

Hannu Virtanen
Martti Mikkola

Rakenteiden Mekaniikka, Vol. 18
No 1 1985, s. 53...68

TIIIVISTELMÄ: Kirjoituksessa on esitetty menetelmä tasokehien geometrisesti epälineaarisen käyttäytymisen analysoimiseksi tietokoneella. Sauvoja käsitellään taivutetun ja aksiaalisesti kuormitetun sauvan teorian mukaisesti. Teoria ottaa huomioon aksiaalisen voiman ja taivutuksen vuorovaikutuksen. Ratkaisumenetelmät ovat inkrementaalisia, joissa kuormitus lisätään askeleittain ja joka askeleella lasketaan rakenteen tangentiaalinen jäykkyysmatriisi. Sauvan mukana liikkuvan koordinaatiston asema päivitetään jokaisen askeleen jälkeen. Tämä päivitetty Lagrangen menettely sallii suuret siirtymät ja kiertymät. Sauvan muodonmuutosten oletetaan pysyvän sauvateorian mukaisesti pieninä. Kullakin kuorma-askeleella käytetään modifioitua Newton-Raphson tasapainoiterointia. Käännepisteiden ohittamiseksi on modifioituun Newton-Raphson-iterointiin lisätty vakiokaarenpituusmenetelmä. Toteutetulla ohjelmalla on laskettu kolme esimerkkiä. Tulokset vastaavat hyvin vertailutuloksia. Vakiokaarenpituusmenetelmä on tehokas ja suositettava ratkaisumenetelmä.

JOHDANTO

Kasvavan kuormituksen aiheuttama rakenteen geometrian muutos on merkittävä monissa rakenteissa. Vaikka rakenne pysyy kimmoisana, on kuorma-siirtymä-riippuvuus epälineaarinen. Kehäarakenteiden geometrisesti epälineaariseen analysointiin käytettävät numeeriset menetelmät pohjautuvat yleensä joko elementtimenetelmään tai taivutetun ja aksiaalisesti kuormitetun sauvan teoriolla johdettuun siirtymämenetelmään. Elementtimenetelmässä tarvitaan usein paljon elementtejä tyydyttävän tarkkuuden saavuttamiseksi. Jälkimmäisessä menetelmässä elementtejä tarvitaan vähemmän; yleensä yksi elementti sauvaa kohden riittää.

Taivutetun ja aksiaalisesti kuormitetun sauvan teoriaan perustuvan menetelmän ovat valinneet esimerkiksi Jennings /1/, Connor /2/ ja Oran /3,4/. Connor esittää menetelmän, joka soveltuu pienten kiertymien tapaukseen. Oran on kehittänyt menetelmän, jossa sauvojen paikalliset muodonmuutokset ovat pieniä, vaikka solmupisteiden siirtymät ja kiertymät voivat olla mielivaltaisen suuria. Useimmat kirjoittajat /5,6,7,8,9/ perustavat menetelmänsä elementtimenetelmään. Belytschko /5,6/ käyttää sauvan mukana liikkuvaa koordinaatistoa ja pienten muodonmuutosten palkki-elementtiä. Wood ja Zienkiewicz /7/ esittävät suurten siirtymien ja kiertymien ta-

paukseen soveltuvan elementtimenetelmän. Samantapaista menetelmää ovat käyttäneet myös Bathe ja Belourchi /8/: he ovat verranneet kokonais- ja päivitetyn Lagrangen esitystapaa. Remseth /9/ on kehittänyt suurten siirtymien ja pienten muodonmuutosten elementtimenetelmän kolmiulotteisessa tapauksessa.

Tässä kirjoituksessa sovelletaan Mikkolan /10, 11/ esittämää teoriaa, joka on samankaltainen kuin Oranin /3,4/ käyttämä. Tarkastellaan suorista, poikkileikkaukseltaan särmiönmuotoisista sauvoista koostuvaa kehärakennetta, jossa sauvat liittyvät kiinteästi toisiinsa solmupisteissä. Ulkoista kuormitusta esiintyy vain solmupisteissä. Sauvojen käyttäytymistä seurataan taivutetun ja aksiaalisesti kuormitetun sauvan teorian mukaisesti. Sauvateoria ottaa huomioon aksiaalisen voiman ja taivutuksen välisen vuorovaikutuksen. Kuormitus lisätään inkrementteittäin ja sauvan mukana liikkuvan koordinaatiston asema päivitetään jokaisen askeleen jälkeen. Tämä vastaa päivitetyn Lagrangen mukaista esitystapaa ja sallii kehärakenteen suuret siirtymät ja kiertymät, vaikka sauvojen paikalliset muodonmuutokset oletetaan pieniksi. Kullakin kuorma-askeleella käytetään modifioitua Newton-Raphson tasapainoiterointia, jossa rakenteen tangentiaalinen jäykkyys päivitetään kunkin askeleen alussa. Rakenteen kuorma-siirtymäkäyrän seuraamiseksi käännepisteen yli ja sen jälkeen käytetään vakiokaarenpituusmenetelmää /12,13,14/, jossa kuorma-askeleen suuruus määrätään siten, että kuorma-siirtymäkäyrällä edetään ennalta valitun vakion pituinen matka.

