

IVOPLAST-PALSTISUUSTEORIAN MUKAINEN 2D-ELEMENTTIOHJELMA

Rune Lundgrén

Rakenteiden Mekaniikka, Vol. 17
No 2 1984, s. 20...36

YHTEENVETO: IVOPLAST on laajennus lineaarisesta kimmoteorian mukaisesta IVOFEM ohjelmasta. Molemmat ohjelmat perustuvat elementtimenetelmään. Ohjelmalla voidaan käsitellä rakenteita, jotka voidaan kuvata tasojännitys-, tasomuodonmuutos- tai pyörrähdyssymmetrisellä tilalla. Materiaali voi olla myötölujenevaa kimmoplastista ja ohjelmassa voidaan valita von Misesin tai Trescan myötöehto. Plastisessa analyysissä joudutaan hakemaan ratkaisu iteroimalla. Tämä johtaa erilaisiin ratkaisualgoritmeihin, riippuen siitä miten usein jäykkyysmatriisia halutaan uusia. Kuorma lisätään inkrementteittäin, ja se voi koostua tasan jakautuneesta kuormasta, pistekuormasta, viivakuormasta yhtä sivua pitkin sekä lämpötilakuormasta.

JOHDANTO

Tietokoneiden voimakkaan kehityksen myötä numeeriset menetelmät ovat voittaneet yhä enemmän alaa rakenteiden lujuusanalyysissä. Tämä on tehnyt materiaalin käyttäytymisen tarkemman kuvaamisen mahdolliseksi. Kun käytetään lineaarisia materiaalimalleja, ylittävät jännitykset usein myötöjäännityksen. Myötörajan ylittäviä jännityshuippuja saattaa syntyä jo pienillä kuorman arvoilla. Tällöin tarvitaan epälineaarista kimmoplastista materiaalimallia.

Numeeristen laskentamenetelmien kehittyessä epälineaaristen analyysien tarve voidaan yhä paremmin tyydyttää. Siirtyminen lineaarisista epälineaarisiiin analyysiin merkitsee huomattavaa vaatavuusasteen kasvua. Kirjallisuudessa ei useinkaan käsitellä epälineaarisia analyyseja riittävän käytännöllisellä tavalla. Poikkeus on lähde /3/, joka myös on ollut tämän työn perusteos.

Tämän kirjoituksen tavoitteena on havainnollistaa epälineaarisiiin analyysiin liittyviä seikkoja ja selostaa tietokoneohjelman IVOPLAST rakennetta. Ohjelma on lineaarisen analyysiohjelman IVOFEM laajennus. Se on tehty Fortran-kielisenä ja se perustuu elementtimenetelmään. Kimmoplastisten analyysien laskenta-ajat ovat suhteellisen pitkät ja kustannukset ovat kymmeniä kertoja vastaavan lineaarisen analyysin kustannuksia suuremmat. Kustannusten optimoinnin kannalta mahdollisimman tehokas ohjelmakoodi olisi siksi ollut tarpeen. Tässä työssä ensisijaise-

na tavoitteena oli kuitenkin aikaansaada toimiva ohjelma, eikä tehokkuuteen kiinnitetty niin suurta huomiota.

Lämpökuormien huomioonottaminen katsottiin ohjelman tulevan käytön kannalta erityisen tärkeäksi.

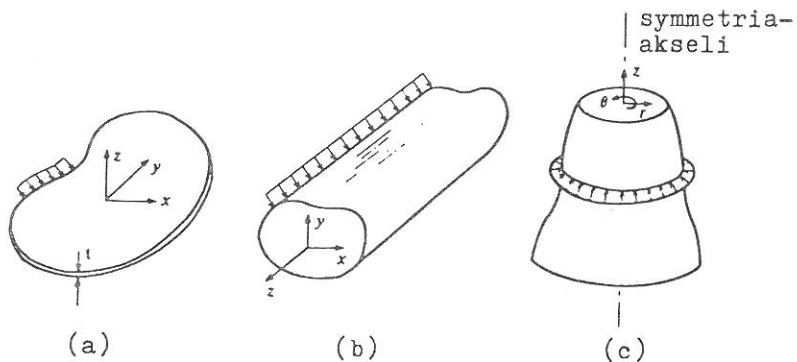
PLASTISUUSTEORIAN PERUSTEISTA

Seuraavassa esitetään tärkeimmät plastisuusteoriaan liittyvät käsitteet: myötöehto, myötöliujeneminen ja myötösääntö. Tässä ei pyritä syvälliseen teoreettiseen tarkasteluun, vaan esitetään yhtälöt, joihin IVOPLAST perustuu. Lähtökohdana on ollut aikaansaada materiaalimalli metalleille. Useimmilla metalleille ehdotetuilla myötöehdoilla on nykyisin pelkästään historiallista merkitystä, koska ne ovat ristiriidassa kokeellisten havaintojen kanssa. Kahdella yksinkertaisimmalla, von Misesin ja Trescan, myötöehdolla ei kuitenkaan ole tätä rajoitusta. Teoriaa johdettaessa on oletettu, että materiaali on isotrooppinen.

