

## UUSI JÄNNITYSINTENSITEETTIKERTOIMEN LASKENTAMENETELMÄ

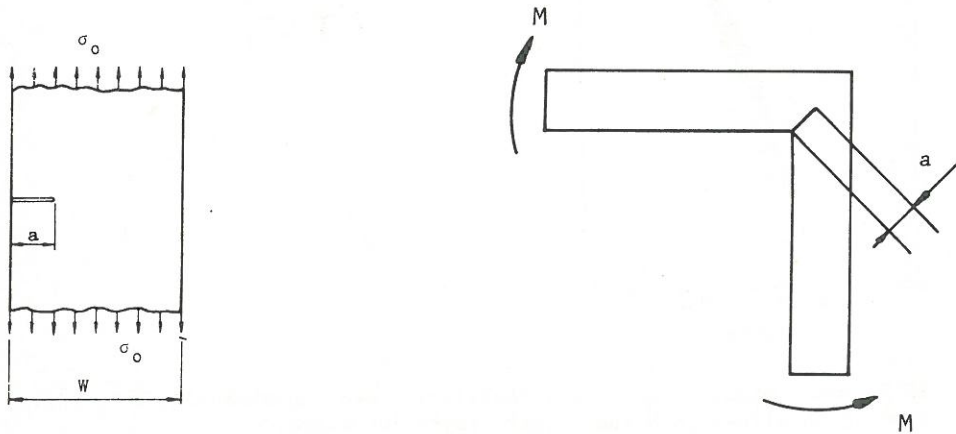
Kari Ikonen

Rakenteiden Mekaniikka, Vol. 17  
No 1 1984, s. 17...27

**YHTEENVETO:** Artikkelissa esitetään menetelmä jännitysintensiteettikertoimen määrittämiseksi elementtimenetelmällä. Menetelmä perustuu särön kärjen läheisyydessä tunnetun jännitys- ja siirtymätilan analyyttisen ratkaisun hyväksi käyttöön, jolloin särön kärjen lähialuetta ei tarvitse jakaa elementteihin. Tämä vähentää elementtiverkon tekemiseen kuluva aikaa ja tietokonekustannuksia. Menetelmän merkittävä etu on myös siinä, että se ei edellytä tietokoneohjelmalta intensiteettikertoimen laskentaan liittyviä erityisominaisuuksia, vaan analyysissä voidaan käyttää tavanomaisia elementtiohjelmistoja.

### JOHDANTO

Jännitysintensiteettikerroin  $K$  on lineaaris-elastisen murtumismekaniikan keskeisin suure ja se kuvaa jännitys- ja muodonmuutoskentän voimakkuuden särön kärjen läheisyydessä. Intensiteettikerroin on laskettavissa lujuusopin menetelmin rakenteen geometrian, materiaalitietojen ja kuormituksen perusteella.



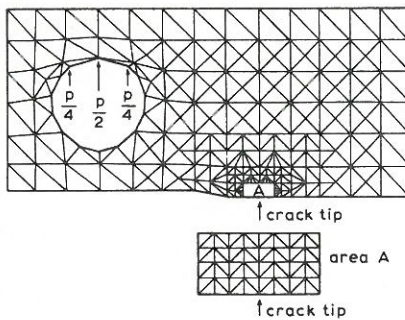
Kuva 1. Esimerkkejä särön sisältävistä kappaleista.