TEORIA

Tasapainoyhtälöt

Rakenteen tasapainoyhtälöt voidaan esittää muodossa

$$f_i(v_1, v_2, \dots, v_n) = P_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

missä suureet v_i ovat solmuisiirtymiä, P_i rakennetta kuormittavia voimia ja f_i epälineaarisia funktioita, jotka kuvaavat solmuisiirtymistä v_i aiheutuvia sisäisiä voimia.

Koska yhtälöiden (1) muodostaminen ja ratkaiseminen on yleensä vaikeaa, jopa mahdotonta, ongelma linearisoidaan. Linearisoitu inkrementaalinen tasapainoyhtälö saadaan yhtälöstä (1) differentioimalla muotoon

$$[K]\{\Delta v\} = \{\Delta P\}, \quad (2)$$

missä $\{\Delta v\}$ ja $\{\Delta P\}$ ovat siirtymän- ja kuormanlisäykset, sekä

$$[K] = [\partial f_i / \partial v_j] \quad (3)$$

on rakenteen tangentiaalinen jäykkyyso-matriisi. Rakenteiden epälineaariset lasken-tamenetelmät perustuvat yhtälöiden (2) toistuvaan muodostamiseen ja ratkaisemiseen.

Voima- ja muodonmuutosriippuvuudet

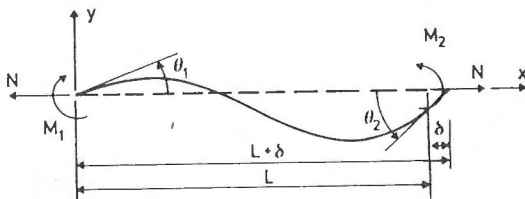
Jotta sauvan muodonmuutokset voitaisiin erottaa jäykän kappaleen siirtymistä, käytetään päivitety-n Lagrangen esitystavan mukaista sauvakoordinaatistoa vertailu-tilana (kuva 1). Sauvavoimien M_1 , M_2 , N ja sauvan siirtymäsuureiden θ_1 , θ_2 , δ vä-liset riippuvuudet määritetään taivutetun ja aksiaalisesti kuormitetun sauvan teo-rian avulla.

Kaareutumisen aiheuttama sauvan pituudenmuutos otetaan huomioon siten, että ak-siaalinen muodonmuutos on muotoa

$$\epsilon = du/dx + (dv/dx)^2/2. \quad (4)$$

Sauvan akselin käyristymälle κ pätee yhteys

$$\kappa = d^2v/dx^2. \quad (5)$$



Kuva 1. Sauvan siirtymäsuureet ja sauvavoimat.

Sauvojen aine on lineaarisesti kim-moista ja sauvan poikkileikkaus on sym-metrinen xy-tason suhteen ja muuttuma-ton x-akselin suunnassa. Lineaarisen palkkiteorian ja Hooken lain mukaiset voima-muodonmuutosriippuvuudet ovat voimassa eli M :lle ja N :lle pätee

$$M = EI\kappa \quad (6)$$

$$N = EA\epsilon,$$

missä E on sauvan aineen kimmomoduuli, A sauvan poikkileikkauksen pinta-ala ja I sauvan jäyhyysmomentti.

Sauvateoria ottaa huomioon aksiaalisen voiman ja taivutuksen välisen vuorovai-kutuksen eli taipuma ratkaistaan taivutetun ja aksiaalisesti kuormitetun sauvan

differentiaaliyhtälöstä

$$EI d^4 v/dx^4 - Nd^2 v/dx^2 = 0. \quad (7)$$

Yhtälön ratkaisun muoto riippuu siitä, onko voima N puristusta ($N < 0$) vai vetoa ($N > 0$).

Sauvavoimat saadaan lausutuiksi sauvan siirtymäsuureiden θ_1 , θ_2 ja δ avulla seuraavasti

$$\begin{aligned} M_1 &= -EI/L(c_1\theta_1 + c_2\theta_2), \\ M_2 &= EI/L(c_2\theta_1 + c_1\theta_2), \\ N &= EA(\delta/L + b_1(\theta_1 + \theta_2)^2 + b_2(\theta_1 - \theta_2)^2). \end{aligned} \quad (8)$$

Näissä kaavoissa L on sauvan alkuperäinen pituus, c_1 ja c_2 stabiliteettifunktioita sekä b_1 ja b_2 kaareutumisfunktioita.

Stabiliteetti- ja kaareutumisfunktioit (liite 1) riippuvat tekijästä

$$k^2 = |N|/EI. \quad (9)$$

Funktioiden muoto riippuu aksiaalisen voiman merkistä. Koska funktioit ovat määriteltäviä tapauksessa $N = 0$, on funktioille johdettu likiarvokaavat pienen aksiaalisen voiman tapauksessa.

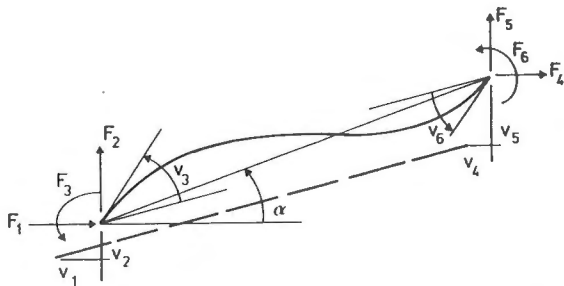
Sauvan tangentiaalinen jäykkyysoatriisi

Olkoot $\{F\}$ ja $\{v\}$ sauvanpäävoimat ja -siirtymät sisältävät vektorit rakennekoordinaatistossa (kuva 2.(a)) ja $\{\bar{F}\}$, $\{\bar{v}\}$ vastaavat vektorit sauvakoordinaatistossa (kuva 2.(b)). Näiden vektorien (kuva 2) välille voidaan johtaa yhteydet