Eri tehtävätyyppien jännitystilat ovat:

$$\begin{aligned}
 \{\sigma\}^T &= \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \sigma_z\}, \sigma_z = 0 \text{ tasojännitystilassa} \\
 &= \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \sigma_z\}, \epsilon_z = 0 \text{ tasomuodonmuutostilassa} \\
 &= \{\sigma_r, \sigma_z, \tau_{rz}, \sigma_\theta\} \text{ pyörähdyssymmetrisessä tilassa.}
 \end{aligned} \tag{1}$$

Kuvasta 1 näkyy käytetty koordinaattisto. On osoittautunut edulliseksi järjestää jännityskomponentit kaavan (1) mukaiseen järjestykseen.



Kuva 1. 2-dimensioisten tehtävien koordinaattisysteemi. (a) tasojännitystila, (b) tasomuodonmuutostila, (c) pyörähdyssymmetrinen tila.

Myötöehdot

Myötöehto määrää missä jännitystilassa plastisia muodonmuutoksia alkaa esiintyä. IVOPLASTiin on sisällytetty kaksi myötöehtoa: von Misesin ja Trescan myötöehdot.

von Misesin myötöehto voidaan kirjoittaa muodossa

$$F = F(\sigma, \kappa) = \sqrt{3J_2^I} - \sigma_Y(\kappa) = 0, \quad (2)$$

missä σ_Y , joka voi olla myötölujenemisparametrin κ funktio, on myötöjännitys aksiaalisessa jännitystilassa. J_2^I on deviaatiojännitysten toinen invariantti, joka 2-dimensioisessa tapauksessa saa muodon

$$J_2^I = \frac{1}{2}(\sigma_x'^2 + \sigma_y'^2 + \sigma_z'^2) - \tau_{xy}^2, \quad (3)$$

missä

$$\sigma_i^I = \sigma_i - \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z), \quad i = x, y, z. \quad (4)$$

Trescan myötöehto voidaan esittää muodossa

$$F = F(\sigma, \kappa) = 2\sqrt{J_2^I} \cos\theta - \sigma_Y(\kappa) = 0, \quad (5)$$

missä ns. jännityskulma θ määritellään kaavalla ($/3/$, $/6/$)

$$\sin 3\theta = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3^I}{(J_2^I)^{3/2}}. \quad (6)$$

J_3^I on deviaatiojännitysten kolmas invariantti, joka voidaan kirjoittaa muodossa

$$J_3^I = \sigma_z^I(\sigma_z'^2 - J_2^I). \quad (7)$$

Myötölujeneminen

Myötölujeneminen on oletettu isotrooppiseksi. Myötölujenemisparametri κ voidaan tulkita plastisen kokonaismuodonmuutoksen mitaksi. Tätä muodonmuutosta kutsutaan myös tehokkaaksi, yleistetyksi tai ekvivalentiksi plastiseksi venymäksi, ja se määritellään kaavalla

$$\bar{\epsilon}_p = \sqrt{\frac{2}{3}} [(d\epsilon_{ij})_p (d\epsilon_{ij})_p]^{1/2} , \quad (8)$$

jolloin

$$\kappa = \bar{\epsilon}_p . \quad (9)$$

Myötösääntö

Myötäämisen jälkeen on materiaalin käyttäytyminen osaksi kimmoista ja osaksi plastista. Jokaisessa jännitysinkrementissä voidaan venymän muutos jakaa kimmoiseen ja plastiseen osaan

$$d\epsilon_{ij} = (d\epsilon_{ij})_e + (d\epsilon_{ij})_p . \quad (10)$$

Kimmainen venymän lisä suhtautuu jännityksen lisäykseen Hooken lain mukaan. Jos jännitystermit jaetaan deviaatio- ja hydrostaattisiin osiin, saadaan

$$(d\epsilon_{ij})_e = \frac{d\sigma_{ij}}{2\mu} + \frac{1-2\nu}{E} \delta_{ij} d\sigma_{kk} , \quad (11)$$

missä μ , ν ja E ovat materiaalin Lamén vakio, Poissonin vakio sekä kimmokerroin. Plastisuusteoriassa (ks. esim /2/) esitetään plastinen venymän lisä usein muodossa

$$(d\epsilon_{ij})_p = d\lambda \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} , \quad (12)$$

missä $d\lambda$ on verrannollisuuserroin ja Q on plastinen potentiaalifunktio. Yhtälöä (12) kutsutaan myötösäännöksi, koska se kuvaa materiaalin plastista käyttäytymistä myötön tapahtuessa. Potentiaalin Q on oltava J_2 :n ja J_3 :n funktio, mutta sitä ei voida yleisesti määrittää. Matemaattisessa plastisuusteoriassa on osoittautunut tarkoituksenmukaiseksi määritellä $Q = F$, sillä molemmat ovat J_2 :n ja J_3 :n funktioita. Tällöin saadaan ns. assosiattiivinen plastisuusteoria, jolloin (12) saa muodon

$$(d\epsilon_{ij})_p = d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} . \quad (13)$$

