

Mikko Kilpeläinen

Rakenteiden Mekaniikka, Vol. 18
No 1 1985, s. 26...52

TIIVISTELMÄ: Artikkelissa tarkastellaan kimmoisalla alustalla olevien pistekuorman kuormittamien laattojen analysointimenetelmiä. Tarkastelu perustuu yleiseen laattateoriaan ja lineaariseen alustamalliin. Aluksi laattaa tarkastellaan napa-koordinaatistossa, jossa laattayhtälön ratkaisu esitetään sekä suljetussa muodossa että elementtimenetelmällä rengaselementtejä käyttäen. Molemmat menetelmät soveltuvat laajojen ja/tai pyöreiden, kiertosymmetrisesti kuormitettujen laattojen laskentaan. Tämän jälkeen tarkastellaan laattaa suorakulmaisessa koordinaatistossa, jossa laattayhtälö voidaan ratkaista elementtimenetelmällä tai differenssimenetelmällä. Nämä menetelmät soveltuvat monenlaisille suorakulmaisille laatoille ja kuormitustapauksille. Artikkelin lopussa lasketaan esimerkkejä numeerisesti eri menetelmillä. Tulosten perusteella kaikki menetelmät todetaan käyttökelpoisiksi. Jokaisen esitetyn menetelmän käyttö laatan numeerisessa laskennassa edellyttää kuitenkin tietokoneen käyttöä.

JOHDANTO

Kimmoisalla alustalla olevia laattarakenteita esiintyy käytännössä varsin usein. Esimerkiksi neste muodostaa tyypillisen kimmoisan alustan sen varassa kelluville laattarakenteille. Vesistöjen jääkenttiä voidaan tarkastella tällaisina laattoina, joilla liikkuvat ajoneuvot ja ihmiset muodostavat laatan pistemäisen kuormituksen. Myös erilaisia maanvaraisia laattarakenteita kuten laattaperustuksia, anturoita ja päällysterakenteita voidaan tarkastella kimmoisalla alustalla olevina laattoina, vaikka useat maalajit omaavatkin plastisia muodonmuutosominaisuuksia. Talonrakennustekniikassa maanvaraislattioiden lämmöneristekerros yhdessä alapuolisen maan kanssa muodostaa kimmoisan alustan teräsbetoniselle lattialaatalle. Lattian kuormituksena voi olla ajoneuvojen pyöräkuormat, koneiden ja laitteiden paino tai varastohyllyjen ja -telineiden paino erilaisina pistekuormina. Laatan varassa olevien väliseiniä paino kuormittaa viivakuormina alla olevaa laattaa. Jos mainitut kuormat voidaan kannattaa lattialaatan varassa ilman haitallisia painumia ja murtumia, rakenteen taloudellisuus paranee samalla kun myös tilojen muuntojoustavuus lisääntyy.

Kimmoisalla alustalla olevaa laattaa tarkasteltaessa on tunnettava alustamate-

riaalin kuormituksen ja painuman välinen riippuvuus. Laskelmien yksinkertaistamiseksi yleensä käytetään alustapaineen p ja laatan taipuman w välillä lineaarista riippuvuutta eli Winklerin alustamallia yhtälön

$$p = k_s \cdot w \quad (1)$$

mukaisesti. Useissa tapauksissa kun laatta nousee ylöspäin riippuvuus ei kuitenkaan ole voimassa. Tällöin tavallisesti alustaluku $k_s = 0$, joten myös $p = 0$.

Laatan muodonmuutosten ja jännitysten tarkastelu voidaan suorittaa kimmooppiin perustuvan laattateorian perusteella. Tällöin kimmoisalla alustalla olevan tasapaksun laatan differentiaaliyhtälö voidaan kirjoittaa suorakulmaisessa koordinaatistossa muotoon

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{k_s}{D} \cdot w = \frac{q}{D} \quad (2)$$

Laatan jäykkyys $D = Eh^3/12(1-\mu^2)$ kun h on laatan paksuus, E kimmokerroin ja μ suppeumakerroin. q on laattaaan kohdistuva tasaisesti jakautunut pintakuorma.

Pyörähdyssymmetrisesti kuormitettujen pyöreiden laattojen tarkastelua varten voidaan laatan differentiaaliyhtälö napakoordinaatistossa kirjoittaa muotoon

$$\frac{d^4 w}{dr^4} + \frac{2}{r} \cdot \frac{d^3 w}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \cdot \frac{dw}{dr} + \frac{k_s}{D} \cdot w = \frac{q}{D} \quad (3)$$

Kun laattaa kuormittavat pistekuormat, asetetaan yhtälöissä (2) ja (3) $q = 0$. Jos pistekuormien jakaantumisalue otaksutaan nolllaksi, saavat laatan rasitukset näissä pisteissä äärettömän suuret arvot. Koska laatan maksimirasitukset syntyvät nimenomaan näissä pisteissä ja koska ne laatan mitoituksen takia ovat erityisen kiinnostavia, joudutaan rasituksia arvioimaan pistekuormien läheisyydessä laskettavilla likiarvoilla. Laatan taipumalle sen sijaan voidaan näissäkin tapauksissa yleensä saada äärellinen arvo. Esimerkiksi äärettömän laatan taipuma pistekuorman P vaikutuskohdassa saadaan lausekkeesta

$$w = \frac{P}{8 \cdot \sqrt{k_s \cdot D}} \quad (4)$$

Mitä suuremmaksi pistekuorman vaikutusalue kasvaa, sitä suurempi virhe laskentatuloksiin syntyy. Seuraavassa otaksutaan pistekuorman jakautuvan tasan suorakaiteen tai ympyrän muotoiselle äärelliselle alueelle.

Kirjoituksen tarkoituksena on esitellä eräitä menetelmiä pistekuorman kuormittaman laatan muodonmuutosten ja rasitusten laskemiseksi sekä vertailla niitä keskenään. Erityistä huomiota kiinnitetään pistekuorman jakautumisalueen suuruuden huomioimiseen. Päähuomio on pistekuorman jakautumisalueen keskipisteessä ja sen läheisyydessä syntyvien taipumien ja taivutusmomenttien tarkastelussa.

PYÖREÄN LAATAN ANALYYTTINEN RATKAISU

Otaksutaan pyöreän laatan keskipisteessä vaikuttavan pistekuorman P . Sen otaksutaan jakautuvan tasan ympyrän muotoiselle alueelle, jonka säde on a . Laattaa tarkastellaan kahdessa osassa: ympyrälaattana, jonka säde on a ja jota kuormittaa tasan jakautunut kuorma $q = P/\pi a^2$ ja alustapaine $k_s \cdot w$ sekä äärellisenä tai äärettömänä rengaslaattana, jota kuormittaa vain alustapaine ja jonka sisäsäde on a ja ulkosäde b tai ∞ . Liitoskohdassa molemmilla osilla täytyy olla yhtä suuri taipuma ja kaltevuuskulma. Samoin siinä vaikuttaa kumpaiseenkin osaan yhtä suuri taivutusmomentti ja leikkausvoima.

Yhtälö (3) voidaan ratkaista Besselin funktioiden avulla suljetussa muodossa /1/, jolloin laatan taipumalle saadaan lauseke

$$w = \frac{q}{k_s} + C_1 \cdot \text{ber}(x) + C_2 \cdot \text{bei}(x) + C_3 \cdot \text{kei}(x) + C_4 \cdot \text{ker}(x). \quad (5)$$

Ratkaisussa voidaan käyttää Thomson-funktioita (liite). Lauseke (5) on voimassa laatan molemmille osille, mutta rengaslaataalla $q = 0$.

Lausekkeessa (5) on käytetty apusuureita

$$l = \sqrt[4]{\frac{D}{k_s}} \quad \text{ja} \quad (6)$$

$$x = \frac{r}{l} .$$

Jäljempänä käytetään myös merkintöjä

$$\alpha = \frac{a}{l} , \quad (7)$$

$$\beta = \frac{b}{l} \quad \text{ja}$$

$$0 = \frac{dw}{dr} .$$

Laatan kaltevuuskulmalle ja voimasuureille saadaan yhtälöstä (5) seuraavat yleiset lausekkeet:

$$\theta = \frac{1}{1} [C_1 \cdot \text{ber}'(x) + C_2 \cdot \text{bei}'(x) + C_3 \cdot \text{kei}'(x) + C_4 \cdot \text{ker}'(x)],$$

$$M_r = -\frac{D}{1^2} \left\{ -C_1 \left[\text{bei}(x) + \frac{1-\mu}{x} \cdot \text{ber}'(x) \right] \right.$$

$$+ C_2 \left[\text{ber}(x) - \frac{1-\mu}{x} \cdot \text{bei}'(x) \right]$$

$$+ C_3 \cdot \left[\text{ker}(x) - \frac{1-\mu}{x} \cdot \text{kei}'(x) \right]$$

$$\left. - C_4 \cdot \left[\text{kei}(x) + \frac{1-\mu}{x} \cdot \text{ker}'(x) \right] \right\},$$

$$M_\phi = -\mu \cdot \frac{D}{1^2} \cdot \left\{ -C_1 \cdot \left[\text{bei}(x) - \frac{1-\mu}{\mu \cdot x} \cdot \text{ber}'(x) \right] \right. \quad (8)$$

$$+ C_2 \cdot \left[\text{ber}(x) + \frac{1-\mu}{\mu \cdot x} \cdot \text{bei}'(x) \right]$$

$$+ C_3 \cdot \left[\text{ker}(x) + \frac{1-\mu}{\mu \cdot x} \cdot \text{kei}'(x) \right]$$

$$\left. - C_4 \cdot \left[\text{kei}(x) - \frac{1-\mu}{\mu \cdot x} \cdot \text{ker}'(x) \right] \right\},$$

$$V_r = \frac{D}{1^3} [C_1 \cdot \text{bei}'(x) - C_2 \cdot \text{ber}'(x) - C_3 \cdot \text{ker}'(x) + C_4 \cdot \text{kei}'(x)].$$

