

Heikki Noro

Rakenteiden Mekaniikka, Vol. 18
No 2 1985, s. 31...43

TIIVISTELMÄ: Kirjoituksessa esitetään teräsbetonisen seinämäisen rakenteen jännitysanalyysi. Kuormituksena on epäkeskisesti vaikuttava aksiaalinen normaalivoima ja mielivaltaisesti jakautunut lämpötila seinän poikittaissuunnassa. Aksiaalisen jännitystilän oletetaan noudattavan Bernoullin otaksumaa. Laskenta on sekä materiaalisesti että geometrisesti epälineaarinen. Materiaaliominaisuuksien, myös vauriutumisen, lämpötilariippuvuus voidaan ottaa huomioon.

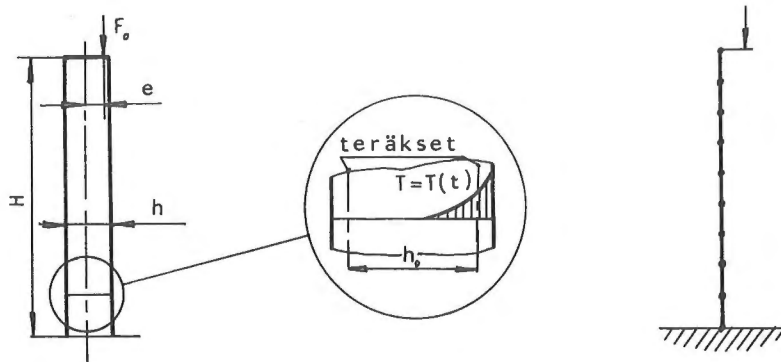
JOHDANTO

Rakenteiden palomitoituksessa pyritään yhä enenevässä määrin korvaamaan palokokeet laskennallisilla menetelmillä. Elementtimenetelmällä on periaatteessa mahdollista ratkaista mielivaltaisen rakenteen monimutkainen lämpömekaaninen käyttäytyminen palotilanteessa. Mitoitustehtävää ajatellen laskenta kasvaa kuitenkin liian työlääksi nykyisille superkoneillekin. Siksi ongelmaa onkin pyritty rajaamaan sopivasti kuitenkin jättämättä pois palokuormitukselle ominaisia piirteitä.

Tässä artikkelissa esitetään laskentamenetelmä, jossa em. rajaukset on toteutettu seuraavasti: Rakenne on alapäästään jäykästi kiinnitetty seinä, jonka yläpäässä vaikuttaa aksiaalisesti epäkeskisesti tasan jakautunut viivakuorma sekä poikkileikkauksessa mielivaltainen lämpötilajakauma. Rakenne toimii kuten palkki, jolloin geometrinen ja materiaallinen epälineaarisuus voidaan laskelmissa ottaa huomioon käyttämättä elementtimenetelmää. Näin ollen tietokoneressurssien tarve vähenee oleellisesti. Rakenteen yksidimensioisuutta hyväksi käyttäen on kehitetty tietokoneohjelmia, jolla standardipalon tapauksessa voidaan suorittaa seinämäisen rakenteen palomitoitus.

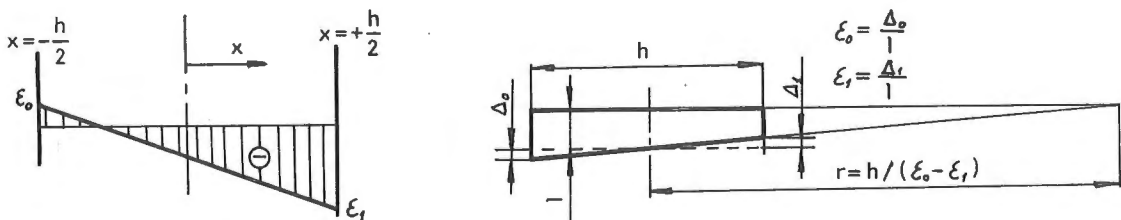
LASKENNAN PERIAATTEET

Kuvan 1 mukainen rakenne jaetaan sopivaan määrään yhtä suuria alkioita, joille kullekin haetaan voimatasapaino ulkoisten ja sisäisten voimien välille.



Kuva 1. Rakenne ja kuormitus

Sopiva jako- eli differenssipisteiden määrä on rakenteesta ja kuormituksesta riippuvainen, mutta yleisesti voidaan sanoa kymmenen pisteen riittävän. Jokaisessa erillisessä alkiossa oletetaan jännitys jakauman olevan vakio alkion aksiaalisessa suunnassa. Näin ollen myös venymä on vakio liikuttaessa aksiaalisesti. Kun lisäksi Bernoullin otaksuman oletetaan olevan voimassa, saadaan kunkin alkion käyritymät lausuttua reunavenymiensä avulla (kuva 2).



Kuva 2. Bernoullin otaksuma ja differenssipisteiden käyritymä.

Kun materiaalin jännitysvenymäkäyrä tunnetaan, määräytyy alkion poikkileikkauksen jännitys jakauma reunavenymistä kuten käyritymäkin. Integroimalla poikkipinnan yli saadaan alkion kuormitus. Koko rakenteen jännitysanalyysissä yhden alkion kohdalla toimenpide on käänteinen; tunnetun kuormituksen aiheuttamat reunavenymät on määrättävä. Tämä tapahtuu iteroimalla, jota voidaan pitää koko analyysin tärkeimpänä vaiheena.