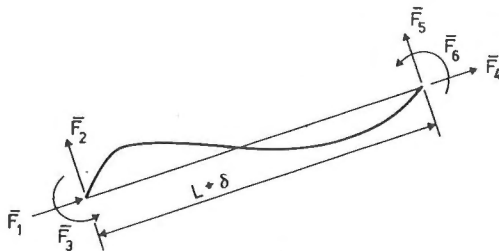
$$\begin{aligned} \{F\} &= [T]^T \{\bar{F}\} \\ \{\Delta \bar{v}\} &= [T] \{\Delta v\}, \end{aligned} \quad (10)$$

joissa esiintyvä koordinaatiston muunnosatriisi $[T]$ on

$$[T] = \begin{bmatrix} [r] & 0 \\ 0 & [r] \end{bmatrix}; \quad [r] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (11)$$



(a) Sauvanpäävoimat ja -siirtymät rakennekoordinaatistossa



(b) Sauvanpäävoimat ja -siirtymät sauvakoordinaatistossa

Kuva 2. Sauvanpäävoimat ja -siirtymät.

Vastaavasti sauvakoordinaatistossa (kuva 1 ja 2(b)) sauvanpäävoima- ja -siirtymävektorien sekä sauvavoima- ja siirtymäsuurevektorien välille saadaan yhteydet

$$\begin{aligned} \{\bar{F}\} &= [B]^T \{S\} \\ \{\Delta u\} &= [B] \{\Delta \bar{v}\}, \end{aligned} \quad (12)$$

joissa esiintyvät vektorit

$$\begin{aligned} \{S\}^T &= \{-M_1 \quad M_2 \quad N\} \\ \{u\}^T &= \{\theta_1 \quad \theta_2 \quad \delta\} \end{aligned} \quad (13)$$

ja matriisi

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & 1/L+\delta & 1 & 0 & -1/L+\delta & 0 \\ 0 & 1/L+\delta & 0 & 0 & -1/L+\delta & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Käytetään tasapainoyhtälöiden inkrementaalista muotoa (2). Yhteyden

$$\{F\} = [T]^T [B]^T \{\delta\} \quad (15)$$

avulla saadaan

$$\{\Delta F\} = [T]^T [B]^T \{\Delta S\} + [T]^T [\Delta B]^T \{S\} + [\Delta T]^T [B]^T \{S\} = [K] \{\Delta v\}, \quad (16)$$

missä $[K]$ on sauvan tangentiaalinen jäykkyyssmatriisi rakennekoordinaatistossa.

Tangentiaalinen jäykkyyssmatriisi on muotoa /11/

$$[K] = [T]^T ([B]^T [k_T] [B] + [k_G]) [T], \quad (17)$$

missä esiintyvät matriisit

$$[k_T] = \begin{bmatrix} EI/L & c_1 & EI/L & c_2 & 2EA[b_1(\theta_1 + \theta_2) + b_2(\theta_1 - \theta_2)] \\ & & EI/L & c_1 & 2EA[b_1(\theta_1 + \theta_2) - b_2(\theta_1 - \theta_2)] \\ \text{symm.} & & & & EA/L \end{bmatrix} \quad (18)$$

ja

$$[k_G] = \begin{bmatrix} 0 & V/(L+\delta) & 0 & 0 & -V/(L+\delta) & 0 \\ & N/(L+\delta) & 0 & -V/(L+\delta) & -N/(L+\delta) & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & V/(L+\delta) & 0 \\ & & & & N/(L+\delta) & 0 \\ \text{symm.} & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

sekä näissä lyhennysmerkintä $V = (M_2 - M_1)/(L + \delta)$.

k_T :ä johdettaessa on toista kertalukua olevat termit jätetty pois. Sauvan päiden välinen etäisyydenmuutos δ on pieni verrattuna sauvan pituuteen L ja voidaan haluttaessa jättää pois kaavoissa (14) ja (19).

RATKAISUMENETELMÄT

Rakenteen kuorma-siirtymä -riippuvuutta ratkaistaessa on käytetty inkrementaalisia/iteratiivisia menetelmiä. Tunnetusti pelkkää inkrementaalista ratkaisumenetelmää sovellettaessa ajaututaan pois oikealta kuorma-siirtymäkäyrältä rakenteen epälinearisuuden lisääntyessä. Tämä voidaan välttää lisäämällä yhtälön (2) oikealle puolelle rakenteen ulkoisten kuormien ja sisäisten voimien erotus, ns. epätasapaino-voimavektori. Tasapainoiteroinnissa vaaditaan, että ulkoiset kuormat ja

sisäiset voimat ovat tasapainossa määrättyllä toleranssilla. Tällöin saadaan siirtymille asteittain tarkentuva tulos.

Modifioitu Newton-Raphson iterointimenetelmä

Inkrementaalissa menetelmässä rakenteen ulkoinen kuormitus voidaan esittää kuormakertoimen λ^i avulla kaavalla

$$\{P\}^i = \lambda^i \{P\}, \quad (20)$$

missä $\{P\}$ on vertailukuormavektori.

