambda_r \left[ \oint_{s_r} (e_x \tau_x + e_y \tau_y) ds - 2G\theta A_r \right], \quad (49)$$

missä  $\Lambda_r$  on ao. Lagrangen kertoja. Syntyvät diskreetit rajoiteyhtälöt sitovat toisiinsa kyseiseen reikään liittyvät vääntöjännitysten solmuarvot, jonka seurauksena kerroinmatriisia ei enää saada kauttaaltaan nauhamaiseksi. Jos kuitenkin reikiin liittyvät diskreetit rajoiteyhtälöt sijoitetaan yhtälöryhmään viimeiseksi, keskittyvät nolhasta eroavat kerroinmatriisin alkiot toisaalta päädiagonaalien läheisyyden ja toisaalta viimeisille vaaka ja pystyriveille. Näin syntyneen yhtälöryhmän ratkaisemiseen on tässä käytetty ratkaisijaa, joka ottaa huomioon kerroinmatriisin symmetrisyyden ja tämän tyyppisen kaksoisnauhamaisuuden /13/. Toinen

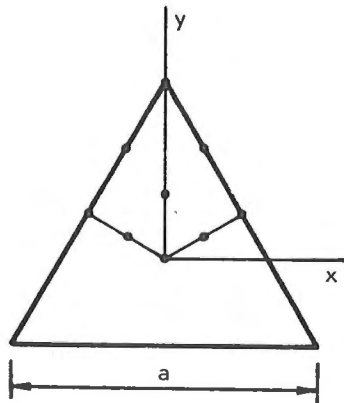
mahdollisuus on käyttää ns. ääriiviivaratkaisijaa (engl. skyline solver) /14/, jolloin muutama paljon muuttujia sisältävä yhtälö ei vielä lisää paljon ratkaisuun vaadittavaa laskenta-aikaa.

## SOVELLUTUKSIA

### Kolmiopoikkipinta

Tarkastellaan kuvan 5 esittämää tasasivuisen kolmion muotoisen poikkipinnan vääntöä. Lähteessä /10, s. 609/ esitetyt analyyttiset ratkaisut suurimmalle vääntöjännitykselle kolmion sivujen keskipisteissä ja vääntömomentille ovat

$$\tau_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{4} G\theta a \approx 0,433013 G\theta a \quad , \quad (50)$$



Kuva 5. Tasasivuisen kolmion muotoinen poikkipinta.

$$M_T = \frac{\sqrt{3}}{80} G\theta a^4 \approx 0,0216506 G\theta a^4 \quad , \quad (51)$$

missä  $a$  on kolmion sivujen pituus. Tehtävä ratkaistiin symmetriaa hyväksi käyttäen tarkastelemalla alueen kolmannesta ja käyttäen vain yhtä yhdeksänsolmuista Lagrangen nelikulmioelementtiä (kuva 5). Tulokset yhtyivät pyöristysvirheitä lukuunottamatta analyyttiseen ratkaisuun.



## Neliöpoikkipinta

Neliöpoikkipinnan vääntötehtävän analyttinen ratkaisu on esitetty myös läh- teessä /10, s. 612 ja 613/. Suurin vääntöjännitys neliön sivujen keskipisteissä ja vääntömomentti ovat

$$\tau_{\max} = G\theta a \left[ 1 - \frac{8}{\pi^2} \left( \frac{1}{\cosh \frac{\pi}{2}} + \frac{1}{3^2 \cosh \frac{3\pi}{2}} + \frac{1}{5^2 \cosh \frac{5\pi}{2}} + \dots \right) \right]$$

$$\approx 0,675314 G\theta a \quad . \quad (52)$$

$$M_T = G\theta a^4 \left[ \frac{1}{3} - \frac{64}{\pi^5} \left( \tanh \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3^5} \tanh \frac{3\pi}{2} + \frac{1}{5^5} \tanh \frac{5\pi}{2} + \dots \right) \right]$$

$$\approx 0,140577 G\theta a^4 \quad , \quad (53)$$

missä  $a$  on neliön sivun pituus. (Huomautettakoon, että leikkausjännityksen  $\tau_{\max}$  likiarvo lähteen /10/ kaavassa (748) on epätarkka.)