Lauseketta (13) kutsutaan normaalisuussäännöksi, koska $\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}$ esittää myötöpinnan

normaalia tarkasteltavassa jännityspisteessä (kuva 2). Kokeelliset tulokset ovat osoittaneet, että normaalisuussääntö on hyväksyttävä oletus metalleille. Lausekkeiden (10), (11) ja (13) mukaan saadaan täydellinen jännitysten ja venymien välinen kimmoplastinen yhteys inkrementteittäin muotoon

$$d\epsilon_{ij} = \frac{d\sigma_{ij}}{2\mu} + \frac{1-2\nu}{E} \delta_{ij} d\sigma_{kk} + d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} . \quad (14)$$

Matriisiesitys

Ohjelmoinnin kannalta on tarkoituksenmukaista kirjoittaa lausekkeet matriisi-muodossa. Myötöfunktio voidaan yleensä kirjoittaa muodossa

$$F(\{\sigma\}, \kappa) = f(\{\sigma\}) - k(\kappa) = 0 , \quad (15)$$

joka differentioimalla ja termien uudelleen järjestelyllä saa muodon

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} d\{\sigma\} + \frac{\partial F}{\partial \kappa} d\kappa = 0 , \quad (16)$$

tai

$$\{a\}^T d\{\sigma\} - A d\kappa = 0 , \quad (17)$$

missä

$$\{a\}^T = \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} = \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma_x}, \frac{\partial F}{\partial \sigma_y}, \frac{\partial F}{\partial \tau_{xy}}, \frac{\partial F}{\partial \sigma_z} \right\} \quad (18)$$

ja

$$A = - \frac{1}{d\lambda} \frac{\partial F}{\partial \kappa} d\kappa . \quad (19)$$

Vektoria $\{a\}$ kutsutaan myötövektoriksi. Yhtälö (14) voidaan nyt esittää muodossa

$$d\{\epsilon\} = [D]^{-1} d\{\sigma\} + d\lambda \left[\frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} \right]^T , \quad (20)$$

missä $[D]$ on konstitutiivinen matriisi. Kertomalla yhtälön (20) molemmat puolet vasemmalta termillä

$$\{d\}_D^T = \{a\}^T [D] , \quad (21)$$

ja eliminoimalla $\{a\}^T d\{\sigma\}$ yhtälön (17) avulla, plastinen kerroin $d\lambda$ saa muodon

$$d\lambda = \frac{1}{A + \{a\}^T [D] \{a\}} \{a\}^T [D] d\{\epsilon\} \quad (22)$$

Jos lauseke (22) sijoitetaan yhtälöön (20), saadaan täydellinen yhteys jännitysten ja muodonmuutosten välillä yhden kimmoplastisen inkrementin sisällä muotoon

$$d\{\sigma\} = [D]_{ep} d\{\epsilon\} \quad (23)$$

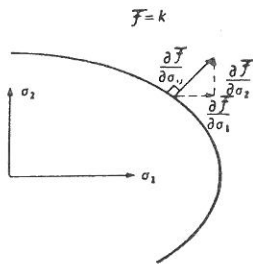
missä

$$[D]_{ep} = [D] - \frac{\{d\}_D \{d\}_D^T}{A + \{d\}_D^T \{a\}} \quad (24)$$

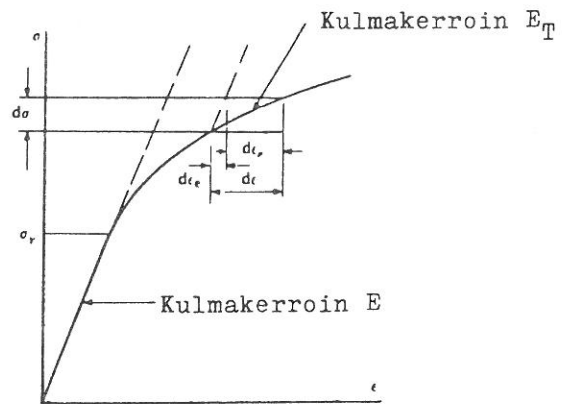
$[D]_{ep}$ on kimmoplastinen konstitutiivinen matriisi. Skalaarille A voidaan johtaa (/3/, /6/) lauseke

$$A = H' = \frac{E_T}{1 - E_T/E} \quad (25)$$

missä E_T on kuvan 3 mukainen kimmoplastinen kerroin.



Kuva 2. Normaaliehdon geometrinen esitys assosiatiivisessa plastisuusteoriassa /3/.