Kuorma lisätään inkrementteittain, jolloin kuormavektorille $\{P\}^i$ pätee

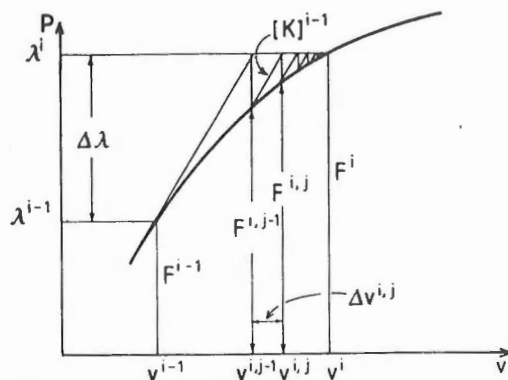
$$\begin{aligned} \{P\}^i &= \{P\}^{i-1} + \{\Delta P\} \\ &= \lambda^{i-1} \{P\} + \Delta \lambda \{P\}. \end{aligned} \quad (21)$$

Lisättäessä inkrementaaliseen menetelmään modifioitu Newton-Raphson iterointi, voidaan ratkaisuyhtälö iterointikierroksella j ja kuorma-askeleella i esittää muodossa (kuva 3)

$$[K]^{i-1} \{\Delta v\}^{i,j} = \{P\}^i - \{F\}^{i,j-1}, \quad (22)$$

mistä saadaan siirtymille tarkentuva ratkaisu

$$\{v\}^{i,j} = \{v\}^{i,j-1} + \{\Delta v\}^{i,j}. \quad (23)$$



Kuva 3. Modifioitu Newton-Raphson iterointimenetelmä.

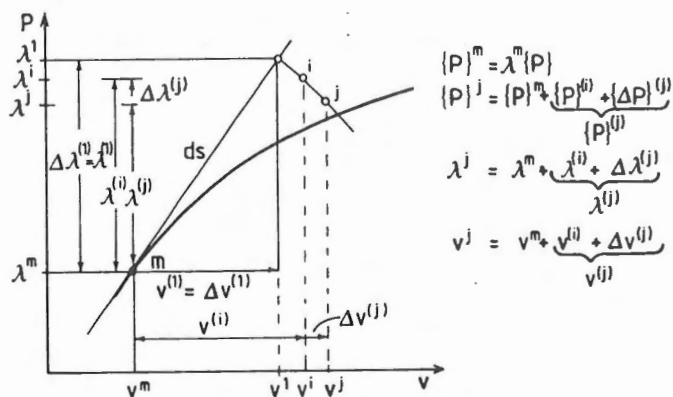
Tietokonelaskennassa on lisäksi käytetty päivitettyä Lagrangen esitystapaa. Tällöin rakenteen kunkin sauvan tangentiaalinen jäykkymatriisi ja sisäinen voimavektori muodostetaan ensin siirtymätilaa $\{v\}^{i-1}$ vastaavassa vertailutilassa, sauva-koordinaatistossa, minkä jälkeen suureet muunnetaan rakennekoordinaatistoon.

Vakiokaarenpituusmenetelmä

Yleisesti käytössä olevat Newton-Raphson iterointimenetelmät eivät ole tunnetusti tehokkaita. Ne myös usein hajaantuvat kriittisten pisteiden läheisyydessä, joissa tangenttijäykkyys tulee singulaariseksi. Eräs parhaista menetelmistä, jolla käännepisteet voidaan löytää ja ylittää, on vakiokaarenpituusmenetelmä /12, 13, 14/.

Tavallisen $n:n$ tasapainoyhtälön lisäksi vaaditaan (kuva 4) seuraavan yhteyden voimassaolo:

$$\{v^{(j)}\}^T \{v^{(j)}\} + (\lambda^{(j)})^2 = ds^2. \quad (24)$$



Kuva 4. Vakiokaarenpituusmenetelmä.

Vakio ds määrää kuorma-askeleen suuruuden siten, että kullakin askeleella kuorma-siirtymäkäyrällä $(n+1)$ -ulotteisessa avaruudessa edetty matka on vakion ds pituinen. Iteratiivinen siirtymänlisäys $\Delta v^{(j)}$ voidaan esittää modifioitun Newton-Raphson iterointimenetelmän avulla kahdessa osassa /13, 14/

$$\Delta v^{(j)} = \Delta v^{(j)11} + \Delta \lambda^{(j)} \Delta v^{(j)1}, \quad (25)$$

jotka voidaan lausua kaavoilla

$$\begin{aligned}\Delta v^{(j)I} &= K^{-1}P \\ \Delta v^{(j)II} &= K^{-1}R^I,\end{aligned}\tag{26}$$

missä K on tangenttijäykkyys kuorma-askeleen alussa ja $R^I = P^I - F^I$ on epätasapainovoima tilassa i .