Tehtävä ratkaistiin sekä neli- että yhdeksänsolmuoisella Lagrangen nelikulmio- elementillä neljää eri verkon tiheyttä käyttäen (kuva 6). Symmetriaa käytettiin hyväksi kuvan 6 esittämällä tavalla. Tuloksista on laskettu virheet

$$e_{\tau} = \left| \frac{\hat{\tau}_{\max} - \tau_{\max}}{\tau_{\max}} \right| \quad , \quad (54)$$

$$e_M = \left| \frac{\hat{M}_T - M_T}{M_T} \right| \quad , \quad (55)$$

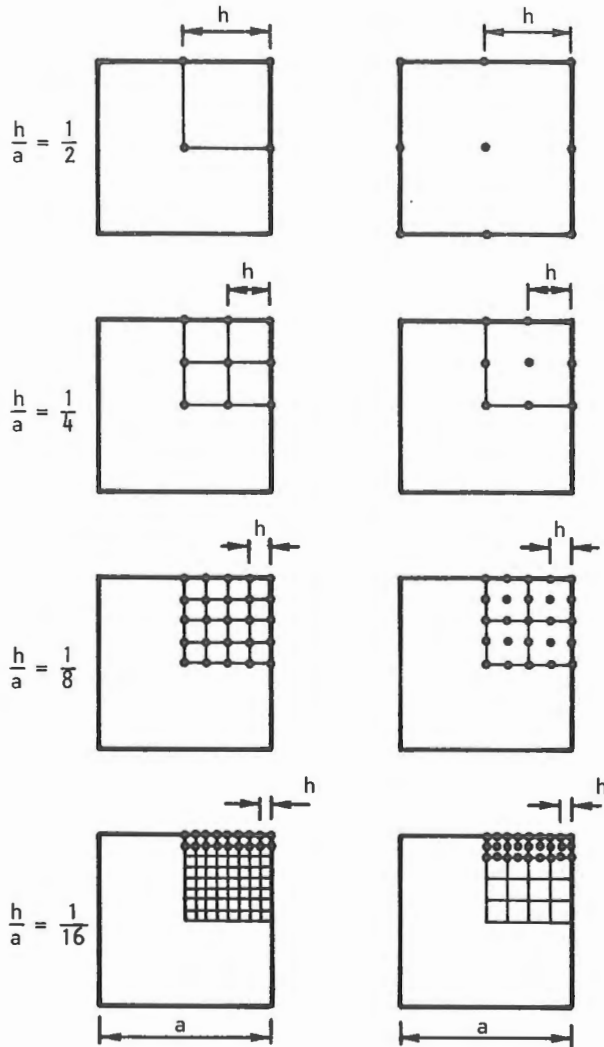
ja kuvissa 7 ja 8 ne on esitetty suhteellisen verkontiheyden  $h/a$  funktiona. Näi- den log - log viivojen kulmakertoimet antavat suppenemisnopeudet  $p_{\tau}$  ja  $p_M$  leikkaus- jännityksen  $\tau_{\max}$  ja vääntömomentin  $M_T$  suhteen /15/. (Suppenemisnopeudella  $p$  ymmär- retään eksponenttia lausekkeessa  $e \leq C(h/a)^p$ , joka antaa arvion virheelle  $e$  suhteellisen verkontiheyden  $h/a$  funktiona.) Kolmen tiheimmän verkon antamat sup- penemisnopeudet arvioitiin kuvien perusteella. Tulos on esitetty taulukossa 1.

Taulukko 1. Suppenemisnopeudet neliöpoikkipinnalle.