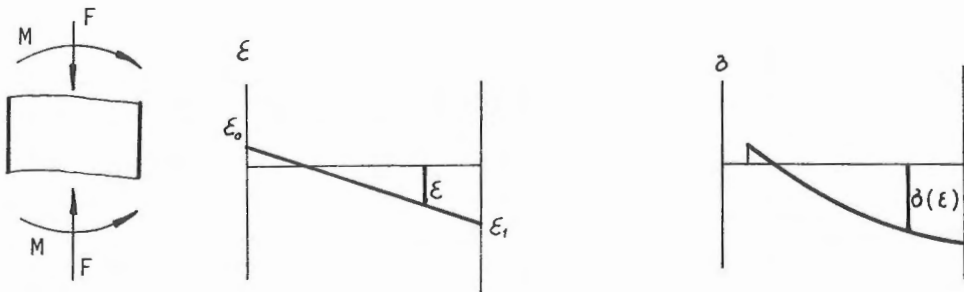
Laskenta alkaa deformatumaton tilaa vastaavalla kuormituksella ilman lämpökuormaa. Ensimmäiselle alkiolle saadaan kuvan 1 tapauksessa kuormitukseksi $(F, F \cdot e)$

jota vastatkoon reunavenymät ϵ_0 ja ϵ_1 sekä käyristymä κ_1 . Muiden alkioiden kuormitukset ovat myös $(F, F \cdot e)$, joten aluksi kaikkien alkioiden käyristymät ovat κ_1 :n suuruisia. Käyristymien avulla saadaan koko rakenteen taipuma laskettua jonka jälkeen lasketaan uusilla kuormituksilla $(F, F \cdot (e + \Delta))$ uusi taipumaviiva. Iterointia jatketaan kunnes taipumaviivan muutos on merkityksetön. Mikäli iteraatio ei suppe-
ne, on rakenteen kantokyky saavutettu.

Mekaanisen kuormituksen jälkeen alkaa vaikuttaa lämpötila, joka voi jakautua mielivaltaisesti poikkileikkauksessa. Näillä oletuksilla poikkileikkauksen jännitys-
jakauma määräytyy kuten yksinomaan mekaanisen kuormituksen vaikuttaessa siten, että venymäjakaumasta vähennetään vapaata lämpölaajenemista vastaava lämpövenymä. Tämä vastaa fysikaalisesti tilannetta, jossa mekaanisen kuormituksen kanssa tasa-
painossa olevaan poikkileikkaukseen vaikuttaa lämpökuorma aiheuttamatta lisämuodon-
muutoksia. Poikkileikkauksen jännitys-
jakauma kuitenkin muuttuu lämpövenymän vaikutuksen kanssa. Jännitys-
jakauman muuttuminen voidaan tulkita myös siten, että materiaaliominaisuudet ovat muuttuneet, jolloin ulkoinen kuorma aiheuttaa toisenlaiset reunavenymät kuin pelkän mekaanisen kuormituksen tapauksessa. Näin ollen samalla iteraatiolla kuin aikaisemmin ilman lämpökuormaa saadaan molempien kuormitusten aiheuttamat uudet reunavenymät ja edelleen tarkasteltavana olevan alkion käyristy-
mä. Tämän jälkeen koko rakenne käsitellään kuten aikaisemmin.

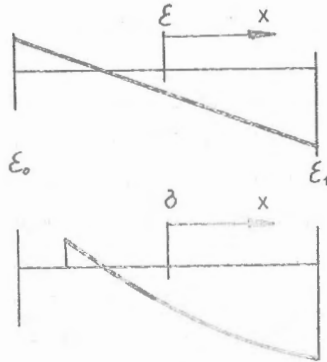
ALKION VOIMATASAPAINON ITEROINTI

Analyysin keskeisin toimenpide on poikkileikkauksessa vaikuttavan kuormituksen ja leikkauksen reunavenymien välisen riippuvuuden määrittäminen. Tehtävänä on siis laskea annetun kuormituksen $(F, M = F \cdot \Delta)$ aiheuttamat reunavenymät ϵ_0 ja ϵ_1 , kuva 3.



Kuva 3. Poikkileikkauksen kuormitus ja Bernoullin otaksuman mukainen jännitys-
jakauma.

Kuvan 3 mukainen reunavenymien riippuvuus kuormituksesta ei ole suoraan ratkais-
tavissa. Sen sijaan päinvastainen operaatio eli kuormituksen ratkaiseminen reuna-
venymien avulla tapahtuu helposti kuvan 4 mukaisesti kun $\sigma = \sigma(\epsilon)$ tunnetaan.



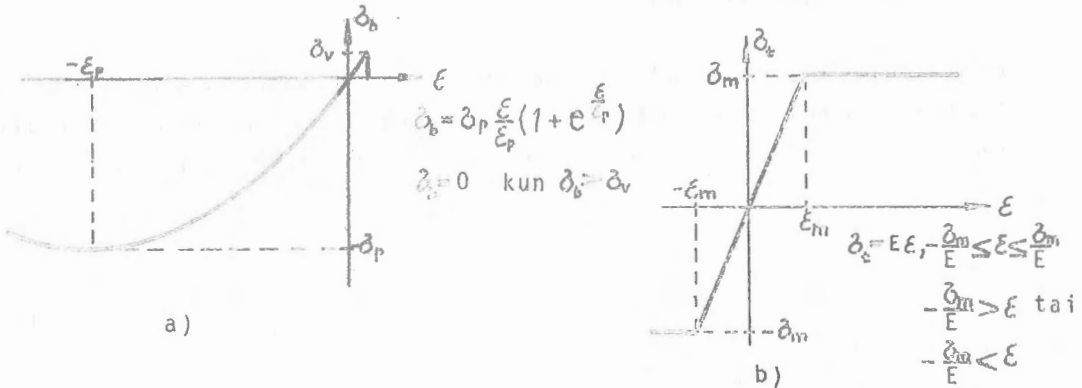
$$\begin{cases} F = \int_A \sigma(\epsilon) dA \\ M = \int_A x \sigma(\epsilon) dA \end{cases}$$