Sijoittamalla yhtälö (25) ja yhteydet $v^{(j)} = v^{(i)} + \Delta v^{(j)}$ ja $\lambda^{(j)} = \lambda^{(i)} + \Delta \lambda^{(j)}$ kaavaan (24), $\Delta \lambda^{(j)}$:n ratkaisemiseksi saadaan toisen asteen yhtälö

$$a(\Delta \lambda^{(j)})^2 + 2b\Delta \lambda^{(j)} + c = 0,\tag{27}$$

jonka kertoimet ovat

$$\begin{aligned}a &= 1 + (\Delta v^{(j)I})^T (\Delta v^{(j)I}), \\ b &= \lambda^{(i)} + (\Delta v^{(j)I})^T (\Delta v^{(j)II} + v^{(i)}), \\ c &= (\Delta v^{(j)II})^T (\Delta v^{(j)II} + 2v^{(i)}).\end{aligned}\tag{28}$$

Ensimmäinen kuorma-askel aloitetaan käyttäen annettua kuormakertoimen inkrementtiä $\Delta \lambda_0$. Tämän jälkeen vakio ds kiinnitetään seuraavasti:

$$ds = \Delta \lambda_0 \sqrt{(\Delta v^{(1)I})^T (\Delta v^{(1)I})}.\tag{29}$$

Muilla kuorma-askelilla ensimmäistä iterointikierrosta vastaava kuormakertoimen inkrementti $\Delta \lambda^{(1)}$ saadaan kaavalla

$$\Delta \lambda^{(1)} = \pm ds \sqrt{(\Delta v^{(1)I})^T (\Delta v^{(1)I})}.\tag{30}$$

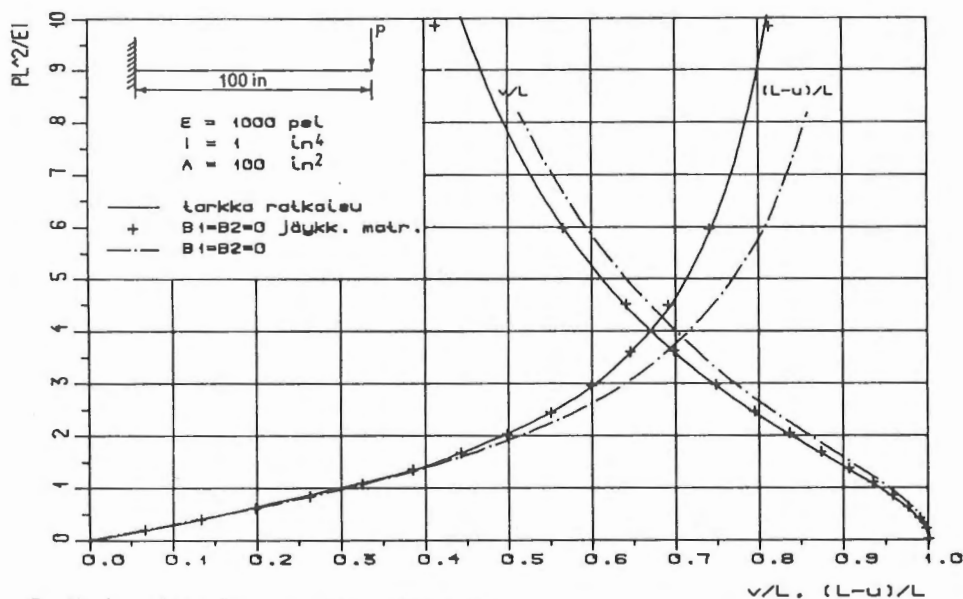
Kuormainkrementin merkki on sama kuin edellisellä kuorma-askeleella, ellei tangentiaalisen jäykkymatriisin determinantin merkki ole muuttunut, jolloin $\Delta \lambda^{(1)}$:n merkki vaihdetaan.

NUMEERISET ESIMERKIT

Toteutetulla tietokoneohjelmalla on laskettu useita esimerkkejä ohjelman suorituskyvyn arvioimiseksi. Seuraavassa esitetään kolme esimerkkiä, joissa ohjelmalla saatuja tuloksia verrataan analyttisiin tai numeerisiin vertailutuloksiin.

Ulokepalkki

Ensimmäisenä esimerkkinä laskettiin ulokepalkki, jota kuormittaa pistekuorma vapaassa päässä. Sauvan vapaan pään siirtymät on piirretty kuorman funktiona kuvassa 5. Ohjelmalla saatuja tuloksia on verrattu analyyttiseen, elliptisten integraalien avulla saatuun ratkaisuun /15/. Esimerkkiä ei voitu laskea käyttäen kaavan (18) tangentiaalista jäykkymatriisia.

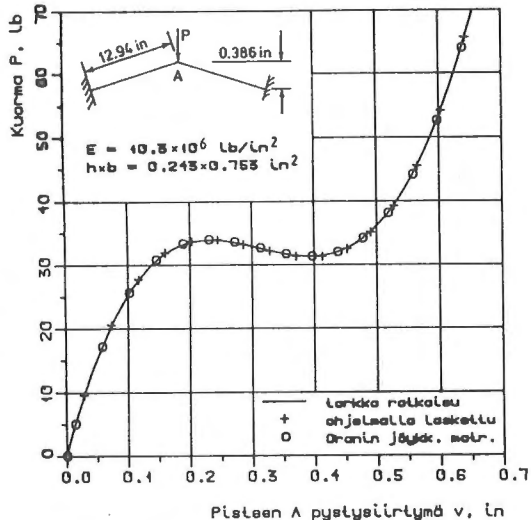


Kuva 5. Ulokepalkin kuorma-siirtymäkäyrät.