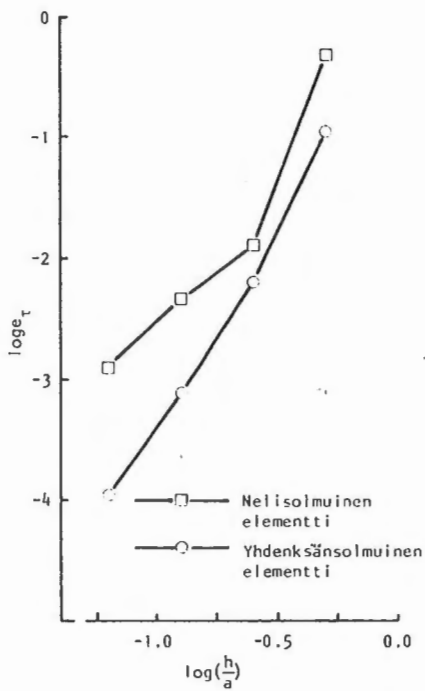
Elementti	$p_{\tau}$	$p_M$
Nelisolmuinen	1.7	2.1
Yhdeksänsolmuinen	2.9	3.0

Nelisolmuinen  
elementti

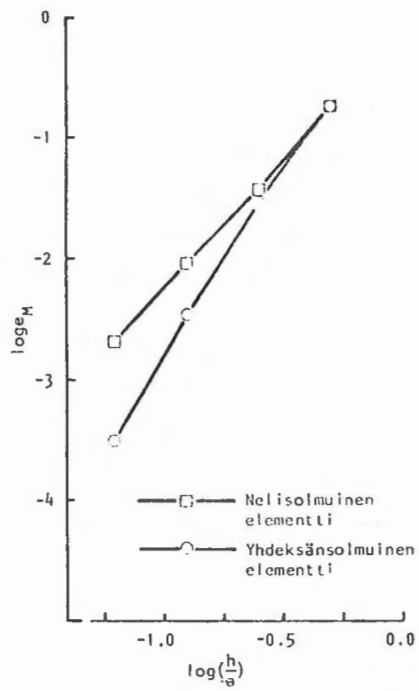
Yhdeksäsolmuinen  
elementti



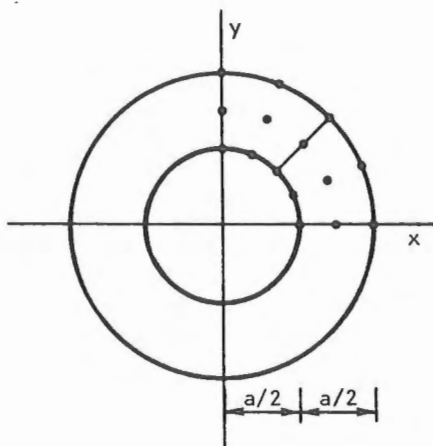
Kuva 6. Elementtiverkot neliöpoikkipinnalle.



Kuva 7. Log-log kuva vääntöjännityksen  $\tau_{\max}$  virheestä  $e_\tau$  suhteellisen verkontiheden  $h/a$  funktiona.



Kuva 8. Log-log kuva vääntömomentin  $M_T$  virheestä  $e_M$  suhteellisen verkontiheden  $h/a$  funktiona.



Kuva 9. Ympyrärengaspoikkipinta.

## Ympyrärengaspoikkipinta

Analysoimalla kuvan 9 mukaisen ympyrärengaspoikkipinnan vääntötehtävä testattiin reikien käsittelytavan ja jälkikäsitteilymenetelmien toimivuutta. Analytyttiset ratkaisut tangentialiselle leikkausjännitykselle, vääntömomentille, käyristymisfunktiolle ja vääntöjännitysfunktiolle ovat

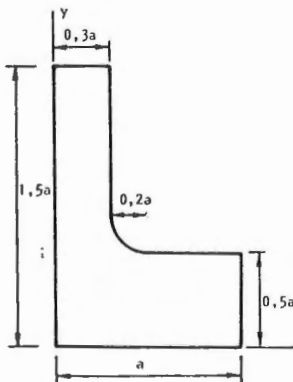
$$\tau_{\varphi} = G\theta r \quad , \quad (56)$$

$$M_T = \frac{15\pi}{32} G\theta a^4 \approx 1,47262 G\theta a^4 \quad , \quad (57)$$