Seuraavaksi määritetään ympyrälaatan ja rengaslaatan taipuma ja kaltevuuskulma niiden liitoskohdassa siinä vaikuttavan taivutusmomentin ja leikkausvoiman funktiona. Muodonmuutosten yhtäsuuruusehdosta liitoskohdassa ratkaistaan kyseiset taivutusmomentti ja leikkausvoima, jonka jälkeen muodonmuutokset ja voimasuureet voidaan laskea ympyrälaatan ja rengaslaatan jokaisessa pisteessä.

Ympyrälaatta

Koska ympyrälaatan keskipisteessä sekä kiertymä θ että leikkausvoima $V_r = 0$, ovat $C_3 = C_4 = 0$ /1/.

Jos laattaa kuormittaa vain tasan jakautunut kuorma q , painuu laatta tasaisesti. Tästä seuraa, että laatan jokaisessa pisteessä on voimassa

$$w = \frac{q}{k_s},$$

$$\theta = M_r = M_\phi = V_r = 0 \text{ ja} \quad (9)$$

$$C_1 = C_2 = 0.$$

Edellä on säteen suuntainen taivutusmomentti M_r ja tangentin suuntainen M_ϕ .

Jos laattaa kuormittaa vain reunalla tasan jakautunut taivutusmomentti M (kuva 1a), saadaan reunaehdoista yhtälöiden (8) avulla

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{M \cdot l^2}{D} \cdot \frac{\text{ber}'(\alpha)}{A_1} \text{ ja} \\ C_2 &= \frac{M \cdot l^2}{D} \cdot \frac{\text{bei}'(\alpha)}{A_1}, \end{aligned} \quad (10)$$

kun

$$\begin{aligned} A_1 &= \text{ber}'(\alpha) \cdot [\text{bei}(\alpha) + \frac{1-\mu}{\alpha} \cdot \text{ber}'(\alpha)] \\ &\quad - \text{bei}'(\alpha) \cdot [\text{ber}(\alpha) - \frac{1-\mu}{\alpha} \cdot \text{bei}'(\alpha)]. \end{aligned} \quad (11)$$

Jos laattaa kuormittaa vain reunoilla tasan jakautunut leikkausvoima V (kuva 1b), saadaan reunaehdoista yhtälöiden (8) avulla

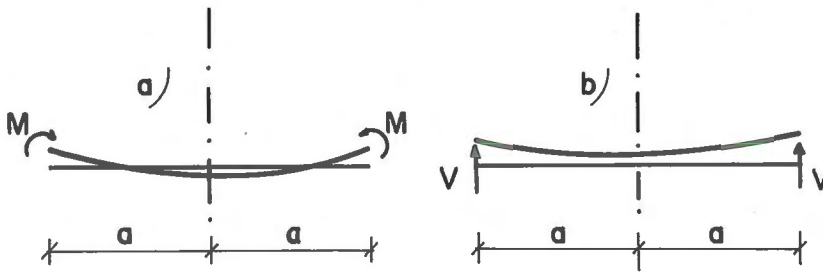
$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{V \cdot l^3}{D} \frac{\text{ber}(\alpha) - \frac{1-\mu}{\alpha} \cdot \text{bei}'(\alpha)}{A_1} \text{ ja} \\ C_2 &= \frac{V \cdot l^3}{D} \frac{\text{bei}(\alpha) + \frac{1-\mu}{\alpha} \cdot \text{ber}'(\alpha)}{A_1}. \end{aligned} \quad (12)$$

Molemmissa tapauksissa saadaan laatan reunan muodonmuutokset yhtälöitä (8) käyttäen lausekkeista

$$\begin{aligned} w_a &= C_1 \cdot \text{ber}(\alpha) + C_2 \cdot \text{bei}(\alpha) \text{ ja} \\ \theta_a &= \frac{1}{l} [C_1 \cdot \text{ber}'(\alpha) + C_2 \cdot \text{bei}'(\alpha)]. \end{aligned} \quad (13)$$

Laatan keskipisteessä 0 saadaan edelleen /1/

$$\begin{aligned} w_0 &= \frac{q}{k_s} + C_1, \\ M_{r0} = M_{\phi 0} &= -\frac{1+\mu}{2} \cdot \frac{D}{l^2} \cdot C_2 \text{ ja} \\ \theta_0 = V_{r0} &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$



Kuva 1. Ympyrälaatan tasan jakautunut reunakuorma.
 a) taivutusmomentti M
 b) leikkausvoima V

Ääretön rengaslaatta

Tarkastellaan pistekuorman vaikutusalueen ulkopuolista laatan osaa äärettömän laajana laattana, jossa on pyöreä reikä, jonka säde on a .

Kun $r = \infty$, on $w = \theta = 0$. Sen seurauksena myös $C_1 = C_2 = 0$.

Jos rengaslaattaa kuormittaa vain reunalla tasan jakautunut taivutusmomentti M (kuva 2a), saadaan integrointivakioille C_3 ja C_4 reunaehtojen avulla yhtälöitä (8) käyttäen lausekkeet

$$C_3 = \frac{M \cdot l^2}{D} \cdot \frac{\text{kei}'(\alpha)}{A_2} \quad \text{ja} \quad (15)$$

$$C_4 = \frac{M \cdot l^2}{D} \cdot \frac{\text{ker}'(\alpha)}{A_2} .$$

Edellä on

$$A_2 = -\text{kei}'(\alpha) \cdot \left[\text{ker}(\alpha) - \frac{1-\mu}{\alpha} \cdot \text{kei}'(\alpha) \right] \quad (16)$$

$$+\text{ker}'(\alpha) \cdot \left[\text{kei}(\alpha) + \frac{1-\mu}{\alpha} \cdot \text{ker}'(\alpha) \right].$$

Jos laattaa kuormittaa vain tasan jakautunut leikkausvoima V (kuva 2b), saadaan vastaavasti lausekkeet

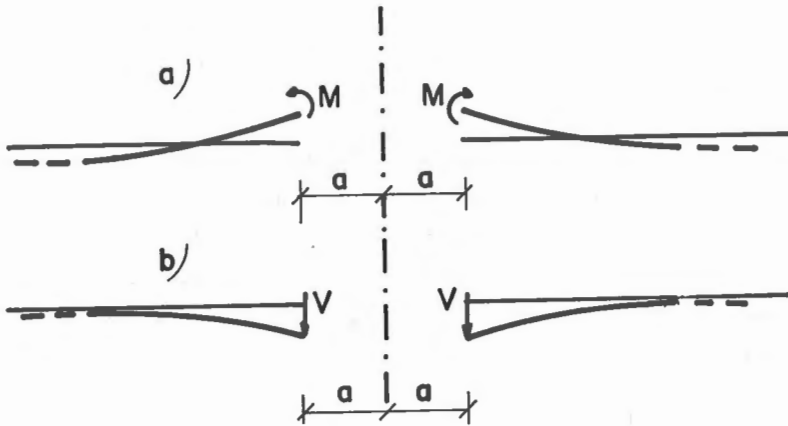
$$C_3 = \frac{V \cdot l^3}{D} \cdot \frac{\text{kei}(\alpha) + \frac{1-\mu}{\alpha} \cdot \text{ker}'(\alpha)}{A_2} \quad \text{ja}$$

$$C_4 = \frac{V \cdot l^3}{D} \cdot \frac{\ker(\alpha) - \frac{1-\mu}{\alpha} \cdot \ker'(\alpha)}{A_2} . \quad (17)$$

Molemmissa tapauksissa saadaan laatan sisäreunan muodonmuutokset yhtälöistä

$$w_a = C_3 \cdot \ker(\alpha) + C_4 \cdot \ker(\alpha) \quad \text{ja} \quad (18)$$

$$\theta_a = \frac{1}{l} \cdot [C_3 \cdot \ker'(\alpha) + C_4 \cdot \ker'(\alpha)] .$$



Kuva 2. Äärettömän rengaslaatan tasan jakautunut reunakuorma.
a) taivutusmomentti M
b) leikkausvoima V

Äärellinen rengaslaatta

Äärellisen rengaslaatan taipumapinnan yhtälössä ovat kaikki integroimisvakiot $C_1 \dots C_4$ nollassa poikkeavia. Ne voidaan määrittää reunaehtojen avulla yhtälöitä (8) käyttäen. Reunaehtoja on sekä sisäreunalla että ulkoreunalla kaksi.