Kuva 3. Aksiaalisen tapauksen kimmoplastinen myötölujeneminen /3/.

Matriisin $[D]_{ep}$ laskemiseksi vektori $\{a\}$ on lausuttava muodossa, joka soveltuu numeeriseen laskentaan. Näykin mukaan /12/ voidaan myötöehdot kirjoittaa J_2^1 :n ja θ :n funktioina, kuten kaavoissa (2) ja (5) on esitetty. Tällöin saadaan

$$\{a\}^T = \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}} = \frac{\partial F}{\partial \sqrt{J_2}'} \frac{\partial \sqrt{J_2}'}{\partial \{\sigma\}} + \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \{\sigma\}} \quad (26)$$

Differentioimalla (6) saadaan

$$\frac{\partial \theta}{\partial \{\sigma\}} = - \frac{\sqrt{3}}{2 \cos \theta} \left[\frac{1}{(J_2)'^{3/2}} \frac{\partial J_2'}{\partial \{\sigma\}} - \frac{3J_2'}{(J_2)'^2} \frac{\partial \sqrt{J_2}'}{\partial \{\sigma\}} \right] \quad (27)$$

Jos tämä lauseke sijoitetaan yhtälöön (26) ja otetaan huomioon (6), saadaan

$$\{a\} = C_1 \{a_1\} + C_2 \{a_2\} \quad (28)$$

missä

$$\begin{aligned} \{a_1\}^T &= \frac{1}{2\sqrt{J_2}'} \{ \sigma_x', \sigma_y', 2\tau_{xy}, \sigma_z' \} \quad , \\ \{a_2\}^T &= \left\{ \left(\sigma_y' \sigma_z' + \frac{1}{3} J_2' \right), \left(\sigma_x' \sigma_z' + \frac{1}{3} J_2' \right), \right. \\ &\quad \left. - 2\sigma_z' \tau_{xy}, \left(\sigma_x' \sigma_y' - \tau_{xy}^2 + \frac{1}{3} J_2' \right) \right\} \quad , \end{aligned} \quad (29)$$

ja

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{\partial F}{\partial \sqrt{J_2}'} - \frac{\tan 3\theta}{\sqrt{J_2}'} \frac{\partial F}{\partial \theta} \quad , \\ C_2 &= \frac{-\sqrt{3}}{2 \cos 3\theta} \frac{1}{(J_2)'^{3/2}} \frac{\partial F}{\partial \theta} \quad . \end{aligned} \quad (30)$$

Nyt ainoastaan vakiot C_1 ja C_2 ovat riippuvaisia valitusta myötöehdosta. Taulukossa 1 on annettu C_1 ja C_2 IVOPLASTissa käytetyille myötöehdoille.

Taulukko 1. Myötövektoria määrittelevät vakiot.

Myötöehto	C_1	C_2
von Mises	$\sqrt{3}$	0
Tresca	$2 \cos \theta (1 + \tan \theta \tan 3\theta)$	$\frac{\sqrt{3} \sin \theta}{J_2' \cos 3\theta}$

ELEMENTTIMENETELMÄN SOVELTAMINEN

Ohjelmaan IVOPLAST on sisällytetty seuraavat kolme elementtiä:

- Kolmioelementti lineaarisella siirtymäjakaumalla.
- Nelisivuinen ja 4-solmuinen isoparametrinen elementti lineaarisella siirtymäjakaumalla.
- Nelisivuinen ja 8-solmuinen isoparametrinen elementti kaarevilla reunoilla ja neliöllisellä siirtymäjakaumalla elementin sisällä.

Kuormitus lisätään inkrementteittäin eli kuorma kasvaa jatkuvasti. Jokaisella inkrementillä ratkaistaan siirtymä- ja jännitystila iteroimalla. Analyysi on rajoitettu pieniin siirtymiin ja muodonmuutoksiin. Kuormitus voi koostua tasan jakautuneesta kuormasta, pistekuormasta, viivakuormasta yhtä sivua pitkin sekä lämpötilakuormasta.

Ohjelmalla voidaan ratkaista vain kaksidimensioisia tehtäviä, jotka voidaan kuvata tasojännitys-, tasomuodonmuutos- tai pyörähdyssymmetrisellä tilalla. Näille tehtävätyypeille saadaan seuraavat konstitutiiviset matriisit (vrt. yhtälö (1)):

- Tasojännitystila

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (31)$$

- Tasomuodonmuutostila

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (32)$$

- Pyörähdyssymmetrisen tila

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 & \nu \\ \nu & 1-\nu & 0 & \nu \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ \nu & \nu & 0 & 1-\nu \end{bmatrix} \quad (33)$$