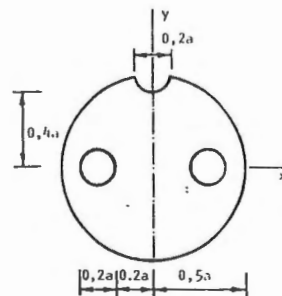
$$\phi = 0 \quad , \quad (58)$$

$$\psi = \frac{G\theta}{2} (a^2 - r^2) \quad , \quad (59)$$

Tehtävä ratkaistiin kahta yhdeksänsolmuista Lagrangen nelikulmioelementtiä käyttäen kuvan 9 esittämässä alueessa. Tangentialisen leikkausjännityksen, käyristymisfunktion ja vääntöjännitysfunktion solmuarvot yhtyivät pyöristysvirheitä lukuunottamatta analytyttiseen ratkaisuun. Vääntömomentille saatiin arvo  $\hat{M}_T \approx 1,47032 G\theta a^4$ .



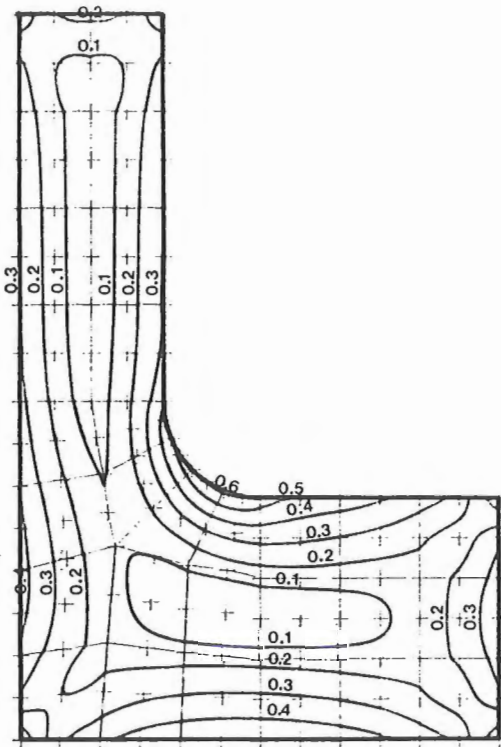
Kuva 10. L-profiili.



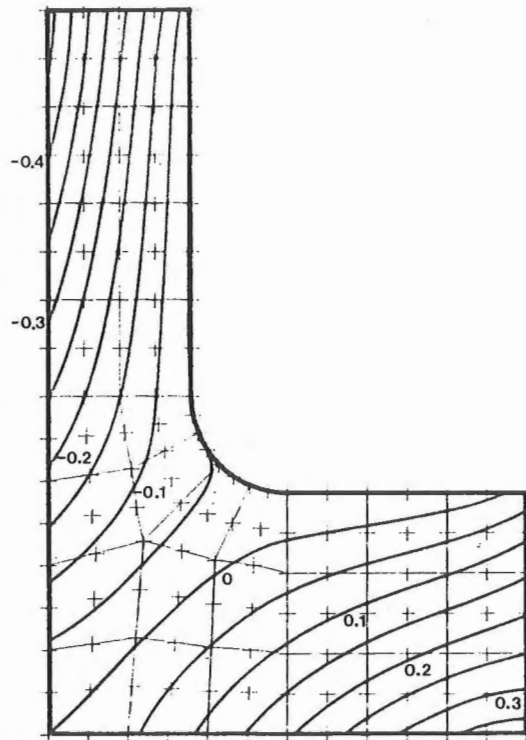
Kuva 11. Akseli, jossa on kaksi reikää ja yksi ura.