Jos laattaa kuormittaa vain sisäreunalla ($r = a$) tasan jakautunut taivutusmomentti M kuvan 2a mukaisesti ja ulkoreuna ($r = b$) on kuormittamaton, ovat reunaehdot

$$\begin{aligned}
M_a &= M, \\
V_A &= 0, \\
M_b &= 0 \text{ ja} \\
V_b &= 0.
\end{aligned}
\tag{19}$$

Vastaavasti jos kuormana on vain sisäreunalla vaikuttava leikkausvoima V kuvan 2b mukaisesti, ovat reunaehdot

$$\begin{aligned}
M_a &= 0, \\
V_a &= V, \\
M_b &= 0 \text{ ja} \\
V_b &= 0.
\end{aligned}
\tag{20}$$

Ensimmäisen yhtälöryhmän ratkaisuna saadaan integroimisvakiot $C_1 \dots C_4$ taivutusmomentin M funktiona ja jälkimmäisen yhtälöryhmän ratkaisuna leikkausvoiman V funktiona.

Sijoittamalla vakiot yhtälöihin (8) saadaan sisäreunan muodonmuutokset w_a ja θ_a sekä M :n että V :n funktiona yhtälöistä

$$\begin{aligned}
w_a &= C_1 \cdot \text{ber}(\alpha) + C_2 \cdot \text{bei}(\alpha) + C_3 \cdot \text{kei}(\alpha) + C_4 \cdot \text{ker}(\alpha) \text{ ja} \\
\theta_a &= \frac{1}{l} \cdot [C_1 \cdot \text{ber}'(\alpha) + C_2 \cdot \text{bei}'(\alpha) + C_3 \cdot \text{kei}'(\alpha) + C_4 \cdot \text{ker}'(\alpha)].
\end{aligned}
\tag{21}$$

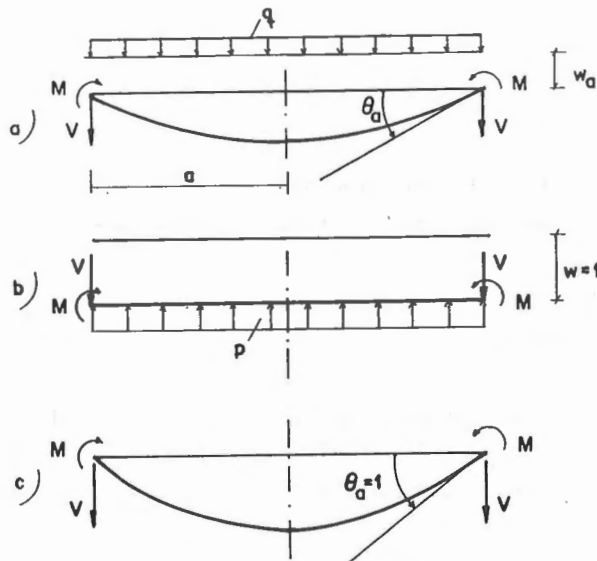
Ympyrälaatan ja rengaslaatan yhteistoiminta

Ympyrälaatan ja rengaslaatan liittymäkohdassa vaikuttavat taivutusmomentti ja leikkausvoima saadaan asettamalla ko. kohdassa kummankin laatan taipumat ja kaltevuuskulmat keskenään yhtä suuriksi. Tämän jälkeen saadaan ympyrälaatan integroimisvakiot C_1 ja C_2 yhtälöistä (10) ja (12) sekä rengaslaatan integroimisvakiot C_3 ja C_4 yhtälöistä (15) ja (17) tai integroimisvakiot $C_1 \dots C_4$ reunaehtoyhtälöiden ratkaisuna sijoittamalla saadut M :n ja V :n arvot kaikkiin näihin yhtälöihin. Lopuksi saadaan kummankin laatan muodonmuutokset ja voimasuureet mielivaltaisissa pisteissä yhtälöiden (8) avulla.

PYÖREÄN LAATAN RATKAISU ELEMENTTIMENETELMÄLLÄ

Yleistä

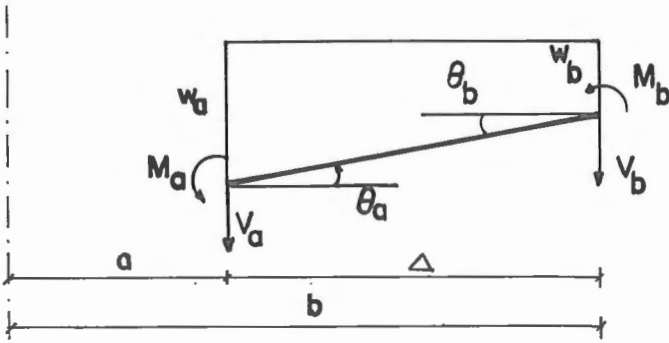
Otaksutaan pistekuorman P jakautuneen tasan ympyränmuotoiselle alueelle, jonka säde on a . Kuormitus on tällöin $q = P/\pi \cdot a^2$. Tarkastellaan tätä ympyrälaattaa yhtenä elementtinä, jonka reunalla on kaksi vapausastetta: pystysuora leikkausvoima V ja taivutusmomentti M (kuva 3). Tämän alueen ympärillä laatta jaetaan renkaan muotoisiin elementteihin, joiden leveys on Δ . Elementillä on kaksi vapausastetta kummallakin reunalla (kuva 4).



Kuva 3. Ympyrälaattaelementti ja sen vapausasteet.

Muodostetaan kullekin elementille jäykkyyso-matriisi, joista kootaan koko äärellisen laatan jäykkyyso-matriisi. Alustapaine vaikuttaa viivakuormana elementtien solmukohtissa.

Yhtälöryhmän ratkaisuna saadaan solmukohtien muodonmuutokset eli taipumat ja kiertymät, ja niiden avulla edelleen solmupisteissä vaikuttavat voimasuureet eli taivutusmomentit ja leikkausvoimat.



Kuva 4. Rengaslaattaelementti ja sen vapausasteet.

Ympyrälaatta

Tarkastellaan kuvan 3 mukaista ympyrälaattaelementtiä. Koska elementin käyritymän vaikutus elementin kokonaistaipumaan on pieni, otaksutaan pohjapaine vakioksi eli $p = k_s \cdot w_a$, kun w_a on taipuma elementin reunalla. Näin välttyään hankalien Thomson-funktioiden käytöltä.

Kun $w = 1$ kuvassa 3b, on $p = k_s$ ja

$$V = \frac{k_s \cdot a}{2} \quad \text{sekä} \tag{22}$$

$$M = 0.$$

Jos $\theta = 1$ kuvassa 3c, on $p = 0$ ja

$$V = 0 \quad \text{sekä} \tag{23}$$

$$M = \frac{D(1+\mu)}{a}.$$

Ympyrälaattaelementille on siten voimassa matriisiyhtälö

$$\begin{bmatrix} V \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{k_s \cdot a}{2} & 0 \\ 0 & \frac{D(1+\mu)}{a} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w \\ \theta \end{bmatrix} \tag{24}$$

josta ilmenee elementin jäykkymatriisi.

Tasaisesta kuormasta q saadaan kuormitustermeiksi ympyrälaatan ja ensimmäisen

rengaselementin liitoskohdassa termit

$$V = \frac{q \cdot a}{2} = \frac{P}{2\pi a} \quad \text{ja} \quad (25)$$

$$M = \frac{q \cdot a^2}{8} = \frac{P}{\pi 8} .$$

Rengaslaatta

Tarkastellaan kuvan 4 mukaista rengaslaattaelementtiä. Rengaslaatalle ovat yleisesti voimassa yhtälöt

$$w = C_1 + C_2 \cdot \rho^2 + C_3 \cdot \rho^2 \cdot \ln \rho + C_4 \cdot \ln \rho,$$

$$\theta = \frac{1}{b} (2 \cdot C_2 \cdot \rho + C_3 \cdot \rho \cdot (1 + 2 \cdot \ln \rho) + C_4 \cdot \frac{1}{\rho}),$$

$$M_r = - \frac{D \cdot (1+\mu)}{b^2} \cdot [2 \cdot C_2 + C_3 \cdot (\frac{3+\mu}{1+\mu} + 2 \cdot \ln \rho) - C_4 \cdot \frac{1-\mu}{1+\mu} \cdot \frac{1}{\rho^2}], \quad (26)$$

$$M_\phi = - \frac{D \cdot (1+\mu)}{b^2} \cdot [2 \cdot C_2 + C_3 \cdot (\frac{1+3\mu}{1+\mu} + 2 \cdot \ln \rho) + C_4 \cdot \frac{1-\mu}{1+\mu} \cdot \frac{1}{\rho^2}],$$

$$V_r = - \frac{4 \cdot D}{b^3 \cdot \rho} \cdot C_3 .$$

Tällöin b on ulkosäde ja $\rho = r/b$.