A = poikkipinta

$$\epsilon = (\epsilon_0 + \epsilon_1) / 2 + \frac{1}{h} (\epsilon_0 - \epsilon_1) x$$

Kuva 4. Kuormituksen riippuvuus reunavenymistä.

Betonin jäykkyys-venymäkäyrän oletetaan olevan kuvassa 5a esitetyn kaltainen. Kun vetojännitys on suurempi kuin annettu vetomurtolujuus, vetojännitys häviää. Terästen jännitys-venymäkäyrä on esitetty kuvassa 5b. Liukumista ei oleteta tapahtuvan terästen ja betonin välillä. Terästen oletetaan sijaitsevan symmetrisesti keskiviivan suhteen.



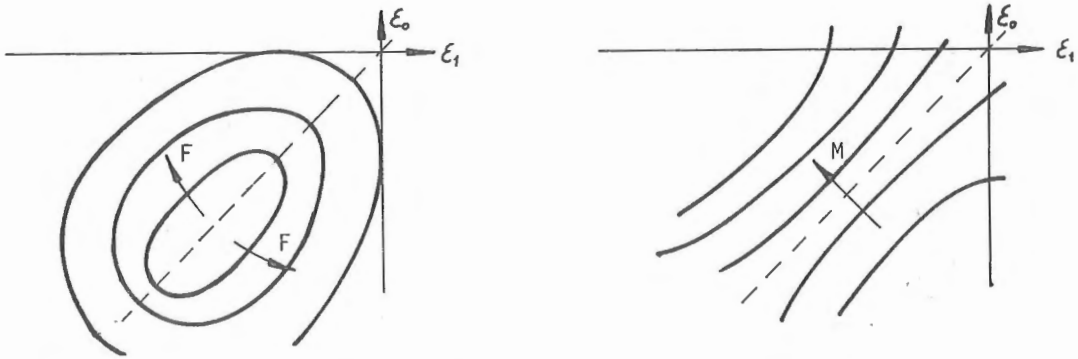
Kuva 5. Materiaalien σ - ϵ -käyrät.

Kuormitukseksi saadaan

$$\begin{aligned} F &= t \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_b(\epsilon) dx + (A_t/2) \{ \sigma_t(\epsilon(h_0/2)) + \sigma_t(\epsilon(-h_0/2)) \} \text{ ja} \\ M &= t \int_{-h/2}^{h/2} x \sigma_b(\epsilon) dx + (A_t/4) h_0 \{ \sigma_t(\epsilon(h_0/2)) - \sigma_t(\epsilon(-h_0/2)) \}, \end{aligned} \quad (1)$$

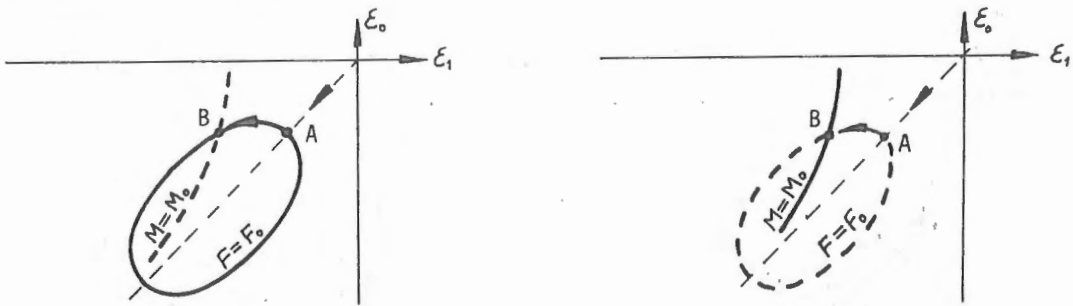
missä $\epsilon = (\epsilon_0 + \epsilon_1)/2 + (1/h)(\epsilon_0 - \epsilon_1)x$, t on seinän leveys ja h seinän paksuus, A_t terästen yhteenlaskettu poikkipinta-ala sekä h_0 terästen etäisyys toisistaan (symmetrisesti).

Kun kuormitus lasketaan kaavojen (1) mukaisesti eri reunavenymien arvoilla, saadaan voimalle ja momentille kuvan 6 esittämät tasa-arvokäyrät.



Kuva 6. Voiman ja momentin tasa-arvokäyrät reunavenymien funktiona.

Kun kuvan 1 mukaisessa rakenteessa alkaa ulkoinen kuormitus vaikuttaa, tunnetaan deformaation tilaa vastaava sisäinen kuormitus ($F_0, M_0 = F_0 e$) mielivaltaisessa leikkauksessa. Reunavenymien määrittäminen alkaa etsimällä suoralta $\epsilon_0 = \epsilon_1$ normaali-voima $F = F_0$, kuvassa 7 piste A.