## L-profiili ja akseli

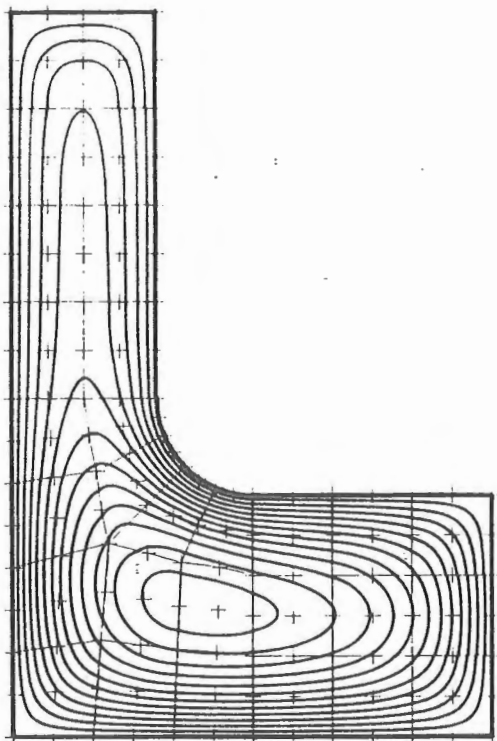
Lopuksi analysoitiin kuvan 10 mukainen paksuhko L-profiili ja kuvan 11 mukainen pyöreä akseli, jossa on kaksi symmetrisesti sijaitsevaa reikää ja yksi ura. L-profiilin analysoimiseen käytettiin 29:ää 9-solmuista Lagrangen elementtiä. Akselin symmetrisen puolikkaan analysoimiseen käytettiin 59:ää 8-solmuista Serendip-elementtiä. Tulokset on esitetty graafisessa muodossa kuvissa 12...17.



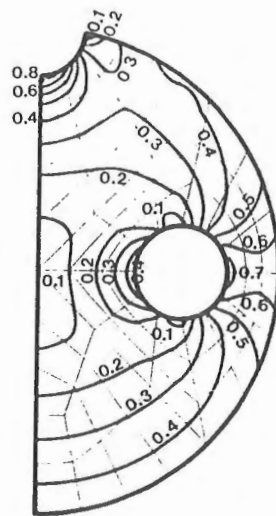
Kuva 12. Dimensiottoman resultoivan leikkausjännityksen  $\tau/(G\theta a)$  tasa-arvokäyrät 0,1:n välein; L-profiili.



Kuva 13. Dimensiottoman käyritymisfunktion  $\phi/a^2$  tasa-arvokäyrät 0,05:n välein; L-profiili.



Kuva 14. Dimensiottoman vääntöjännitys-  
funktion  $\psi/(G\theta a^2)$  tasa-arvokäyrät 0,005:n  
välein; L-profiili.

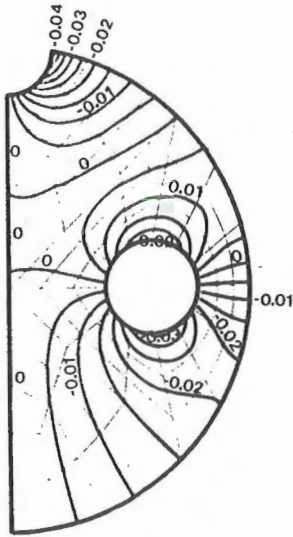


Kuva 15. Dimensiottoman resultoivan  
leikkausjännityksen  $\tau/(G\theta a)$  tasa-  
arvokäyrät 0,1:n välein; akseli.