Elementin jäykkymatriisi saadaan asettamalla muodonmuutos vuorotellen kunkin vapausasteen suunnalla yhtä suureksi kuin yksi ja pitämällä samalla muodonmuutokset muiden vapausasteiden suunnalla nolliina kuvan 5 mukaisesti. Jäykkymatriisin alkiot ovat tällöin laatan ulko- ja sisäreunalla vaikuttavat leikkausvoimat ja taivutusmomentit.

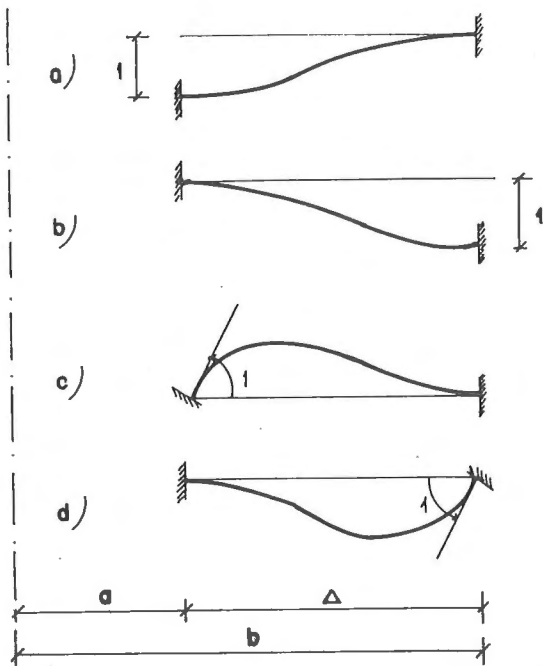
Kuvan 5a mukaisessa tapauksessa on $w_a = 1$ ja $w_b = \theta_a = \theta_b = 0$. Integroimisvakioille saadaan yhtälöstä (26) lausekkeet

$$C_2 = \frac{-\delta - 2 \cdot \gamma^2 \cdot \ln \gamma}{A_3},$$

$$C_3 = \frac{2 \cdot \delta}{A_3} \quad \text{ja} \quad (27)$$

$$C_4 = \frac{4 \cdot \gamma^2 \cdot \ln \gamma}{A_3} .$$

Edellä on käytetty merkintöjä $\gamma = \frac{a}{b}$, $\delta = \gamma^2 - 1$ ja $A_3 = 4 \cdot \gamma^2 \cdot \ln^2 \gamma - \delta^2$.



Kuva 5. Rengaslattaelementin muodonmuutokset jäykkymatriisiin muodostamista varten.

Kuvan 5b mukaisessa tapauksessa integroimisvakiot ovat yhtäsuuret kuin edellä, mutta vastakkaismerkkiset.

Kuvan 5c mukaisessa tapauksessa saadaan lausekkeet

$$\begin{aligned}
 c_2 &= \frac{b \cdot \gamma \cdot \delta \cdot \ln \gamma}{A_3}, \\
 c_3 &= \frac{b \cdot \gamma \cdot (2 \cdot \ln \gamma - \delta)}{A_3} \quad \text{ja} \\
 c_4 &= \frac{b \cdot \gamma \cdot (\delta - 2 \cdot \gamma^2 \cdot \ln \gamma)}{A_3}.
 \end{aligned} \tag{28}$$

Kuvan 5d mukaisessa tapauksessa saadaan vastaavasti

$$\begin{aligned}
 c_2 &= \frac{2 \cdot b \cdot \gamma^2 \cdot \ln^2 \gamma}{A_3}, \\
 c_3 &= \frac{b \cdot (\delta - 2 \cdot \gamma^2 \cdot \ln \gamma)}{A_3} \quad \text{ja}
 \end{aligned} \tag{29}$$

$$C_4 = \frac{b \cdot (2 \cdot \ln \gamma - \delta) \cdot \gamma^2}{A_3}.$$

Kussakin neljässä tapauksessa saadaan voimasuureiksi elementin kummallakin reunalla eli jäykkymatriisin alkioksi

$$\begin{aligned} V_a &= - \frac{4 \cdot D \cdot C_3}{a \cdot b^2}, \\ M_a &= - \frac{D \cdot (1+\mu)}{b^2} \left[2 \cdot C_2 + C_3 \cdot \left(\frac{3+\mu}{1+\mu} + 2 \cdot \ln \gamma \right) - C_4 \cdot \frac{1-\mu}{1+\mu} \cdot \frac{1}{\gamma^2} \right], \\ V_b &= \frac{4 \cdot D \cdot C_3}{b^3} \quad \text{ja} \\ M_b &= \frac{D \cdot (1+\mu)}{b^2} \cdot \left[2 \cdot C_2 + C_3 \cdot \frac{3+\mu}{1+\mu} - C_4 \cdot \frac{1-\mu}{1+\mu} \right]. \end{aligned} \quad (30)$$

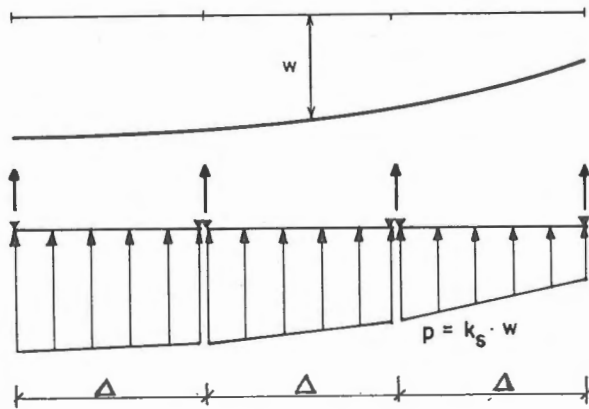
Koska elementin käyristymän vaikutus elementin kokonaistalpumaan on pieni (kuva 4), otaksutaan pohjapaine suoraviivaisesti jakautuneeksi kunkin elementin leveydellä. Tämän vuoksi alustapaineesta aiheutuu kuvien 5a ja 5b mukaisiin muodonmuostiloihin kolmion muotoinen kuormitus. Siitä aiheutuu yhtälöiden (30) leikkausvoimien lausekkeisiin lisätermi. Kuvan 5a tapauksessa leikkausvoimat elementin reunoilla saadaan yhtälöistä

$$\begin{aligned} V_a &= - \frac{4 \cdot D \cdot C_3}{a \cdot b^2} + k_s \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{\Delta}{12 \cdot a} \right) \cdot \Delta \quad \text{ja} \\ V_b &= \frac{4 \cdot D \cdot C_3}{b^3} + k_s \cdot \left(\frac{1}{6} + \frac{\Delta}{12 \cdot a} \right) \cdot \frac{a \cdot \Delta}{b}. \end{aligned} \quad (31)$$

Kuva 5b tapauksessa saadaan vastaavasti

$$\begin{aligned} V_a &= - \frac{4 \cdot D \cdot C_3}{a \cdot b^2} + k_s \cdot \left(\frac{1}{6} + \frac{\Delta}{12 \cdot a} \right) \cdot \Delta \quad \text{ja} \\ V_b &= \frac{4 \cdot D \cdot C_3}{b^3} + k_s \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{\Delta}{4 \cdot a} \right) \cdot \frac{a \cdot \Delta}{b}. \end{aligned} \quad (32)$$

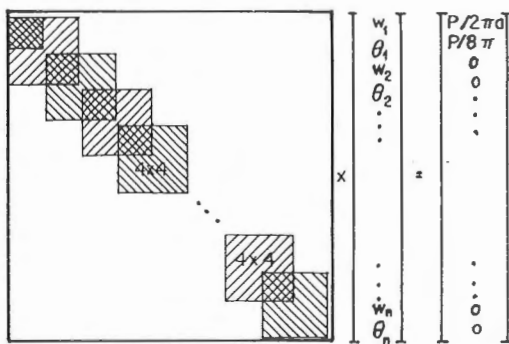
Sama tulos saataisiin tarkastelemalla elementtejä reunoiltaan vapaasti tuettuina rengaslaattoina, joita kuormittaa suoraviivaisesti jakautunut pohjapaine, ja asettamalla näiden rengaslaattojen tukireaktiot elementtien solmukohtiin ulkoiseksi kuormaksi kuvan 6 mukaisesti.



Kuva 6. Alustapaine laatan ulkoisina kuormina laattaelementtien solmukohtissa.

Laatan muodonmuutokset ja voimasuureet

Kun koko laatta on jaettu elementteihin ja kullekin elementille on muodostettu jäykkyysmatriisi, muodostetaan laatan jäykkyysmatriisi ja yhtälöryhmä taipumien ja kiertymien laskemiseksi kuvan 7 mukaisesti. Kun solmukohtien muodonmuutokset on saatu, lasketaan elementtien jäykkyysmatriiseja hyväksikäyttäen laatan voimasuureet.



Kuva 7. Laatan jäykkyysmatriisi koottuna elementtien jäykkyysmatriiseista sekä muodonmuutos- ja kuormitusvektorit.