Nyt voidaan täydentää kaavan (24) kimmoplastisen matriisin $[D]_{ep}$ esitystä. Tarvitaan vielä lauseke kaavan (21) mukaiselle vektorille $\{d\}_D$. Kaavojen (29) ja (31) - (33) avulla saadaan tasomuodonmuutostilalle ja pyörähdyssymmetriselle tilalle

$$\{d\}_D = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{E}{1+\nu} a_1 + M_1 \\ \frac{E}{1+\nu} a_2 + M_1 \\ Ga_3 \\ \frac{E}{1+\nu} a_4 + M_1 \end{Bmatrix} , \quad (34)$$

missä $a_1 - a_4$ ovat $\{a\}$:n komponentit, $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ on liukukerroin ja

$$M_1 = \frac{E\nu(a_1+a_2+a_4)}{(1+\nu)(1-2\nu)} . \quad (35)$$

Tasojännitystilalle saadaan vastaavasti:

$$\{d\}_D = \begin{Bmatrix} \frac{E}{1+\nu} a_1 + M_2 \\ \frac{E}{1+\nu} a_2 + M_2 \\ Ga_3 \\ \frac{E}{1+\nu} a_4 + M_2 \end{Bmatrix} , \quad (36)$$

missä

$$M_2 = \frac{E\nu(a_1+a_2)}{1-\nu^2} . \quad (37)$$

Jäännösvoimat

Jos kappaletta kuormitetaan tilavuusvoimilla $\{b\}$, reunavoimilla $\{t\}$ ja pistevoimilla $\{f\}$, voidaan virtuaalisen työn periaatteella johtaa kappaleen tasapainotilalle yhtälö

$$\int_{\Omega} [B]^T \{\sigma\} d\Omega - \{f\} - \int_{\Omega} [N]^T \{b\} d\Omega - \int_{\Gamma_t} [N]^T \{t\} d\Gamma = 0 , \quad (38)$$

missä $\{\sigma\}$ on jännitysvektori, $[B]$ venymämatriisi, $[N]$ muotofunktioista koostuva matriisi, Ω tarkasteltava alue ja Γ_t osa alueen reunasta, jossa reunavoimat tunnetaan. Kun ratkaistaan epälineaarista tehtävää, yhteys (38) ei aina ole voimassa, vaan voidaan kirjoittaa

$$\{\Psi\} = \int_{\Omega} [B]^T \{\sigma\} d\Omega - (\{f\} + \int_{\Omega} [N]^T \{b\} d\Omega + \int_{\Gamma_t} [N]^T \{t\} d\Gamma) \neq 0, \quad (39)$$

missä vektoria $\{\Psi\}$ kutsutaan jäännösvoimavektoriksi.

Yhtälö (38) voidaan lyhyesti esittää muodossa

$$[K]\{d\} - \{R\} = 0, \quad (40)$$

missä $\{d\}$ sisältää tuntemattomat solmuisiirtymät, $\{R\}$ kokonaiskuorman ja $[K]$ on koko mallin jäykkymatriisi. Jos $[K]$:n termit ovat tuntemattomien suureiden $\{d\}$ tai niiden derivaattojen funktioita, tehtävä on epälineaarinen. Tällöin (40) saa muodon

$$[K(\{d\})]\{d\} - \{R\} \equiv \{P(\{d\})\} - \{R\} = 0. \quad (41)$$

Tässä tapauksessa yhtälön suora ratkaisu on yleisesti mahdoton, joten on pakko käyttää iteratiivista ratkaisumenetelmää. Tällaisia menetelmiä on kehitetty ver-raten monta, mutta tässä esitetään vain IVOPLASTissa esiintyvät menetelmät.

Tangentiaalinen jäykkymenetelmä

Yhteys (41) ei ole voimassa, ellei ratkaisu ole supennut. Voidaan olettaa, et-tä on olemassa jäännösvoimajärjestelmä (vrt. (39))

$$\{\Psi(\{d\})\} = \{P(\{d\})\} - \{R\} \neq 0, \quad (42)$$

mikä voidaan tulkita mittana systeemin poikkeamasta tasapainotilasta. Kun $\{\Psi\}$ poikkeaa nolasta, voidaan kuviteltu tasapaino saavuttaa tulkitsemalla $\{\Psi\}$ ulkoi-seksi voimaksi, joka lisätään annettuun kuormitukseen $\{R\}$. Tasapainon saavutta-miseksi rakennetta kuormitetaan ulkoisella voimalla $\{\Psi\}$, jonka jälkeän lasketaan vastaavat siirtymät, muodonmuutokset ja jännitykset. Tämän jälkeen tasapaino tar-kastetaan uudelleen, jolloin saadaan uudet jäännösvoimat $\{\Psi\}$. Nämä kuormittavat nyt vuorostaan rakennetta ja iterointi jatkuu, kunnes $\{\Psi\}$ on riittävän lähellä nolaa.