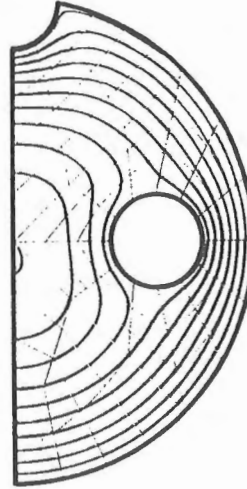
#### HUOMAUTUKSIA

Toinen mahdollisuus sisällyttää rajoite-ehdot (20) ja (21) funktionaaliin (14) on sakkofunktio menetelmä, jolloin modifioitu funktionaali on

$$\begin{aligned} \pi(\tau_x, \tau_y) = & \frac{1}{2} \iint \left[ \left( \frac{\partial \tau_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \tau_y}{\partial x} - \frac{\partial \tau_x}{\partial y} - 2G\theta \right)^2 \right] dA \\ & + \frac{\alpha}{2} \sum_e \left\{ \left[ \int_{A^e} \left( \frac{\partial \tau_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial y} \right) dA \right]^2 + \left[ \int_{A^e} \left( \frac{\partial \tau_y}{\partial x} - \frac{\partial \tau_x}{\partial y} - 2G\theta \right) dA \right]^2 \right\}, \end{aligned} \quad (60)$$



Kuva 16. Dimensiottoman käyristymis-  
funktion  $\phi/a^2$  tasa-arvokäyrät 0,005:n  
välein; akseli.



Kuva 17. Dimensiottoman vääntöjän-  
nitysfunktion  $\psi/(G0a^2)$  tasa-arvo-  
käyrät 0,01:n välein; akseli.

missä sakkokerroin  $\alpha$  on valittu kullekin rajoite-ehdolle samaksi. Lagrangen kertojat jäävät pois tuntemattomien joukosta ja tuntemattomien lukumäärä ja kerroinmatriisin nauhanleveys pienenee. Tietokone-ohjelmasta tulee myös yksinkertaisempi. Lähteessä /5/ on saatu sakkofunktiomenettelyä käyttämällä ideaalivirtaus-  
tapauksessa hyviä tuloksia, joten menettely toimisi todennäköisesti myös vääntö-  
tapauksessa.

Yhtälöiden (20) ja (21) rajoite-ehdot seurasivat vaatimuksesta, että yhtälöiden (4) ja (5) tuli olla keskimäärin voimassa kussakin elementissä. Saatiin siis kaksi rajoite-ehtoa per elementti. Ei ole itsestään selvää, että tämä olisi aina sopivin valinta. Tätä seikkaa ei ole vielä tutkittu riittävästi. Luonteva yhtälöiden (20) ja (21) yleistys olisi

$$\left. \begin{aligned} \int_{A^e} w_i^e \left( \frac{\partial \tau_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial y} \right) dA &= 0 \\ \int_{A^e} w_i^e \left( \frac{\partial \tau_y}{\partial x} - \frac{\partial \tau_x}{\partial y} - 2G\theta \right) dA &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, \dots, m) \quad , \quad (61)$$

missä  $W_i^e$ :t ovat elementeittäin määriteltyjä painofunktioita ja  $m$  on niiden lukumäärä. (Jotta jälkikäsittelemisen käytön edellytyksenä olevat ehdot (20) ja (21) toteutuisivat, tulisi painofunktioiden  $W_i^e$  olla sellaisia, että niiden lineaarikoordinaationa voitaisiin saada vakioarvo 1 elementin alueella). Koska rajoitteen määrän näin lisääntyisi olisi mielekästä soveltaa sakkofunktiomenettelyä, jolloin modifioitu pienimmän neliön funktionaali olisi

$$\begin{aligned} \pi(\tau_x, \tau_y) = & \frac{1}{2} \int_A \left[ \left( \frac{\partial \tau_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \tau_y}{\partial x} - \frac{\partial \tau_x}{\partial y} - 2G\theta \right)^2 \right] dA \\ & + \frac{\alpha}{2} \sum_e \sum_{i=1}^m \left\{ \left[ \int_{A_e} W_i^e \left( \frac{\partial \tau_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial y} \right) dA \right]^2 \right. \\ & \left. + \left[ \int_{A_e} W_i^e \left( \frac{\partial \tau_y}{\partial x} - \frac{\partial \tau_x}{\partial y} - 2G\theta \right) dA \right]^2 \right\}. \end{aligned} \quad (62)$$

Funktionaali (62) johtaa miltei yhtä yksinkertaiseen formulaatioon kuin funktionaali (60), joka on edellisen erikoistapaus, kun  $m = 1$  ja  $W_i^e = 1$ .