Esimerkki

Lasketaan kuvan 8 mukaisen maa-varaislattian taipumat ja betonilaatan voimasuu-

reet äärettömänä laattana suljetun ratkaisun avulla ja sitten elementtimenetelmällä äärellisenä ympyrälaattana, jonka ulkoreunalla $M = V = 0$. Laskelmissa on käytetty seuraavia lähtöarvoja

$$P = 10 \text{ kN},$$

$$a = 100 \text{ mm},$$

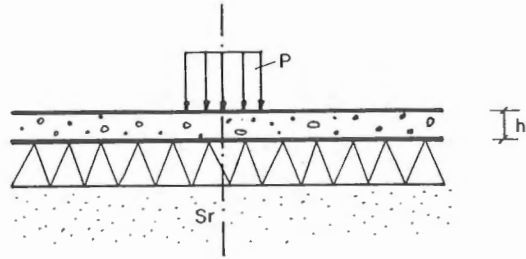
$$E_C = 30000 \text{ MPa},$$

$$\mu = 0,15,$$

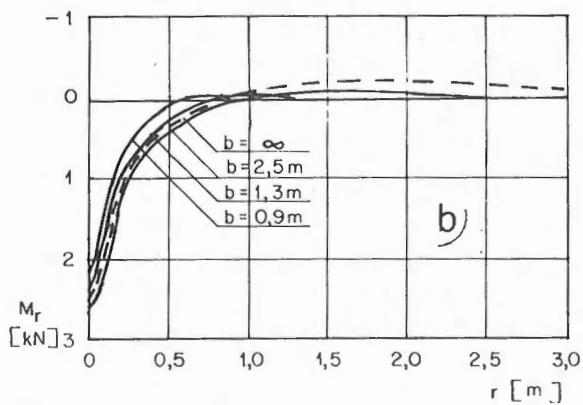
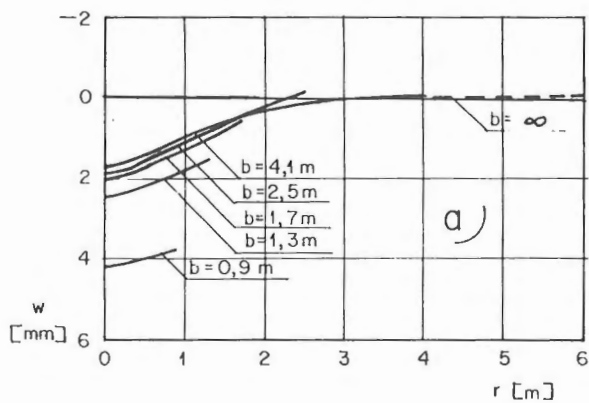
$$k_s = 0,001 \text{ N/mm}^3$$

(polystyreeni N15 100 mm) ja

$$h = 60 \text{ mm}.$$



Kuva 8. Esimerkkilaatan rakenne ja kuormitus.



Kuva 9. Esimerkkilaatan (ympyrä) taipuman w ja taivutusmomentin M_r kuvaajat, kun reunasäde b saa eräitä arvoja.

a) taipuman kuvaajat, b) taivutusmomentin kuvaajat

Kun rengaselementtien leveys $\Delta = 200$ mm, saadaan kuvan 9a mukaiset taipuman w kuvaajat ja kuvan 9b mukaiset taivutusmomentin M_r kuvaajat laatan reunasäteen b muutamilla arvoilla.

Voidaan todeta, että kun äärellisen laatan reunasäde on ~ 2500 mm, voidaan sitä vielä hyvin approksimoida äärettömänä laattana. Eräissä tapauksissa laatan reuna nousee irti alustasta. Nousu on kuitenkin huomattavasti pienempi kuin laatan oman painon aiheuttama alkupainuma 1,5 mm, joten sillä ei ole merkitystä tuloksiin.

Elementin leveyden Δ vaikutus eri kokoisten ympyrälaattojen maksimitaipumaan ja -taivutusmomenttiin käy ilmi taulukosta 1. Kun elementin leveys on 80...400 mm, sen vaikutus laskentatuloksiin on jokseenkin merkityksetön.

Taulukko 1. Esimerkkilaatan (ympyrä) maksimitaipumat ja -taivutusmomentit, kun laatan reunasäde b ja elementin leveys Δ vaihtelevat. [b] = [Δ] = [w] = mm, [M_r] = kN

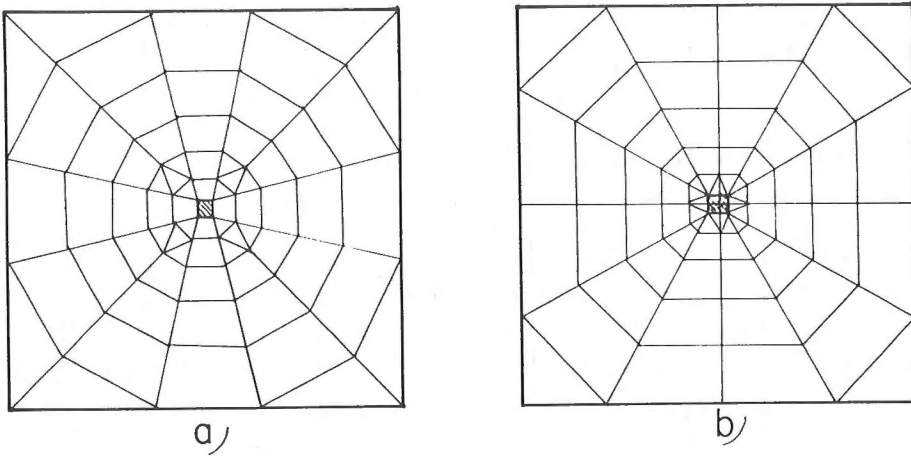
$\Delta \backslash b$	900		1300		1700		2500		4100		∞	
	w	M_r	w	M_r	w	M_r	w	M_r	w	M_r	w	M_r
40	4,41	2,16	2,57	2,45	2,07	2,59	1,91	2,61	1,74	2,54	1,67	2,54
80	4,22	2,16	2,46	2,45	2,00	2,59	1,85	2,60	1,69	2,53		
200	4,21	2,15	2,46	2,44	2,00	2,58	1,85	2,59	1,69	2,53		
400	4,22	2,10	2,46	2,41	2,00	2,56	1,85	2,57	1,69	2,50		
800									1,68	2,41		

SUORAKULMAINEN LAATTA

Elementtimenetelmä

Laatan jakaminen elementteihin voidaan tehdä monella tavalla. Suorakulmaisessa laattassa on luonnollista käyttää neliön tai suorakaiteen muotoisia elementtejä. Koska laatta saa pistekuorman vaikutusalueella ja sen läheisyydessä suurimmat rasitukset ja muodonmuutokset, pitää tällä osalla laattaa käyttää tiheämpää elementtijakoa kuin muualla. Tällöin ei yleensä ole mahdollista käyttää pelkästään suorakaiteen muotoisia elementtejä. Useimmat elementtimenetelmän sovellukset ja niihin perustuvat tietokoneohjelmat sallivat myös epäsäännöllisten ja erikokoisten neliokulmio- ja kolmioelementtien käytön samanaikaisesti. Tällöin on perusteltua käyttää hämähäkin verkkoa muistuttavaa elementtijakoa, jolloin verkon keskipiste on

pistekuorman vaikutuspisteessä ja pienimmät elementit lähinnä sitä (kuva 10).



Kuva 10. Esimerkkejä suorakulmaisen laatan jakamisesta elementteihin.

Pistekuorman vaikutusalueen keskipiste voidaan sijoittaa joko elementin keskipisteeseen (kuva 10a) tai elementtien solmupisteeseen (kuva 10b). Edellisessä tapauksessa laatan kuormitus annetaan kyseisen elementin tasanjakaantuneena pinta-kuormana, tai jaetaan sen nurkkapisteisiin pistekuormiksi. Jälkimmäisessä tapauksessa tulee kuorma jakaa myös keskipisteen viereisille solmupisteille pistekuormiksi sopivassa suhteessa. Valintaan vaikuttaa se, tulostetaanko laatan voimasuureet ja muodonmuutokset elementtien painopisteessä vai solmupisteissä.

Laatan alustapaine muunnetaan solmupisteissä ylöspäin vaikuttaviksi pistekuormiksi. Pinta-ala A_k , johon vaikuttavasta pohjapaineesta pistekuorma muodostuu voidaan määrittää monikulmiona, jonka nurkkapisteitä ovat tarkasteltavaan solmupisteeseen k liittyvien elementtien painopisteet. Tällöin solmupisteessä k vaikuttava

pohjapaine on $k_s \cdot w_k$ ja pistekuorma $k_s \cdot w_k \cdot A_k$. Solmupisteen k taipumaa vastavaan diagonaalitermiin laatan jäykkymatriisissa lisätään siten termi $k_s \cdot A_k$.

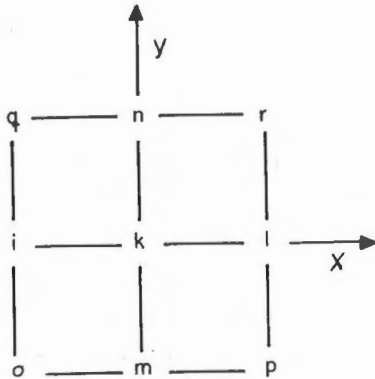
Useissa tietokoneohjelmissa kimmoisa alusta voidaan ottaa huomioon ns. jousielementtien avulla. Laatta ajatellaan tuetuksi solmupisteistään kimmoisien jousien varaan. Jousivakio $k_s \cdot A_k$ on yleensä laskettava etukäteen manuaalisesti. Tehtävän ratkaisemiseen tällä tavalla soveltuvat mm. tietokoneohjelmat SAP, STRUDL, NASTRAN.