Kuormitus $\{\Psi\}$ aiheuttaa tuntemattomien suureiden $\{d\}$ muutoksen $\Delta\{d\}$ iterointi-kierroksella r (/11/)

$$\Delta\{d\}^r = - [K_T(\{d\}^r)]^{-1} \{\Psi(\{d\}^r)\}, \quad (43)$$

missä

$$[K_T(\{d\})] = \frac{d\{\Psi\}}{d\{d\}} \equiv \frac{d\{P\}}{d\{d\}} \quad (44)$$

kuvaa tangentiaalista matriisia.

Tangentiaalinen jäykkyysmenetelmä perustuu jäykkyysmatriisiin uudelleen laskemiseen jokaisella iteroitikierröksellä. Iterointi aloitetaan valitsemalla läh-
töarvo tuntemattomille suureille $\{d\}^0$, jonka jälkeen $\{\Psi(\{d\}^0)\}$ lasketaan lausek-
keesta (42). $\Delta\{d\}^0$ saadaan lausekkeesta (43) ja uusi approksimaatio saadaan lau-
sekkeesta

$$\{d\}^{r+1} = \{d\}^r + \Delta\{d\}^r \quad (45)$$

r :n arvolla 0. Tätä iterointiprosessia jatketaan, kunnes ratkaisu on supennut
epälineaariseen ratkaisuun, jolloin $\{\Psi\}^r$ käytännöllisesti katsoen häviää.

Alkujäykkyysmenetelmä

Tangentiaalisen jäykkyysmenetelmän soveltaminen merkitsee sitä, että yhtälöryh-
mä on kokonaisuudessaan koottava ja ratkaistava jokaisella iteroitikierröksellä.
Tämä on aikaa vievä ja kallis prosessi. Jos (43):ssa esitetyn jäykkyysmatriisin
sijasta käytetään kaikissa laskennan vaiheissa $\{d\}$:n lähtöarvoon perustuvaa jäyk-
kyysmatriisia, on yhtälöryhmä ratkaistava kokonaisuudessaan vain ensimmäisellä
iteroitikierröksellä. Seuraavat approksimaatiot saadaan lausekkeen

$$\Delta\{d\}^r = - [K_T(\{d\}^0)]^{-1} \{\Psi(\{d\}^r)\} \quad (46)$$

ja (45) avulla. Muilta osin iterointiprosessi on sama kuin edellisessä menetel-
mässä.

Yhdistetyt menetelmät

Tangentiaalisen jäykkyysmenetelmän ja alkujäykkyysmenetelmän käyttökelpoisuus
riippuu paljolti siitä, kuinka voimakasta materiaalin epälineaarinen käyttäyty-
minen on. Optimaalinen algoritmi saadaan yleensä yhdistämällä nämä kaksi menetelmää,
jolloin jäykkyys muuttuu vain tietyin valituin välein. IVOPLASTissa on kaksi yh-
distettyä menetelmää. Toisessa menetelmässä lasketaan jäykkyys uudelleen jokaisen
inkrementin ensimmäisellä iteroitikierröksellä, ja toisessa lasketaan jäykkyys
uudelleen jokaisen inkrementin toisella iteroitikierröksellä sekä ensimmäisen
inkrementin ensimmäisellä iteroitikierröksellä.

Suppenemisehto

Jokaisen iterointikierroksen lopussa tarkastellaan ratkaisun suppenemista. IVOPLASTissa on käytetty seuraavaa suppenemisehtoa

$$\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^N (\psi_i^r)^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (f_i^r)^2}} \times 100 \leq \text{TOLER} , \quad (47)$$

missä ψ_i on yhtälön (42) mukaisen epätasapainovektorin komponentti ja f_i on vapausasteen i kokonaiskuorma. N on mallin vapausasteiden lukumäärä, r iterointikierron ja TOLER lähtötietoina annettava toleranssi.

OHJELMAN KUVAUS

Kuten aikaisemmin on mainittu, IVOPLAST on laajennus aiemmin kehitetystä lineaarisesta kimmoteoriaan perustuvasta ohjelmasta IVOFEM. Kuvasta 4 nähdään ohjelman toimintakaavio. Ohjelmassa on 56 modulia, joista 13 on tehty IVOPLASTia varten ja muut ovat yhteisiä IVOFEMin kanssa.

Suurin ero IVOFEMin ja IVOPLASTin välillä on, että IVOPLASTissa koko laskenta tapahtuu Gaussin pisteissä. Näitä pisteitä on kolmioelementissä 4 ja nelikulmioelementissä 2×2 tai 3×3 . Muodonmuutos-, jännitys-, jäykkyys- ja konstitutiivisen matriisin termit lasketaan Gaussin pisteissä, jonka jälkeen elementin jäykkyysmatriisi kootaan lisäämällä elementin jokaisen Gaussin pisteen osuus. Jännitykset lasketaan koko ajan Gaussin pisteissä, mutta kuormitusvektori ja siirtymät lasketaan solmupisteissä.