Jos poikkipinnan reunalla on kärkiä, vääntöjännitykset vaihtelevat voimakkaasti niiden ympäristössä. Kuperissa kärjissä resultoiva vääntöjännitys tulee teoriassa äärettömäksi ja koverissa lyhyellä matkalla nolaksi, jos kulma ei poikkea paljon arvosta  $\pi$ . Täten kärkien käsittely on numeerisesti epätarkkaa ilman modifiointeja. Lähteessä /16/ ideaalivirtauksen yhteydessä käytetty kärkien käsittelytapa, jolla on saatu hyviä tuloksia, on sovellettavissa myös vääntötehtävään.

#### KIRJALLISUUTTA

- [1] Goodier J. N., Torsion. Chapter 36 of Handbook of Engineering Mechanics (ed. Flügge, W.), McGraw-Hill 1962.
- [2] Crandall, S. H., Engineering Analysis. McGraw-Hill 1956.
- [3] Herrmann, L. R., Elastic torsional analysis of irregular shapes. Journal of the Engineering Mechanics Division 91(1965), No. EM6, s. 11...19.
- [4] Zienkiewicz, O.C., The Finite Element Method. Third Edition. McGraw-Hill 1977.



- [5] Salonen, E-M., Lehtonen, P. and Pramila, A. Further u,v-formulations for ideal fluid flow. Numerical Methods in Laminar and Turbulent Flow, Ed. Taylor, C. and Scheffler, B.A., Pineridge Press, pp. 1183...1196, 1981.
- [6] Pramila, A., Salonen, E-M. - A u,v-Formulation for Ideal Fluid Flow. Numerical Methods in Laminar and Turbulent Flow, Ed. Taylor, C., Morgan K. and Brebbia, C.A., Pentech Press, pp. 971-982, 1978.
- [7] Tuomala, M., Pramila, A. - A Combined Least Squares-Point Collocation Method for Ideal Fluid Flow, Report No. 6, Institution of Mechanics, Helsinki University of Technology, Finland 1979.
- [8] Salonen, E-M., Pramila, A., Lehtonen, P. - A Finite Element Method for Ideal Fluid Flow Employing Kelvin's Principle and the Penalty Function Method Report No. 7, Institution of Mechanics, Helsinki University of Technology, Finland, 1979.
- [9] Pramila, A., Salonen, E-M. - Weighted Residual u,v Finite Element Formulations for Ideal Fluid Flow. Proc. International Conference on Computer Applications in Civil Engineering, October 23-25, 1979. University of Roorkee, Nem Chand & Bros, India.
- [10] Ylinen, A., Kimmo- ja lujuusoppi II, Werner Söderström 1950.
- [11] Aalto, J. ja Salonen, E-M., Siirtymien määrittäminen muodonmuutoksista, Rakenteiden Mekaniikka, 16(1983), No. 4, s. 1...15.
- [12] Aalto, J., Finite element seepage flow nets, International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 8(1984), s. 197...303.
- [13] Pramila, A., Elementtimenetelmän ohjelmointi, Liite D luentomonisteesta Salonen, E-M., Elementtimenetelmä mekaniikassa (1978-1979), Teknillinen korkeakoulu.
- [14] Bathe, K-J. and Wilson, E.L., Numerical Methods in Finite Element Analysis, Prentice-Hall 1977.
- [15] Becker, E.B., Carey, G.F. and Oden, J.T., Finite Elements An Introduction I, Prentice-Hall 1981.
- [16] Räsänen, S., Vapaan pinnan määrittäminen ideaalivirtauksessa, Lisenssiaattityö, Teknillinen korkeakoulu, Teknillisen fysiikan osasto. Työ valmistune 1985.

*Jukka Aalto, tekn.lis., Helsingin teknillinen korkeakoulu, Mekaniikan laitos*