Differenssimenetelmä

Differenssimenetelmää käytettäessä laatta jaetaan differenssiruudukkoon vakiovälein Δx ja Δy molemmissa suunnissa. Jokaisessa differenssipisteessä muodostetaan yhtälöstä (2) differenssiyhtälö, joka voidaan kirjoittaa muotoon

$$\frac{\Delta^4 w_k}{\Delta x^4} + 2 \cdot \frac{\Delta^4 w_k}{\Delta x^2 \cdot \Delta y^2} + \frac{\Delta^4 w_k}{\Delta y^4} + \frac{k_s}{D} \cdot w_k = \frac{q_k}{D}, \quad (33)$$

kun piste k on tarkasteltava differenssipiste (kuva 11).



Kuva 11. Pistekuorman vaikutusalueen läheisten differenssipisteiden merkintä, kun kuorman vaikutusalueen keskipiste on pisteessä k .

Koska laatan taipumat ja rasitukset lasketaan differenssipisteissä, pitää pistekuorman vaikutusalueen keskipiste sijoittaa johonkin differenssipisteeseen, jotta siinä syntyvä laatan maksimitaipuma ja maksimitaivutusmomentti saadaan esille. Tuloksen saamiseksi riittävän tarkaksi pistekuorman vaikutusalueella pitää differenssiruuutujen olla verraten pieniä suhteessa rakenteen mittoihin.

Tulosten tarkkuutta voidaan parantaa jakamalla pistekuorma myös sen keskipisteen viereisille differenssipisteille. Tämä tapahtuu siten, että tarkastellaan laattaa kummassakin suunnassa yksiaukkoisina, kaksiaukkoisina tai jatkuvina "palkkeina", joiden jännevälit ovat Δx tai Δy (kuva 12). Näiden "palkkien" tukireaktiot, jotka vaikuttavat differenssipisteissä, muunnetaan niissä vaikuttaviksi tasaisiksi kuormiksi jakamalla ne pinta-alalla $\Delta x \cdot \Delta y$. Jos pistekuorman vaikutusalue on suorakaide, jonka sivumitat ovat b_x ja b_y ($b_x < 2 \cdot \Delta x$ ja $b_y < 2 \cdot \Delta y$) ja jos kuorma vaikuttaa differenssipis-

teessä k, saadaan siinä ja sen lähipisteissä (kuva 11) vaikuttavat tasaiset kuormat seuraavista lausekkeista:

$$\begin{aligned}
 q_k &= u(\Delta x, b_x) \cdot u(\Delta y, b_y) \cdot P, \\
 q_{n,m} &= u(\Delta x, b_x) \cdot v(\Delta y, b_y) \cdot P, \\
 q_{i,l} &= u(\Delta y, b_y) \cdot v(\Delta x, b_x) \cdot P \text{ ja} \\
 q_{o,p,q,r} &= v(\Delta x, b_x) \cdot v(\Delta y, b_y) \cdot P.
 \end{aligned}
 \tag{34}$$

Funktiot $u(\Delta x, b_x)$ ja $v(\Delta x, b_x)$ ovat kuvan 12 mukaisissa tapauksissa muotoa:

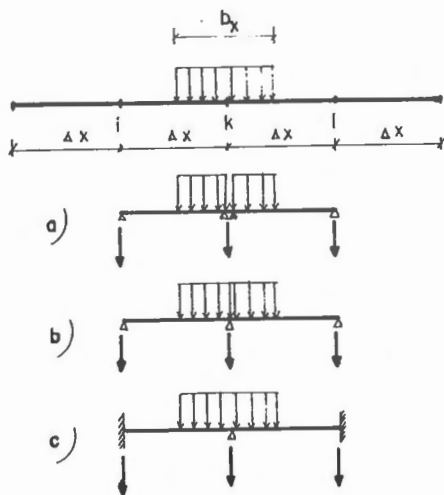
$$\begin{aligned}
 u(\Delta x, b_x) &= \frac{1}{\Delta x} \cdot \left(1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{b_x}{\Delta x}\right) && \text{kuva 12a} \\
 v(\Delta x, b_x) &= \frac{1}{8\Delta x} \cdot \frac{b_x}{\Delta x} && \text{" " } \\
 u(\Delta x, b_x) &= \frac{1}{\Delta x} \cdot \left[1 - \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{b_x}{\Delta x}\right)^2 + \frac{1}{64} \cdot \left(\frac{b_x}{\Delta x}\right)^3\right] && \text{kuva 12b} \\
 v(\Delta x, b_x) &= \frac{1}{16\Delta x} \cdot \left(\frac{b_x}{\Delta x}\right)^2 \cdot \left[1 - \frac{1}{8} \cdot \frac{b_x}{\Delta x}\right] && \text{" " } \\
 u(\Delta x, b_x) &= \frac{1}{\Delta x} \cdot \left[1 - \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{b_x}{\Delta x}\right)^2 + \frac{1}{16} \cdot \left(\frac{b_x}{\Delta x}\right)^3\right] && \text{kuva 12c} \\
 v(\Delta x, b_x) &= \frac{1}{8\Delta x} \cdot \left(\frac{b_x}{\Delta x}\right)^2 \cdot \left[1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{b_x}{\Delta x}\right]. && \text{" " }
 \end{aligned}
 \tag{35}$$

Funktiot $u(\Delta y, b_y)$ ja $v(\Delta y, b_y)$ saadaan lausekkeista (35) vaihtamalla Δx :n tilalle Δy ja b_x :n tilalle b_y .

Jos pistekuorma P merkitään vain keskipisteessään olevassa differenssipisteessä vaikuttavaksi tasaiseksi kuormaksi

$$q = \frac{P}{\Delta x \cdot \Delta y}, \tag{36}$$

saadaan maksimitaivutusmomentti tässä pisteessä liian suureksi ja riippumattomaksi vaikutusalueen mitoista b_x ja b_y . Maksimitaivutusmomentti osoittautuu liian suureksi, vaikka olisi voimassa täsmälleen $b_x = \Delta x$ ja $b_y = \Delta y$.



Kuva 12. Esimerkkejä pistekuorman P jakamisesta vaikutuspisteensä viereisille differenssipisteille. Tarkastelu x-akselin suunnassa.

Tämä tapahtuu tarkastelemalla laattaa jälleen esimerkiksi yksinkertaisina "palkkeina", joiden jännevälit ovat Δx tai Δy (kuva 13). Differenssipisteeseen k liittyvien "palkkien" tukireaktio pisteessä k on P_k ja siinä vaikuttava tasainen kuorma on siten $P_k/(\Delta x \cdot \Delta y)$.

Käyttämällä kuvan 13 mukaisia alustapaineen approksimaatioita saadaan pisteessä k vaikuttavat laskennalliset, tasan jakautuneet alustapaineet seuraavista kaavioista:

$$P_k = \frac{k_s}{36} \cdot \begin{vmatrix} w_q & 4 \cdot w_n & w_r \\ 4 \cdot w_i & 16 \cdot w_k & 4 \cdot w_l \\ w_o & 4 \cdot w_m & w_p \end{vmatrix} \quad (\text{kuva 13a})$$

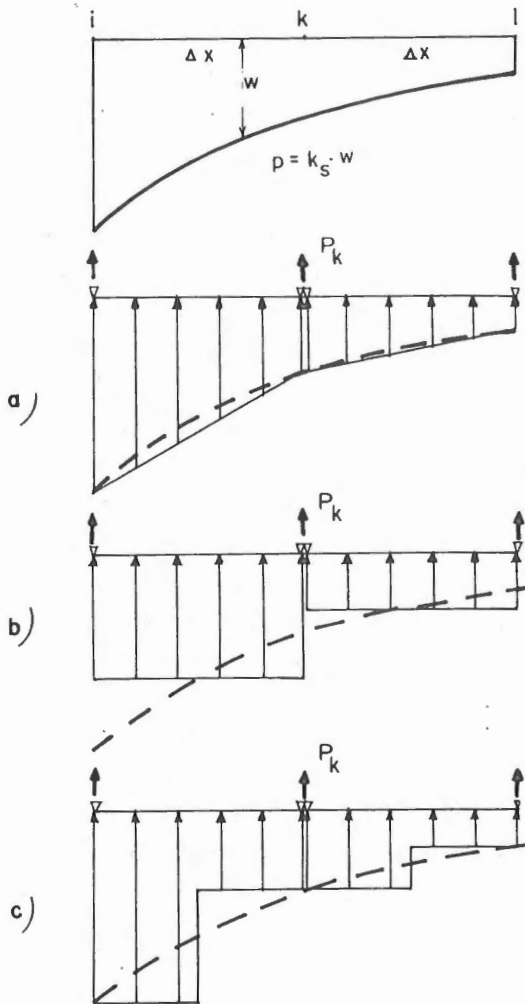
$$P_k = \frac{k_s}{16} \cdot \begin{vmatrix} w_q & 2 \cdot w_n & w_r \\ 2 \cdot w_i & 4 \cdot w_k & 2 \cdot w_l \\ w_o & 2 \cdot w_m & w_p \end{vmatrix} \quad (\text{kuva 13b}) \quad (37)$$

$$P_k = \frac{k_s}{64} \cdot \begin{vmatrix} w_q & 6 \cdot w_n & w_r \\ 6 \cdot w_i & 36 \cdot w_k & 6 \cdot w_l \\ w_o & 6 \cdot w_m & w_p \end{vmatrix} \quad (\text{kuva 13c})$$

Parhaan tuloksen näyttävät antavan kuvien 12b ja 12c mukaiset "palkki"-approksimaatiot. Edellinen antaa liian suuren ja jälkimmäinen liian pienen maksimitaivutusmomentin. Maksimitaipumaan asialla ei näytä olevan kovin suurta merkitystä.