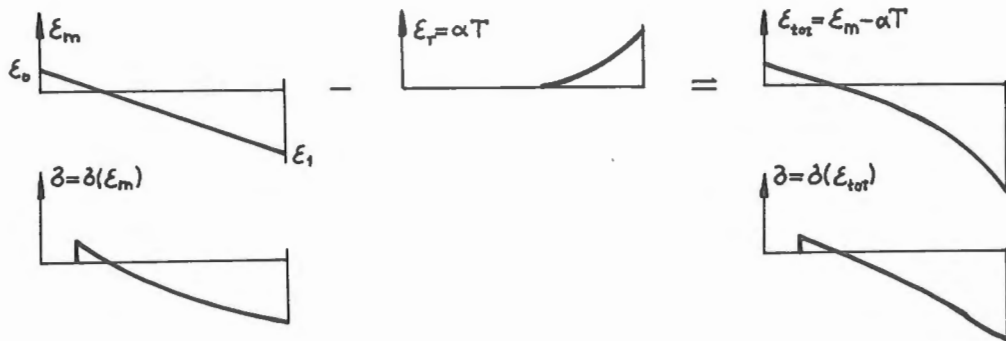


Kuva 7. Reunavenymien laskeminen.

Kun piste $F = F_0$ ja $M = 0$ on löydetty, edetään voimapinnan tasa-arvokäyrällä kunnes haluttu momentti M_0 löydetään pisteessä B. Kun tämä prosessi on tehty kaikille valituille leikkauksille, saadaan koko rakenteen taipumaviiva selville kuten kohdassa "laskennan periaatteet" on esitetty.

LÄMPÖKUORMA JA VIRUMINEN

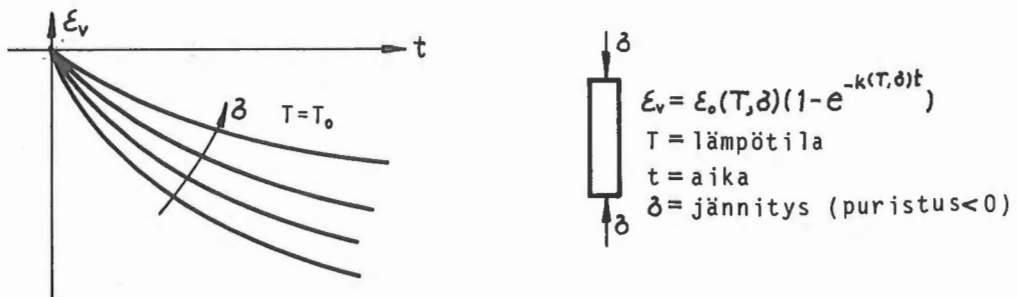
Kuvan 7 piste B tietyssä leikkauksessa on saatu, kun rakenteeseen vaikuttaa kuvan 1 mukainen mekaaninen kuormitus. Kun mielivaltainen lämpötilajakauma alkaa vaikuttaa mekaanisen kuormituksen lisäksi, pidetään aluksi muodonmuutokset ennallaan. Tämä merkitsee jännitys jakauman muutosta kuvan 8 osoittamalla tavalla.



Kuva 8. Lämpöjännitysten syntyminen.

Vastaavasti ao. leikkauksen kuormitus kuvan 7 pisteessä B on muuttunut. Täten kuvan esittämiä voiman ja momentin tasa-arvokäyriä vastaavilla muuttuneilla käyrillä löydetään pisteelle B uusi paikka. Toisin sanoen kuvassa 8 venymät ϵ_0 ja ϵ_1 saavat sellaiset arvot, että jännitys jakauma $\sigma = \sigma(\epsilon_{tot})$ tuottaa alkuperäisen kuormituksen.

Virumisessa otetaan huomioon kolme tekijää: jännitys, lämpötila T ja aika t . Kuvasta 9 käy ilmi periaate, jota on sovellettu.

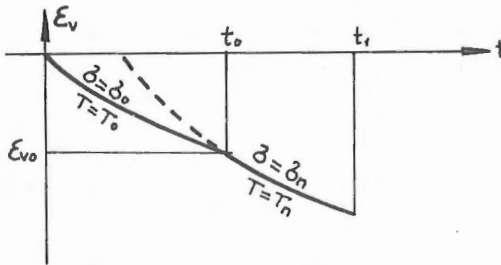


Kuva 9. Virumisvenymä ϵ_v .

Virumisen oletetaan saavuttavan raja-arvon lämpötilan ja jännityksen pysyessä

vakioina. Sekä lämpötila että jännitys kasvattavat virumista. Muodonmuutosten tapahtuessa lämpötila ja jännitys eivät pysy vakioina. Tämän vuoksi laskenta on suoritettava sopivin aika-askelin, joiden aikana nämä suureet pidetään vakioina.

Oletetaan, että edellisen askeleen jälkeen $\epsilon_v = \epsilon_{v0}$, $t = t_0$, $T = T_0$ ja $\sigma = \sigma_0$ sekä nyt laskettavalla askeleella lämpötila $T = T_1$ ja askeleen pituus $\Delta t = t_1 - t_0$. Aluksi jännitys $\sigma = \sigma_0$, joten viruminen tapahtuu käyrää $\epsilon_v = \epsilon_v(t_1, (T_0 + T_1)/2, \sigma_0)$ pitkin, joka pannaan kulkemaan pisteen (ϵ_{v0}, t_0) kautta, kuva 10.