Esimerkki laskettiin yhtä elementtiä ja vakiokaarenpituusmenetelmää käyttäen. Tangentiaalisesta jäykkymatriisista (18) jätettiin pois ne termit, joissa esiintyy b_1 ja b_2 . Koska sauvan aksiaalinen jäykkyys on paljon suurempi kuin taivutusjäykkyys, muuttuvat poisjätetyt termit muita jäykkymatriisin termejä nopeammin. Laskentaa vaikeuttaa lisäksi se, että sauvan vapaa pää ei saa akselin suuntaista siirtymää ensimmäisellä ratkaisukerralla. Tästä aiheutuu suuri virhe aksiaalisen voiman arvoon (8), koska $\delta (=0)$ ei kompensoi kaareutumisesta aiheutuvaa aksiaalista muodonmuutosta. Käytettäessä modifioitua Newton-Raphson iterointia ratkaisu hajaantuu ennen kuorman arvoa $PL^2/EI = 2$. Kuvaan 5 on piirretty myös käyrä, jossa b_1 ja b_2 sisältävät termit on kokonaan poistettu myös sisäisiä voimia (8) laskettaessa. Ratkaisu ajautuu pois tarkalta kuorma-siirtymäkäyrältä. Suppenemistoleranssilla 0,05 oli iterointikierrosten lukumäärä kuorma-askelta kohti 2 - 5.

Williamsin harjakehä

Toisena esimerkkinä laskettiin Williamsin harjakehä (kuva 6) kahdella eri lakipisteen korkeudella. Ensimmäisessä tapauksessa tapahtuu ns. läpilyönti-ilmiö ($H = 0,386$ in). Ohjelmalla saatuja tuloksia lakipisteen pystysiirtymälle kuorman funktiona on verrattu Williamsin /16/ esittämään tarkkaan ratkaisuun (kuva 6).

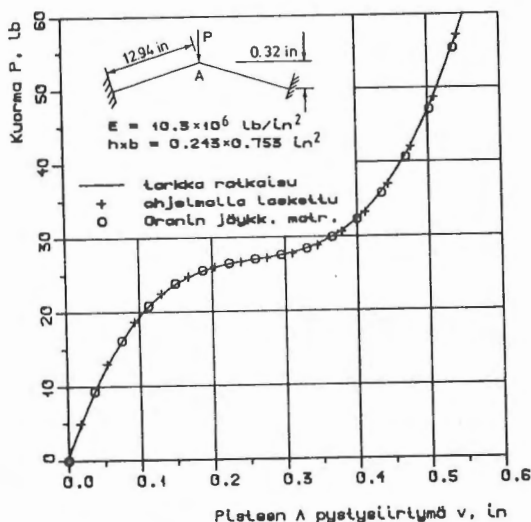


Kuva 6. Williamsin harjakehän lakipisteen pystysiirtymä.

Ohjelmalla laskettaessa käytettiin yhtä elementtiä sauvaa kohti ja vakiokaaren-pituusmenetelmää, jolla kuorma-siirtymäkäyrässä olevat käännepisteet voidaan ohittaa. Esimerkki laskettiin myös Oranin /3, 4/ esittämällä tarkalla tangentiaalisella jäykkyyismatriisilla ja jäykkyyismatriisilla, josta oli b_1 ja b_2 sisältävät tekijät poistettu. Ohjelmalla laskettujen tulosten ero tarkkaan ratkaisuun verrattaessa on koko kuormitusalueella alle 1 %. Oranin tangentiaalisella jäykkyyismatriisilla ero on pienin. Suppenevuuden kannalta Oranin ja kaavan (18) jäykkyyismatriisi on selvästi parempi kuin jäykkyyismatriisi ilman termejä b_1 ja b_2 eli $b_1 = b_2 = 0$. Suppenemistoleranssilla 0,001 ensin mainituilla jäykkyyismatriiseilla tarvittiin keskimäärin kaksi iterointikierrosta kuorma-askelta kohti, kun taas jälkimmäisessä tapauksessa iterointikierroksia tarvittiin keskimäärin 3,5. Toisaalta kuorma-askleeseen käytetty laskenta-aika oli jälkimmäisessä tapauksessa vain 43 % suurempi kuin ensin mainituissa.

Toisena Williamsin harjakehäesimerkkinä laskettiin tapaus, jossa läpilyöntiä ei tapahdu ($H = 0,32$ in). Kuvassa 7 on esitetty vastaavat tulokset kuin ensimmäisessä tapauksessa. Ohjelmalla saadut tulokset on laskettu yhdellä elementillä sauvaa koh-

ti ja vakiokaarenpituusmenetelmällä. Tulosten ero tarkkaan ratkaisuun /16/ verrattuna on pienempi kuin 1 %. Suppenemistoleranssilla 0,001 tarvittiin Oranin ja kaa-
van (18) tangentiaalista jäykkyysmatriisia käytettäessä keskimäärin kaksi iterointikierrosta kuorma-askelta kohti ja käytettäessä jäykkyysmatriisia ilman termejä b_1 ja b_2 eli $b_1 = b_2 = 0$ noin 3,2 iterointikierrosta. Jälkimmäistä jäykkyysmatriisia käytettäessä kuorma-askeleen laskenta-aika oli 15 % suurempi kuin ensin mainittuja jäykkyysmatriiseja käytettäessä.