Laatan alustapaine vaikuttaa pinta-alkuormana ylöspäin. Sen suuruus kussakin differenssipisteessä k on $P_k = k_s \cdot w_k$. Näin ollen taipumien kerroinmatriisin diagonaalitermeihin tulee lisätä termi k_s/D yhtälön (33) mukaisesti. Alustapaineen kuvaaja on tällöin porrasmainen (kuva 13c).

Hieman parempaan tulokseen päästään, jos differenssipisteen k alustapaineessa otetaan huomioon myös viereisissä pisteissä vaikuttavat alustapaineet.



Kuva 13. Esimerkkejä alustapaineen jakautuma-approksimaatioista differenssipisteen k molemmilla puolilla. Tarkastelu x -akselin suunnassa.

Jos halutaan käyttää 2. asteen paraabelia alustapaineen jakautuman kuvaajana, saadaan p_k kaaviosta

$$p_k = \frac{k_s}{576} \cdot \begin{vmatrix} w_q & 22 \cdot w_n & w_r \\ 22 \cdot w_i & 484 \cdot w_k & 22 \cdot w_l \\ w_o & 22 \cdot w_m & w_p \end{vmatrix} \quad (38)$$

tai kaaviosta /2/

$$P_k = \frac{k_s}{144} \cdot \begin{vmatrix} w_q & 10 \cdot w_n & w_r \\ 10 \cdot w_i & 100 \cdot w_k & 10 \cdot w_l \\ w_o & 10 \cdot w_m & w_p \end{vmatrix} . \quad (39)$$

Jos piste k sijaitsee vapaalla reunalla, saadaan reunalla olevilta pisteiltä tuleva pohjapaine kaavioiden (38) tai (39) mukaisesti sellaisenaan, mutta reunan vierisiltä pisteiltä tuleva paine kaavioiden mukaisesti kaksinkertaisena.

Kussakin differenssipisteessä vaikuttava laskennallinen pohjapaine koostuu siis useista termeistä. Koska ne ovat taipumien funktioita, lisätään taipumien kerroinmatriisiin kulloinkin kyseessä olevan taipuman kertoimeen termi k_q/D yhtälöä (33) muodostettaessa, kun k_q on kyseisen taipuman kerroin em. kaavioista.

Laskentatuloksiin ei näytä olevan kovinkaan suurta vaikutusta sillä, millaista pohjapaineen jakautuma-aproksimaatiota käytetään. Näin siksi, että laatan taipumaviivan loivuudesta johtuen myös pohjapaine muuttuu vain vähän differenssipisteestä toiseen siirryttäessä. Asialla lienee suurempi merkitys vain, jos laatan jäykkyys D on kovin pieni alustalukuun k_s verrattuna.

Esimerkki

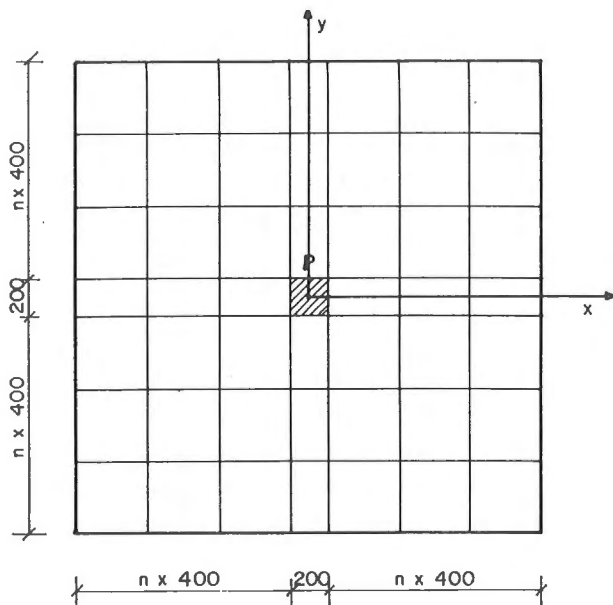
Lasketaan kuvan 8 mukaisen maanvaraislattian taipuma ja taivutusmomentit elementtimenetelmällä ja differenssimentetelmällä. Lähtöarvot ovat seuraavat:

$$\begin{aligned} P &= 10 \text{ kN}, \\ b_x &= b_y = 200 \text{ mm}, \\ E_c &= 30000 \text{ N/mm}^2, \\ \mu &= 0,15, \\ k_s &= 0,001 \text{ N/mm}^3 \text{ ja} \\ h &= 60 \text{ mm}. \end{aligned}$$

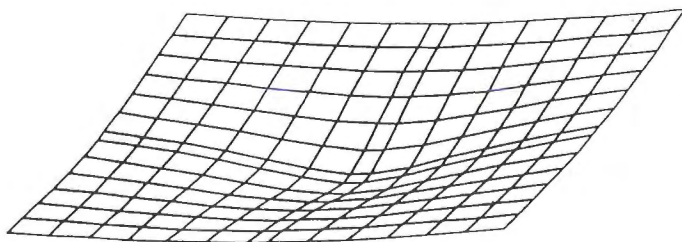
Laatta on neliön muotoinen, ja sillä on vapaat reunat. Kuorma P vaikuttaa sen keskipisteessä.

Laskentaan elementtimenetelmällä on käytetty SAP-tietokoneohjelmaa ja kuvan 14 mukaista elementtijakoa. Kuorma P vaikuttaa keskielementillä pintakuormana. Ohjelma käyttää kimmoisana alustana ns. boundary-elementtejä elementtien solmupisteissä. Laskennan tuloksena saadaan taivutus- ja vääntömomentit elementtien keskipisteissä sekä laatan taipumat ja kiertymät elementtien solmupisteissä. Kun laatan koko vaih-

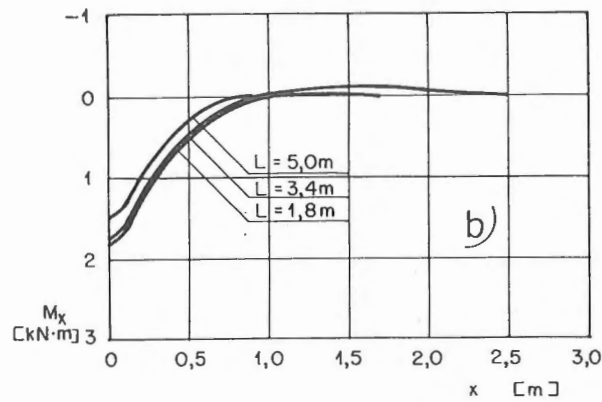
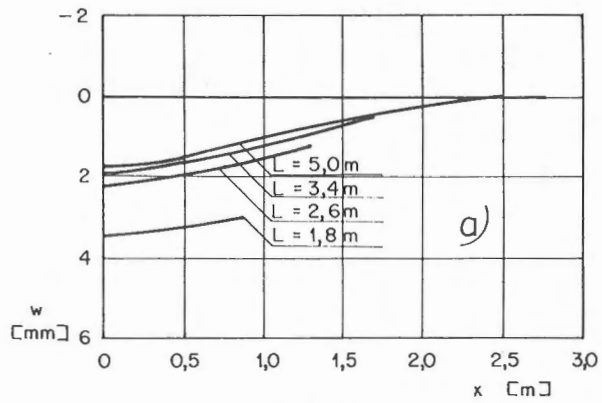
telee ($L = 1800, 2600, 3400$ ja 5000 mm, kuva 14), saadaan kuvan 15 mukaiset taipuman ja taivutusmomentin M_x kuvaajat. Kuvassa 16 on esitetty erään laatan taipumapinta taipumaa liioitellen perspektiivikuvana.



Kuva 14. Esimerkkilaatan (neliö) jako elementteihin. Sivumitta $L = 2 \cdot n \cdot 400 + 200$ mm.



Kuva 16. Erään esimerkkilaatan (neliö) taipumapinta perspektiivikuvana.