Kuva 10. Viruminen jännityksen muuttuessa.

Kun koko rakenne on käyty läpi ja taipumaviiva laskettu, saadaan uudet jännitykset σ_1 . Nyt $\epsilon_v = \epsilon_v(t_1, (T_0 + T_1)/2, (\sigma_0 + \sigma_1)/2)$, joka otetaan huomioon samalla kun taipumaa iteroidaan. Näin jatkaen viruminen saadaan laskettua aika-askelittain askeleen alku- ja loppujännitysten keskiarvoa käyttäen. Viruminen otetaan huomioon analogisesti lämpöjännitysten kanssa yhden taipumaviivan iterointiaskelen aikana. Erona on vain se, että virumisvenymä lasketaan olettaen se riippuvaiseksi edellisestä taipumaviivan iteraatiosta, kun lämpövenymä on koko taipumaviivan iteraation aikana vakio.

NÄKÖKOHTIA LASKENNASTA

Muodonmuutosten syklistisyys

Materiaali käyttäytyy laskennassa epälineaarisen kimmoisesti. Näin ollen kuvan 6 voima- ja momenttipintojen tasa-arvokäyrät ovat riippumattomia tiestä, jota pitkin tarkasteltavaan pisteeseen on tultu. Todellisuudessa liikkeen palautuessa materiaalissa vaikuttavan hystereesin takia vain monotonisesti kasvavilla reunavenymillä kuvan 6 käyrät ovat paikkansapitäviä. Hystereesiä ei kuitenkaan ole otettu huo-

mioon, koska rakennealkion voimatasapainon iterointi muuttuisi oleellisesti työllämmäksi. Lisäksi materiaaliominaisuuksien muuttuminen edellisen kuormitusinkrementin aikaisista ominaisuuksista eliminoi hystereesin vaikutusta. Sen sijaan laskelemissa otetaan huomioon vetohalkeamiin liittyvä hystereesin kaltainen ilmiö: kun vetohalkeama on syntynyt, ei materiaali kykene enää ottamaan vastaan kuin puristusjännityksiä.

Inkrementointi

Voimatasapainon iterointimenettelystä johtuen mekaaninen kuormitus voidaan laittaa vaikuttamaan kerralla ilman inkrementteihin jakoa. Myös lämpökuormaa tietyllä ajanhetkellä mekaanisen kuorman kanssa yhdessä voitaisiin käsitellä samoin. Näin säästyisi yhden kuormitustapauksen laskenta. Tähän ei kuitenkaan ole menty vaan lämpökuorma annetaan riittävän useana inkrementtinä, jolloin heti mekaanisen kuormituksen ja jokaisen lämpöinkrementin jälkeen voidaan vetomurron sulkeutuminen testata. Edelleen lämpötilan inkrementoinnilla löydetään oleellisesti tarkemmin rakennetta rasittavin kuormitus kuin vain yhdellä kuormituskerralla.

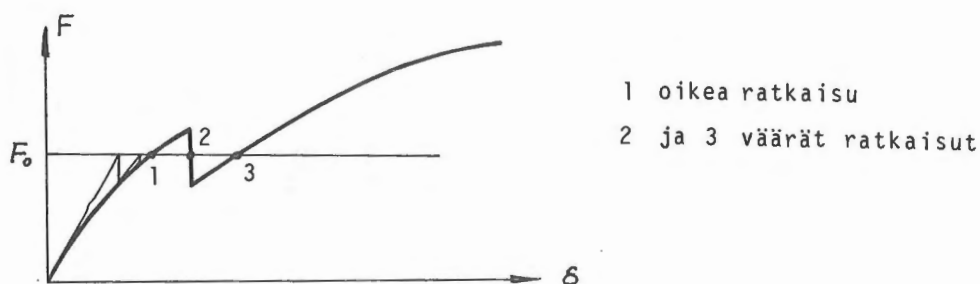
Viruminen

Virumiskäyrän matemaattinen malli ei vastaa teorian mukaisia viskoplastisia malleja. Käyrän lauseke on valittu mahdollisimman yksinkertaiseksi jotta numeeriset laskelmat saadaan minimoitua. Huolimatta yksinkertaisuudestaan käytetyn virumiskäyrän muoto on melko lähellä teorian mukaista virumiskäyrän muotoa. Tällä tavalla viruminen saadaan esitettyksi muodossa, jonka ahsiosta laskentaparametrien määrittäminen on kokeellisesti mahdollista. Periaatteessa myös rakenteen jännityshistoria olisi otettava huomioon, mutta tähän ei ole ryhdytty, koska sekä tällainen virumamalli että sen tarvitsema kokeellinen informaatio vaativat aivan toista suuruusluokkaa olevia selvityksiä kuin nyt toteutettu yksinkertainen malli. Lisäksi palotilannetta ajatellen tapahtumat ovat melko nopeita ja rakenteen kriittinen tila saavutetaan usein jo ennen lämpötilan oleellista laskua. Näin ollen sovelletun yksinkertaisen virumamallin käyttö on toistaiseksi perusteltua.

Iterointien suppenevuus

Kuvan 6 esittämällä normaalivoimapinnalla on yksi absoluuttinen minimi ja momenttipinnalla absoluuttiset minimi ja maksimi mekaanisen kuormituksen vaikuttaessa. Lisäksi raudoituksen ja vetolujuuden vaihtelusta riippuen voi myös paikallisia ääri-

arvokohtia esiintyä. Nämä voivat mahdollisesti ohjata alkion voimatasapainon iteraation väärään ratkaisuun kuvan 11 esittämän periaatteen osoittamalla tavalla.