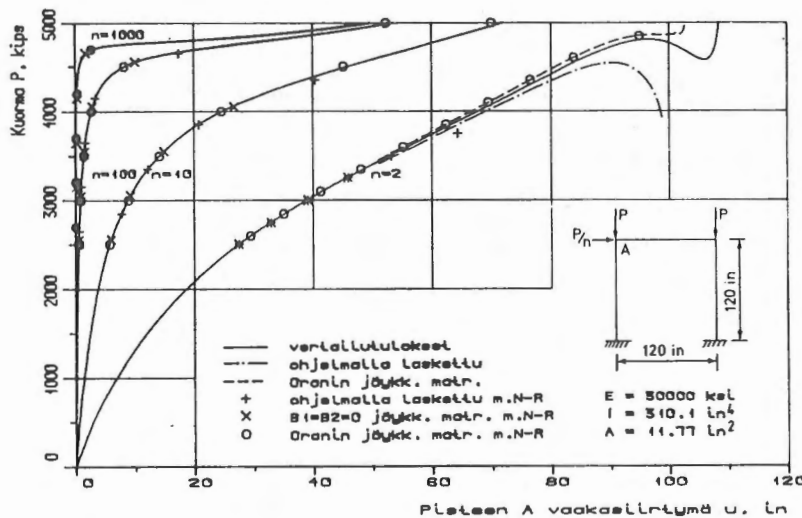


Kuva 7. Williamsin harjakehän lakipisteen pystysiirtymä.

Tasokehä

Viimeisenä esimerkkinä laskettiin yksiaukkoinen tasokehä (kuva 8). Kuvassa 8 on esitetty rakenteen pisteen A vaakasiirtymän kuorma-siirtymäkäyrät neljällä eri sivukuorman arvolla. Vertailutuloksina on käytetty kuudella elementillä sauvaa kohti, Oranin jäykkyysmatriisilla ja vakiokaarenpituusmenetelmällä laskettuja tuloksia. Esimerkki analysoitiin sekä vakiokaarenpituusmenetelmällä että modifioidulla Newton-Raphson iterointimenetelmällä kolmea erilaista jäykkyysmatriisia ja yhtä elementtiä sauvaa kohti käyttäen. Modifioitua Newton-Raphson iterointimenetelmää käytettäessä kuormitusalue jaettiin 100 kuorma-askeleeseen. Kolmella pienimmällä sivukuorman arvolla vakiokaarenpituusmenetelmällä lasketut tulokset yhtyivät vertailutuloksiin riippumatta käytetystä jäykkyysmatriisista. Sivukuorman $P/2$ tapauksessa

yhdellä elementillä saadut tulokset eroavat vertailutuloksista suurilla siirtymän arvoilla. Oranin esittämä jäykkyyismatriisi käyttäytyy parhaiten suurilla siirtymillä. Esimerkki analysoitiin sivukuorman P/2 tapauksessa myös kymmenen kertaa pienemmällä kuorma-askeleen alkuarvolla. Tällöin kaavan (18) jäykkyyismatriisi ja jäykkyyismatriisi termein $b_1 = b_2 = 0$ antoivat paremman tuloksen verrattuna vertailutuloksiin kuin Oranin jäykkyyismatriisi. Kuorma-siirtymäkäyrää pystyttiin seuraamaan yli vertailutuloksissa esiintyvän käännepisteen. Lisäksi voidaan mainita, että Oranin /4/ esittämissä tuloksissa ei esiinny sivukuorman P/2 arvolla lainkaan käännepistettä.



Kuva 8. Yksiaukkoisen tasokehän kuorma-siirtymäkäyrät.

Paras suppenevuus vakiokaarenpituusmenetelmällä laskettaessa saatiin kaavan (18) jäykkyyismatriisilla, jolla keskimääräiset iteroitinkierrosten lukumäärät kuorma-askealta kohti toleranssilla 0,001 olivat 3,08, 2,00, 1,75, 1,70 ($n = 2, 10, 100, 1000$). Oranin jäykkyyismatriisia käytettäessä vastaavat luvut olivat 2,92, 2,01, 1,99, 1,98 ja jäykkyyismatriisilla termein $b_1 = b_2 = 0$ 8,54, 3,58, 2,52 ja 2,45. Modifioidulla Newton-Raphson iteroitimenetelmällä laskettaessa ratkaisu hajaantuu kaavan (18) jäykkyyismatriisia ja jäykkyyismatriisia termein $b_1 = b_2 = 0$ käytettäessä aikaisemmin kuin Oranin jäykkyyismatriisia käytettäessä (merkit kuvassa 8). Iteroitinkierrosten keskimääräiset lukumäärät kuorma-askealta kohti toleranssilla 0,001 olivat kaavan (18) jäykkyyismatriisilla laskettaessa 2,26, 2,35, 2,44, 2,31 ($n = 2, 10, 100, 1000$), Oranin jäykkyyismatriisilla 2,25, 2,33, 2,42, 2,30 ja jäykkyyismatriisilla termein $b_1 = b_2 = 0$ 4,71, 3,91, 3,11 ja 2,20.