Ohjelmassa lämpöpiteneiskertoimen α , kimmokertoimen E ja myötöjännityksen σ_y lämpötilariippuvuutta ei voida ottaa huomioon. Vapausasteiden poistaminen täytyy suorittaa antamalla nolla-pakkosiirtymiä. Inkrementtien maksimimääräksi on valittu 56, mutta tarpeen tullen sitä voidaan kasvattaa. Iterointikierrosten maksimimäärä annetaan lähtötietona. Ohjelman tarkempi kuvaus löytyy lähteistä /6/ ja /7/.

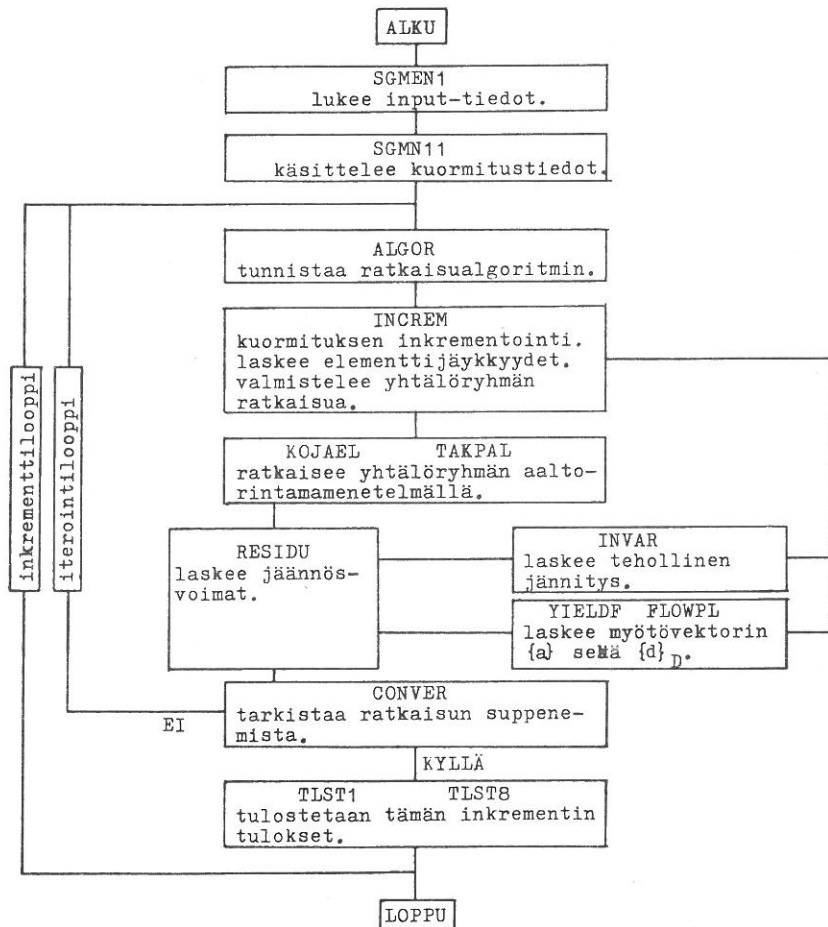
LASKENTAESIMERKKI

Käytännön esimerkkinä on ohjelmalla laskettu pääkiertovesipumpun kannen epälineaariset jännitykset. Kuvassa 5 on esitetty pumpun pesä, kansi (vinoviivoitettu osa) ja kannen kiinnitysjärjestelmät sekä kannen elementtimalli. Laskennassa oli