Kuva 11. Monikäsitteisen ratkaisun iteraatio.

Ohjelmasta saatujen kokemusten perusteella iteraatio näyttää kuitenkin kulkevan kohti oikeaa ratkaisua laskettaessa kaikilla tavallisimmilla materiaaleilla.

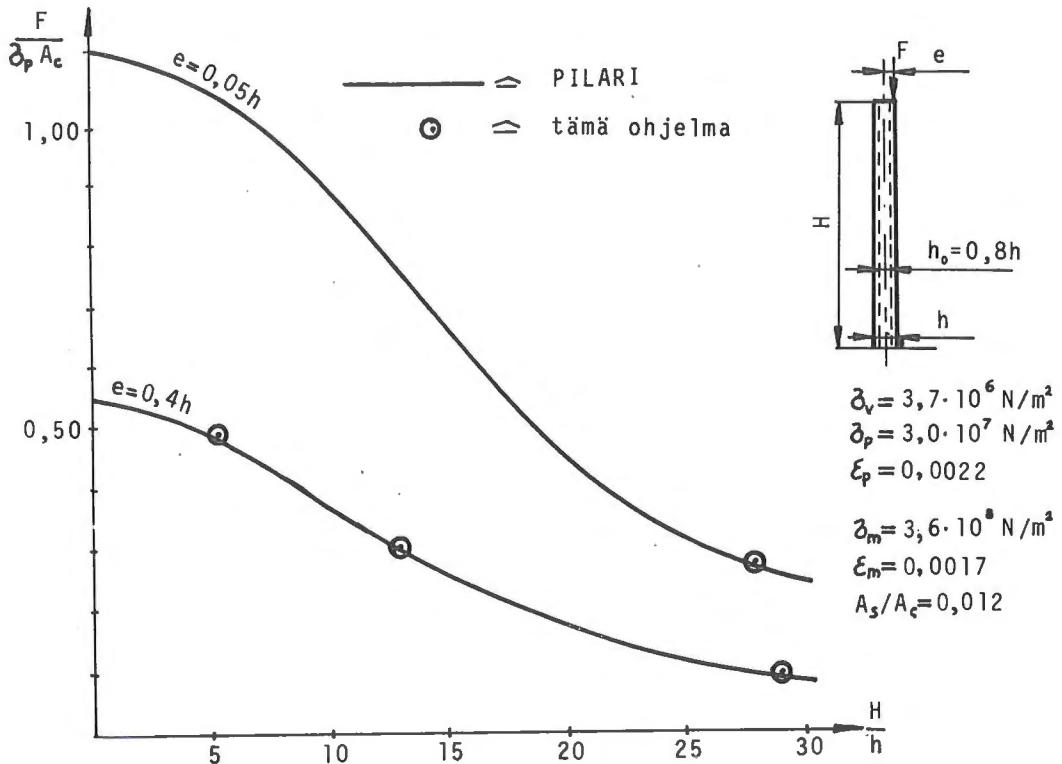
Kun murtokuormaa haetaan, voidaan murtuminen jakaa kahteen tyyppiin. Hoikilla rakenteilla menetetään stabiilius, jolloin murto tapahtuu käytännössä terästen vetomurtona. Tässä tapauksessa geometrinen epälineaarisuus on merkittävä, mikä näkyy taipumaviivan iteraation hajaantumisenä murren tapahtuessa. Leveyteensä nähden matalilla rakenteilla murtokuorman saavuttaminen tapahtuu kun betonin puristumurto on edennyt riittävän pitkälle. Tällöin poikkileikkauksen voimatasapainoa ei löydetä kuvan 7 mukaisesti, mikä ilmenee voimatasapainon iteroinnin hajaantumisenä.

Lämpökuormituksen ollessa mukana tietyn poikkileikkauksen normaalivoima- ja momenttipinnoilla voi olla useita ääriarvokohtia vetohalkeilusta huolimatta. Niinpä on periaatteessa mahdollista, että vaikka normaalivoiman ensimmäinen minimikohta on vielä suurempi kuin kuormituksen voimakomponentti, normaalivoiman toinen minimi voi olla pienempi. Näin ollen voimatasapainon iterointi ei löydä ratkaisua ensimmäisen minimin ympäristöstä ja ohjelma ilmoittaa murtumisen tapahtuneeksi. Mikäli normaalivoimapinnan minimikohdat ovat riittävän lähellä toisiaan on mahdollista, että ensimmäisen minimin ympäristössä iteroitaessa jossakin vaiheessa iterointi siirtyy toisen minimin vaikutuspiiriin. Kuitenkaan ei voida olla varmoja oikean ratkaisun löytymisestä sillä on mahdollista, että iterointi on siirtynyt minimin väärälle puolelle jolloin saadaan ei-minimien energiaa vastaava ratkaisu. Ilmeistä on kuitenkin, että vain lähellä murtokuormaa nämä ongelmat tulevat esille. Koska kokeellisia tuloksia ei vielä ole käytettävissä ohjelman testaamiseksi, ei suoriteuille laskelmille ole käytännön vertailuaineistoa. Tulokset kuitenkin näyttävät järkeviltä. Mikäli murtokuormituksen määrittämisessä tapahtuu em. kaltaisia ilmiöitä,

voidaan ohjelmaan lisätä proseduuri, joka etsii lähimmän minimin ympäristöstä ratkaisua. Jos ratkaisua ei löydy, tutkitaan seuraava minimi jne., ja mikäli mikään löydettyistä minimeistä ei tuota ratkaisua, on murtokuorma saavutettu.