Kuva 15. Esimerkkilaatan (neliö) taipuman w ja taivutusmomentin M_x kuvaajat x :n funktiona, kun laatan koko vaihtelee.
 a) taipuman kuvaajat ($y = 100$ mm), b) taivutusmomentin kuvaajat ($y = 0$)

Differenssimenetelmällä lasketaan neliön muotoisen laatan taipumat ja taivutusmomentit. Laatan sivumitta L saa arvot 1600, 2400, 3200 ja 4800 mm. Differenssi-ruutujen sivumitat Δx ja Δy ($\Delta x = \Delta y$) saavat arvot 100, 200 ja 400 mm. Muuten ovat lähtötiedot samat kuin edellä. Kuorma P vaikuttaa edelleen laatan keskipisteessä. Laskemalla saadut laatan maksimitaipumat ja maksimitaivutusmomentit on kerätty taulukkoon 2.

Taulukko 2. Esimerkkilaatan (neliö) maksimitaipumat ja taivutusmomentit differenssimenetelmällä laatan sivumitan L ja differenssiruudun sivumitan $\Delta x = \Delta y$ funktiona. $[\Delta x] = [\Delta y] = \text{mm}$. $[M] = \text{kN}$.

L $\Delta x = \Delta y$	1600		2400		3200		4800	
	w	M	w	M	w	M	w	M
100	4,13	2,04						
200	4,23	2,09	2,41	2,38	2,00	2,49		
400	4,32	1,84	2,51	2,10	2,10	2,20	1,93	2,16
800					2,37	1,67	2,15	1,61

Yhteenveto

Kimmoisalla alustalla olevan laatan laskennalliseen analyysiin soveltuu useita menetelmiä. Äärettömän laatan taipumapinnan differentiaaliyhtälön suljettu ratkaisu napakoordinaatistossa soveltuu myös äärellisten laattojen analysointiin, jos

- laattaa kuormittaa vain yksi pistekuorma,

- laatta on riittävän laaja joka suuntaan kuorman vaikutuspisteessä olevasta origosta (ts. kuorma ei vaikuta lähellä laatan reunaa),
- alusta noudattaa Winklerin alustamallia ja
- laatta noudattaa lineaarista kimmoteoriaa.

Sovelluskohteeksi voi mainita vesistöjen jääkentän analysoinnin lyhytaikaiskuormituksessa. Menetelmää voidaan soveltaa myös rengasmaisen viivakuorman tapaukseen.

Elementtimenetelmä napakoordinaatistossa soveltuu kaikenkokoisten pyöreiden laattojen laskentaan, jos laattaa kuormittaa sen keskipisteessä yksi pistekuorma tai pyöriähdyssymmetriset rengasmaiset viivakuormat laatan keskipiste keskipisteensä. Myös muun muotoisia, riittävän laajoja laattoja, joita tällaiset kuormat kuormittavat, voidaan approksimoida ympyrälaatoilla. Menetelmän etu on, että sen avulla voidaan laatan ja alustan epälineaarinen käyttäytyminen kuormituksen alaisena sekä ajan vaikutus taipumiin ottaa huomioon. Tällöin joudutaan iterointimenettelyyn, mutta kullakin iteraatiokierroksella ratkaistava yhtälöryhmä on suhteellisen pieni verrattuna elementtimenetelmään ja differenssimenetelmään suorakulmaisilla laatoilla. Sovelluskohteita voivat olla vesistöjen jääkentät sekä ympyränmuotoiset, keskeisesti kuormitetut tai pyöriähdyssymmetrisesti kuormitetut anturaperustukset.

Elementtimenetelmä suorakulmaisessa koordinaatistossa soveltuu erikokoisten ja -muotoisten laattojen laskentaan. Muodon lisäksi myös kuormitus voi olla lähes mielivaltainen. Kimmoisan alustan muuttaminen jousielementeiksi on tehtävä manuaalisesti nykyisiä tietokoneohjelmia käytettäessä. Tämä vaikeuttaa valmisohjelmien käyttöä. Muutoin lähtötietojen valmisteluun on käytettävissä esikäsittelyohjelmia. Elementtimenetelmään perustuvat tietokoneohjelmat pohjautuvat lineaariseen kimmo-teoriaan. Laatan ja alustan epälineaarisen käyttäytymisen sekä ajan vaikutuksen huomioonottaminen edellyttävät yleensä huomattavia muutoksia ohjelmaan.

Differenssimenetelmää voidaan käyttää vain suorakulmaisten tai vinojen tai sellaisista osista koottujen laattojen laskentaan. Kuormitus voi koostua useista pistekuormista, kun ne vain sijaitsevat differenssipisteissä. Tulosten tarkkuus edellyttää tiheää differenssiruudukkoa. Tämän vuoksi yhtälöryhmän ratkaisussa on muistitilan ja laskenta-ajan säästämiseksi pyrittävä käyttämään menetelmiä, jotka operoivat vain nollasta poikkeavilla kerroinmatriisin alkioilla.

Rakenteen epälineaarisen käyttäytymisen huomioonottaminen on mahdollista, mutta johtaa iterointiin. Valmiita differenssimenetelmään pohjautuvia tietokoneohjelmia ei liene yleisesti saatavilla. Suorakulmion muotoisen laatan laskentaan tarvittava ohjelma on kuitenkin verraten helposti tehtävissä.

Kaikki menetelmät edellyttävät tietokoneen käyttöä. Useimmat ovat likimääräis-menetelmiä, mutta tulosten tarkkuus on kaikilla riittävä ja samaa suuruusluokkaa, kuten lasketut esimerkit osoittavat. Elementtijakoon, differenssiruudun kokoon sekä pistekuorman jakamiseen eri differenssipisteille tulee kuitenkin kiinnittää riittävästi huomiota.

Kaikkia mainittuja menetelmiä käytettäessä voidaan myös jakautuneet kuormat ottaa huomioon. Napakoordinaatistossa niiden kuitenkin tulee olla kiertosymmetrisiä origon suhteen.

LIITE

$$\text{ber } x = 1 - \frac{x^4}{2^4 \cdot 2!^2} + \frac{x^8}{2^8 \cdot 4!^2} - \frac{x^{12}}{2^{12} \cdot 6!^2} + \dots$$

$$\text{bei } x = \frac{x^2}{2^2 \cdot 1!^2} - \frac{x^6}{2^6 \cdot 3!^2} + \frac{x^{10}}{2^{10} \cdot 5!^2} - + \dots$$

$$\text{ber}' x = -\frac{x^3}{2^3 \cdot 1! \cdot 2!} + \frac{x^7}{2^7 \cdot 3! \cdot 4!} - \frac{x^{11}}{2^{11} \cdot 5! \cdot 6!} + \dots$$

$$\text{bei}' x = \frac{x}{2 \cdot 0! \cdot 1!} - \frac{x^5}{2^5 \cdot 2! \cdot 3!} + \frac{x^9}{2^9 \cdot 4! \cdot 5!} - + \dots$$

$$\begin{aligned} \text{ker } x &= \frac{\pi}{4} \text{bei } x - \ln \frac{\gamma x}{2} \cdot \text{ber } x - \\ &- \frac{x^4}{2^4 \cdot 2!^2} \sum_1^2 \frac{1}{n} + \frac{x^8}{2^8 \cdot 4!^2} \sum_1^4 \frac{1}{n} - \frac{x^{12}}{2^{12} \cdot 6!^2} \sum_1^6 \frac{1}{n} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{kei } x &= -\frac{\pi}{4} \text{ber } x - \ln \frac{\gamma x}{2} \cdot \text{bei } x + \\ &+ \frac{x^2}{2^2 \cdot 1!^2} \sum_1^1 \frac{1}{n} - \frac{x^6}{2^6 \cdot 3!^2} \sum_1^3 \frac{1}{n} + \frac{x^{10}}{2^{10} \cdot 5!^2} \sum_1^5 \frac{1}{n} - + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ker}' x &= \frac{\pi}{4} \text{bei}' x - \ln \frac{\gamma x}{2} \cdot \text{ber}' x - \frac{1}{x} \text{ber } x - \\ &- \frac{x^3}{2^3 \cdot 1! \cdot 2!} \sum_1^2 \frac{1}{n} + \frac{x^7}{2^7 \cdot 3! \cdot 4!} \sum_1^4 \frac{1}{n} - \frac{x^{11}}{2^{11} \cdot 5! \cdot 6!} \sum_1^6 \frac{1}{n} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{kei}' x &= -\frac{\pi}{4} \text{ber}' x - \ln \frac{\gamma x}{2} \cdot \text{bei}' x - \frac{1}{x} \text{bei } x + \\ &+ \frac{x}{2 \cdot 0! \cdot 1!} \sum_1^1 \frac{1}{n} - \frac{x^5}{2^5 \cdot 2! \cdot 3!} \sum_1^3 \frac{1}{n} + \frac{x^9}{2^9 \cdot 4! \cdot 5!} \sum_1^5 \frac{1}{n} - + \dots \end{aligned}$$

$$\ln \gamma = 0,577\ 215\ 665$$

LÄHDELUETTELO

- [1] Märkus, G., Theorie und Berechnung rotationsymmetrischer Bauwerke. Düsseldorf, 1967. 600 s.
- [2] Szilard, R., Theory and analysis of plates. Classical and numerical methods. Englewood Cliffs, N.J., 1974. 612 s.

Mikko Kilpeläinen, professori, Oulun yliopisto, Rakennetekniikan laitos