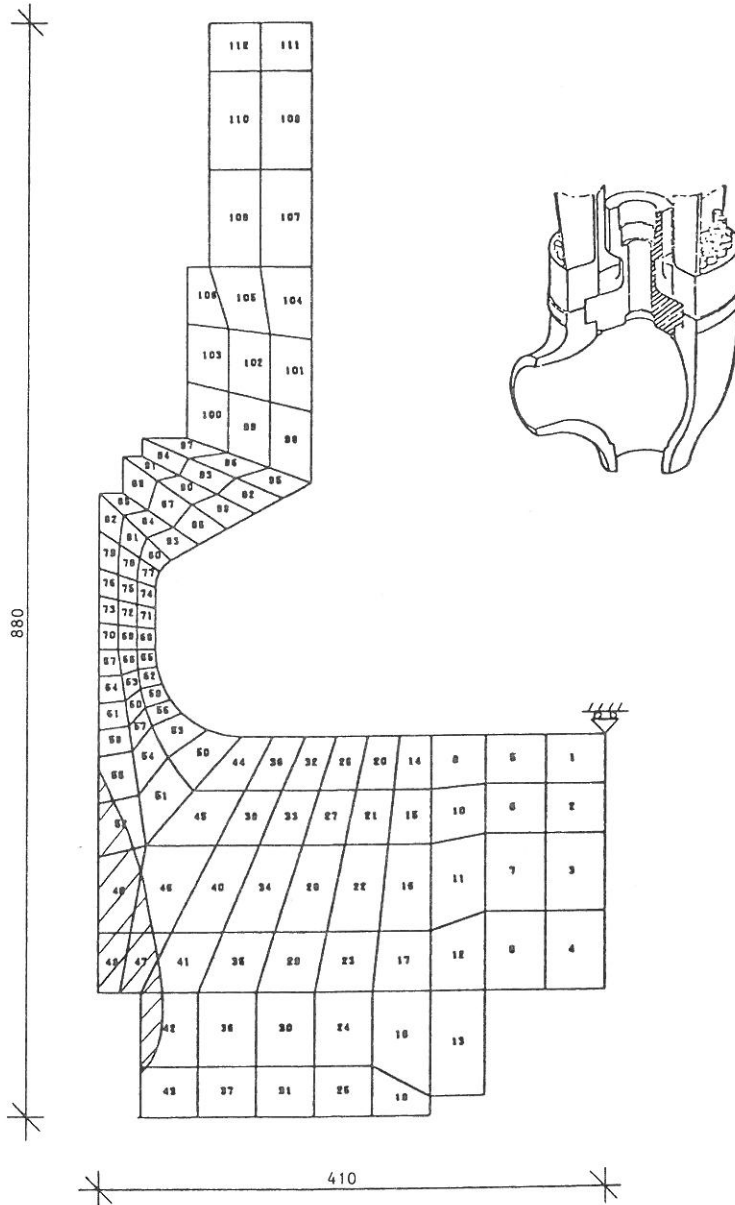
413 solmupistettä ja 112 8-solmuista elementtiä. Sama tehtävä on laskettu läh-
teessä /5/, josta osa lähtötiedoista on otettu. Sen lisäksi on tehtävä vielä rat-
kaistu toisella elementtiementelmään perustuvalla ohjelmalla, ADINAilla (Automatic
Dynamic Incremental Nonlinear Analysis).

Analyysissa käytettiin von Misesin myötöehtoa arvolla $\sigma_y = 180$ MPa. Kimmoker-
toimen arvona käytettiin $E = 178000$ MPa, lämpöpiteneimiskertoimen arvona $\alpha = 1,75 \times$
 $10^{-5} 1/^\circ\text{C}$, Poissonin vakiona $\nu = 0,3$ ja myötölujenemiskertoimen arvona $E_T = 0$.

Kuormitus koostui paine- ja lämpötilakuormasta. Normaalitilanteessa vallitsee
pumpun pesässä 12,5 MPa:n paine ja pumpatun veden lämpötila on 270°C . Lämpötila-
jakauma on laskettu lähteessä /5/ ja tulos on esitetty kuvassa 6. Tästä kuvasta
on elementtien nurkkalämpötilat arvioitu ja syötetty IVOPLASTiin. Tehtävä rat-
kaistiin kahdessa inkrementissä.



Kuva 4. Ohjelman rakenne.



Kuva 5. Pääkiertovesipumpun rakenne ja kannen elementtimalli.

LÄHDELUETTELO

- [1] ANSYS, Engineering analysis system, Theoretical Manual. Swanson analysis systems, Inc., 1977.
- [2] Hill, R., The mathematical theory of plasticity. Clarendon Press, Oxford, 1950.
- [3] Hinton, E., Owen, D.R.J., Finite elements in plasticity, theory and practice. Pineridge Press Limited, Swansea, U.K., 1980.
- [4] Ikonen, K., Tasojännitystilän epälineaarinen analyysi. VTT/Ydinvoimatekniikan laboratorio, Tiedonanto 41, 1979.
- [5] Lampela, K.M., Pyörähdysyymmetristen rakenteiden epälineaarinen lämpöjännitysanalyysi elementtimenetelmällä. Diplomityö, Oulun yliopisto, 1976.
- [6] Lundgrén, R., Om tillämpandet av plasticitetsteorin vid lösandet av plan- och axisymmetriska uppgifter med hjälp av elementmetoden. Diplomarbete, HTKK, 1983.
- [7] Lundgrén, R., IVOPLAST, Käyttäjän opas. Imatran Voima Oy, Rakennussuunnitteluosasto, Helsinki, 1983.
- [8] Orivuori, S., Description of IVOFEM program. Imatran Voima Oy, Civil Engineering Department, Helsinki, 1979.
- [9] Orivuori, S., IVOFEM, Käyttäjän opas versio F. Imatran Voima Oy, Rakennussuunnitteluosasto, Helsinki, 1982.
- [10] Ylinen, A., Kimmo- ja lujuusoppi, osa 1. WSOY, Porvoo, 1970.
- [11] Zienkiewicz, O.C., The finite element method, third edition. McGraw-Hill, London, 1977.
- [12] Zienkiewicz, O.C., Nayak, G.C., Convenient form of stress invariants for plasticity. Journal of the Structural Division, Proc. of A.S.C.E., s. 942 - 953, April 1972.

Rune Lundgrén, dipl.ins., Imatran Voima Oy