Vertailua ilman lämpökuormaa

"PILARI"-niminen /1/ ohjelma laskee kuvan 1 mukaiselle rakenteelle murtokuorman kun lämpökuormitusta ei ole. Kuvassa 12 on esitetty mielivaltaisesti valittujen rakenteiden murtokuormat molempien ohjelmien mukaan.

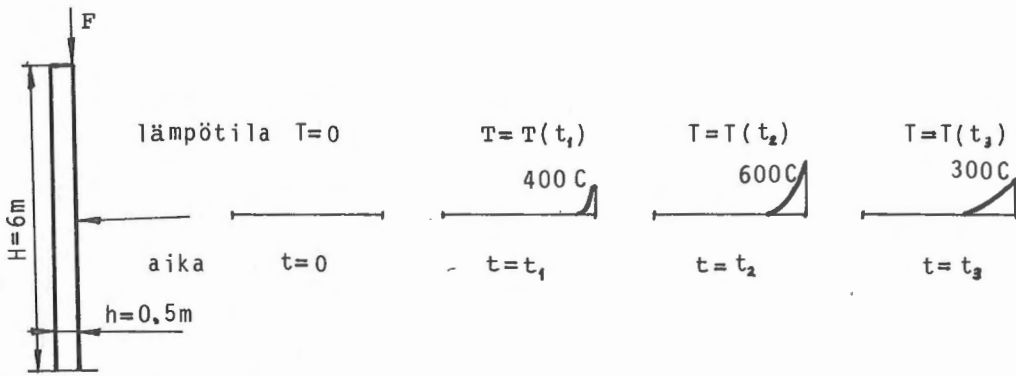


Kuva 12. Ohjelmien vertailua.

Neljälle eri laskentamenetelmälle saadaan molemmilla ohjelmilla lähes samat tulokset, mikä osoittaa ohjelmien toimivan suurella todennäköisyydellä oikein.

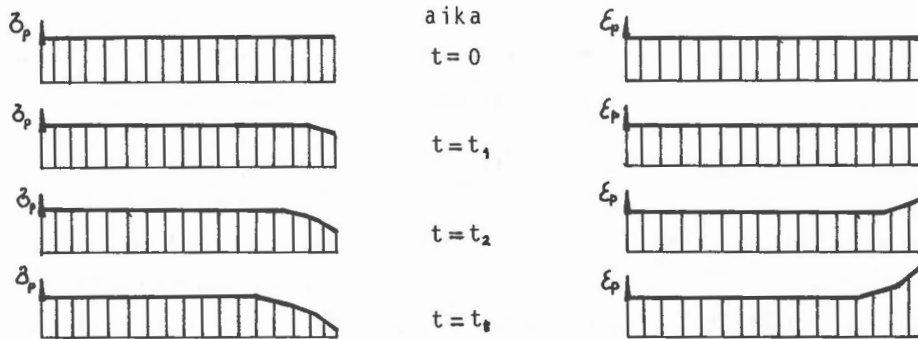
LASKUESIMERKKI

Laskettu esimerkkitapaus kuormituksineen on esitetty kuvassa 13.

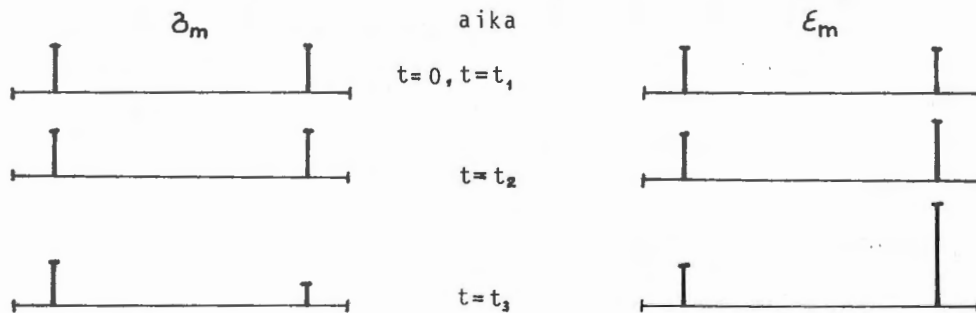


Kuva 13. Esimerkkirakenne ja kuormitukset.

Ajanhetkellä $t=0$ vaikuttaa vain mekaaninen kuorma F . Seuraavilla ajanhetkillä $t=t_i$ lämpötilajakauman $T=T(t_i)$ vaikutus lisätään mekaanisen kuormituksen vaikutukseen. Materiaaliominaisuuksien riippuvuus ajanhetkestä t_i (oikeammin lämpötilajakaumasta $T(t_i)$) on esitetty kuvissa 14 ja 15.