PÄÄTELMÄT

Esitetty tasokehien geometrisesti epälineaarinen analysointimenetelmä on laskettujen esimerkkien perusteella osoittautunut hyvin käyttäytyväksi ja tarkaksi suurillakin siirtymillä ja muodonmuutoksilla. Menetelmä on hyvin suppeneva ja taloudellinen tarvittavien elementtien määrän suhteen, useimmiten riittää yksi elementti sauvaa kohden. Kaavan (18) jäykkyysmatriisi on numeeristen laskelmien perusteella käyttäytymiseltään hyvin samankaltainen kuin Oranin /3, 4/ esittämä tarkka jäykkyysmatriisi, joissain tapauksissa jopa edullisempi. Hyvin suurilla siirtymillä (muodonmuutoksilla) ja suurta kuorma-askelta käytettäessä on Oranin jäykkyysmatriisi parempi. Jäykkyysmatriisi, jossa pätee $b_1 = b_2 = 0$ on edellisiin verrattuna selvästi hitaammin suppeneva. Sauvan päätepisteiden välisen pituuden muutos δ voidaan jättää pois kaavoista (14) ja (19). Laskentamenetelmistä selvästi suositettavin on vakiokaarenpituusmenetelmä. Menetelmän ylivoimaisuus ei perustu pelkästään siihen, että se mahdollistaa rajapisteiden ylityksen. Vakiokaarenpituusmenetelmä parantaa selvästi inkrementaalisen/iteratiivisen laskennan suppenemisominaisuuksia verrattuna menetelmiin, joissa käytetään vakiokuorma-askelta.

LIITE 1

STABILITEETTI- JA KAAREUTUMISFUNKTIOT

Normaalivoima puristusta ($N < 0$):

$$c_1 = kL (\sin kL - kL \cos kL) / (2 - 2 \cos kL - kL \sin kL)$$

$$c_2 = kL (kL - \sin kL) / (2 - 2 \cos kL - kL \sin kL)$$

$$b_1 = (c_1 + c_2)(c_2 - 2) / 8(kL)^2$$

$$b_2 = c_2 / 8(c_1 + c_2)$$

$$\text{missä } k^2 = -N/EI$$

Normaalivoima vetoa ($N > 0$):

$$c_1 = kL (kL \cosh kL - \sinh kL) / (2 - 2 \cosh kL + kL \sinh kL)$$

$$c_2 = kL (\sinh kL - kL) / (2 - 2 \cosh kL + kL \sinh kL)$$

$$b_1 = -(c_1 + c_2)(c_2 - 2) / 8(kL)^2$$

$$b_2 = c_2 / 8(c_1 + c_2)$$

$$\text{missä } k^2 = N/EI$$

Pieni normaalivoima ($|N| < vP_E$):

$$c_1 = 4 + 2\lambda^2/15$$

$$c_2 = 2 - \lambda^2/30$$

$$b_1 = 1/40 + \lambda^2/2400$$

$$b_2 = 1/24 - \lambda^2/720$$

$$\text{missä } \lambda^2 = NL^2/EI$$

$$P_E = \pi^2 EI/L^2$$

ohjelmassa on valittu $v = 1/10\pi^2$

LÄHDELUETTELO

- [1] Jennings, A., Frame analysis including change of geometry. Journal of the Structural Division, ASCE 94(1968)ST3, s. 627-644.
- [2] Connor, J. Jr., Logcher, R.D. & Chan, S.C., Nonlinear analysis of elastic framed structures. Journal of the Structural Division, ASCE 94(1968)ST6, s. 1525-1547.
- [3] Oran, C., Tangent stiffness in plane frames. Journal of the Structural Division, ASCE 99(1973)ST6, s. 987-1001.
- [4] Oran, C. & Kassimali, A., Large deformations of framed structures under static and dynamic loads. Computers & Structures 6(1976), s. 539-547.
- [5] Belytschko, T., Schwer, L. & Klein, M.J., Large displacement, transient analysis of space frames. International Journal for Numerical Methods in Engineering 11(1977), s. 65-84.
- [6] Belytschko, T. & Hsieh, B.J., Non-linear transient finite element analysis with convected co-ordinates. International Journal for Numerical Methods in Engineering 7(1973), s. 255-271.
- [7] Wood, R.D. & Zienkiewicz, O.C., Geometrically nonlinear finite element analysis of beams, frames, arches and axisymmetric shells. Computers & Structures 7(1977), s. 725-735.

- [8] Bathe, K.-J. & Bolourchi, S., Large displacement analysis of three-dimensional beam structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 14(1979), s. 961-986.
- [9] Remseth, S.N., Nonlinear static and dynamic analysis of space structures. Dr.ing. Thesis. The Norwegian Institute of Technology, Division of Structural Mechanics. Trondheim 1978. 178 s.
- [10] Mikkola, M.J., Modelling of geometrically nonlinear problems of framed structures. *Julkaisematon käsikirjoitus*. 1981. 41 s.
- [11] Virtanen, H., Taso- ja avaruuskehien geometrisesti epälineaarinen analysointi. Diplomityö. Teknillinen korkeakoulu, Rakenteiden mekaniikka. Helsinki 1983. 76 s.
- [12] Riks, E., An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems. *International Journal of Solids and Structures* 15(1979), s. 524-551.
- [13] Crisfield, M.A., A fast incremental/iterative solution procedure that handles "snap-through". *Computers & Structures* 13(1981), s. 55-62.
- [14] Ramn, E., Strategies for tracing the nonlinear response near limit points. *Proceedings of the Europe - U.S. Workshop Ruhr-Universität Bochum, Germany*. 1980, s. 63-89.
- [15] Frisch-Fay, R., *Flexible bars*. Butterworths, London 1962. 220 s.
- [16] Williams, F.W., An approach to the nonlinear behaviour of the members of a rigid jointed plane framework with finite deflection. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics* 17(1964)4, s. 451-469.

Martti Mikkola, professori, Helsingin teknillinen korkeakoulu, rakennusinsinööri-osasto
Hannu Virtanen, dipl.ins., Helsingin teknillinen korkeakoulu, rakennusinsinööri-osasto