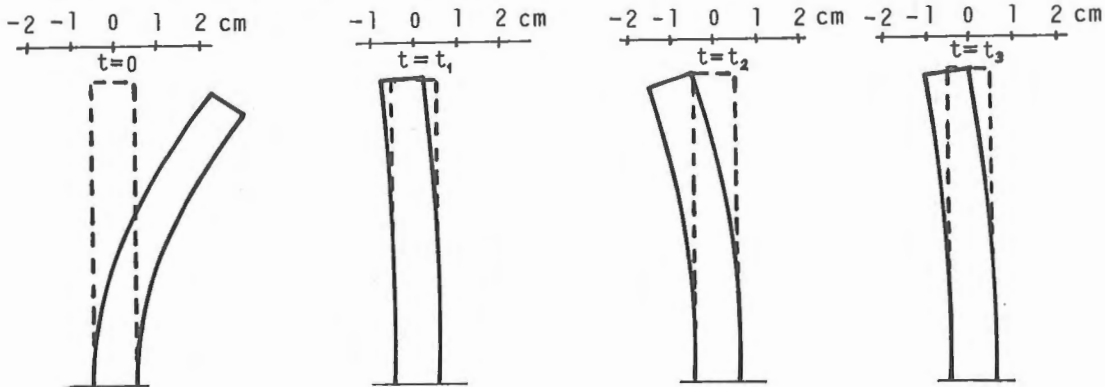


Kuva 14. Betonin σ_p ja ϵ_p leikkauksessa A-A. (σ_p ja ϵ_p on määritelty kuvassa 5a).

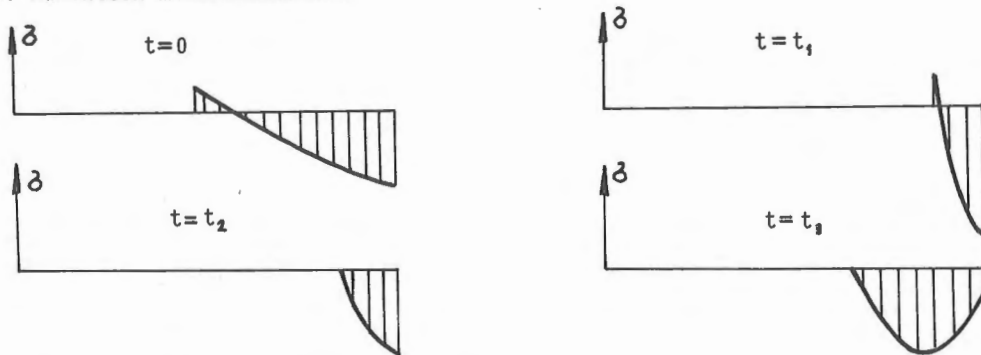


Kuva 15. Teräksen σ_m ja ϵ_m leikkauksessa A-A. (σ_m ja ϵ_m on määritelty kuvassa 5b).

Tulokset on esitetty kuvissa 16 ja 17.



Kuva 16. Rakenteen muodonmuutokset.



Kuva 17. Jännitys jakauma rakenteen kiinnityksessä.

Materiaaliominaisuudet eivät ole minkään kokeen tulosten mukaisia vaan vastaavat jonkinlaisia keskinkertaisia kokemuseräisiä arvoja. Samoin lämpötilajakauman kehittyminen ajan funktiona perustuu kokemuseräiseen tietoon. Geometrisen epälineaarisuuden huomioonottaminen on vaatinut jokaisella kuormainkrementillä keskimäärin 8 iteraatiokierrosta. Toleranssi taipumaviivan muuttumiselle kahden peräkkäisen iteraatiokierroksen välillä on ollut 0,001.

Kun viruminen otetaan huomioon, ei lämpölaajeneminen taivuta rakennetta niin paljon kuin kuva 16 osoittaa ajanhetkellä $t=t_1$. Vastaavasti ajanhetkellä $t=t_3$ pitäisi taipuman kasvaa. Virumislaskuissa on kuitenkin virheellisyttä, jonka vuoksi tuloksia ei tässä yhteydessä esitetä.

LOPPUPÄÄTELMÄT

Kehitetty tietokoneohjelma on ilmeisen tehokas ratkaisemaan epäkeskisesti kuormitetun seinän lämpömekaanisen käyttäytymisen. Ohjelma on vielä sen verran kesken-

eräinen että ohjelmatekninen virhe virumisen laskemisessa on korjaamatta. Yksinkertaisuudestaan huolimatta virumismalli toimiessaan oikein kuvaa kuitenkin ilmeisen totuudenmukaisesti virumisilmiötä.

Betonin sisältämän kosteuden vaikutusta ei ole otettu laskelmissa huomioon. Tällä seikalla on merkitystä rakenteen käyttäytymiseen mikäli rakenne on riittävän kostea. Tällöin kosteudesta aiheutuva lohkeilu muuttaa oleellisesti rakenteen käyttäytymistä. Höyrystymispaineen ja rakenteessa esiintyvän aksiaalisen jännityksen vaikutusta halkeilun syntyyn voidaan kuvata ilmeisesti sopivan yksinkertaisesti, jolloin ohjelma saadaan kuvaamaan menestyksellisesti myös höyrystymislohkeilua. Riittävän kuivalle rakenteelle voidaan ohjelmaa soveltaa nykyisessä muodossaan.

LÄHDELUETTELO

- [1] Sarja, A., Home, M., Hannus, M., Teräsbetonipilarien ja -seinien mitoitus-
käsikirja (93 s.). Rakenteiden Mekaniikan Seura, Otaniemi 1972.

Heikki Noro, dipl.ins., Valtion teknillinen tutkimuskeskus, betoni- ja silikaattitekniikan laboratorio