Kuormitusta lisättäessä intensiteettikerroin  $K$  kasvaa, kunnes se saavuttaa materiaalista riippuvan kriittisen arvon  $K_C$ , jolloin rakenne murtuu. Jotta murtumista ei

$$da/dN = C (\Delta K)^n, \quad (3)$$

jota kutsutaan Paris'in kaavaksi. Särön kasvunopeus riippuu voimakkaasti intensiteettikerroimesta, sillä metalleilla  $n$  vaihtelee välillä 2...4. Tästä seuraa, että intensiteettikerroin on laskettava väsymisanalyysejä varten huomattavan tarkasti. Jo 10%:n virhe  $K$ :n arvossa aiheuttaa särön kasvunopeuteen 20...40% suuruisen laskentavirheen, joka on kohtuuton, vaikka muut tekijät aiheuttaisivat myös epävarmuutta. Jotta särön kasvunopeus tulisi riittävän tarkasti arvioiduksi, on intensiteettikerroin laskettava 1...5% tarkkuudella, mikä asettaa huomattavat vaatimukset käytettäville mittaus- ja laskentamenetelmille.

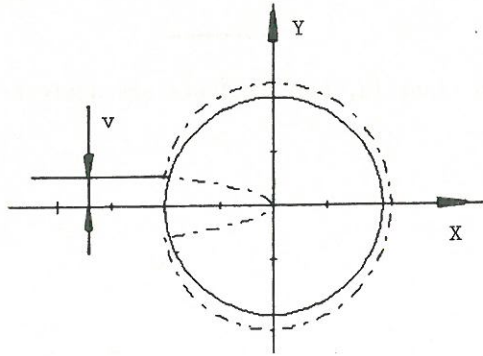
Yksinkertaisissa tapauksissa särön intensiteettikerroin on kyetty ratkaisemaan analyttisesti. Käytännössä intensiteettikerroin joudutaan kuitenkin usein laskemaan numeerisesti elementtimenetelmällä. Laskenta on vaativa tehtävä, koska jännitykset särön kärkeä lähestyttäessä kasvavat rajatta, minkä vuoksi särön kärkialue joudutaan jakamaan tiheästi elementteihin. Lisäksi särön kärkeen liittyvät elementit tehdään usein singulaarisiksi solmupisteiden siirroilla tai sopivilla erikois-elementeillä. Kuvassa 3 on esimerkki elementtiverkosta ja suurennos särön kärki-alueesta.



Kuva 3. Kriittisen intensiteettikerroimen  $K_{Ic}$  määrittämisessä käytetyn koekappaleen puolikkaan elementtiverkko ja suurennos särön kärkialueelta.

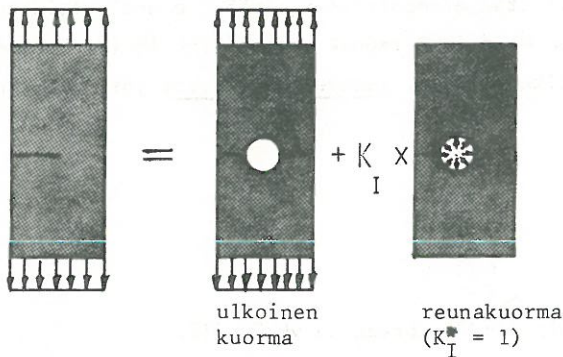
#### MENETELMÄN PERIAATE

Säröä voidaan kuormittaa kolmella peruskuormitustavalla (kuva 4), joihin liittyvistä intensiteettikerroimista käytetään merkintöjä  $K_I$ ,  $K_{II}$  ja  $K_{III}$ .



Kuva 5. Särön kärkeen piirretyn ympyräviivan muodonmuutos kuormitus-  
tavassa I.

Lasketaan seuraavaksi kaksi kuormitustapausta, joista ensimmäisessä kuormituksena on ulkoinen kuorma ja toisessa poistetun ympyrän reunalla kaavojen (4) mukainen kuormitus laskettuna intensiteettikertoimen arvolla  $K_I^*$  (kuva 6). Kaavojen (4)...(6) avulla todetaan, että jännitys- ja siirtymäkenttä ovat kerrointa  $K_I$  vaille tunnettuja.



Kuva 6. Laskentaperiaatetta havainnollistava kuva.

Reunaehtojen ollessa molemmissa kuormitustapauksissa samat voidaan siirtymät ratkaista yhtäaikaan elementtimenetelmällä, jolloin ajoaika on käytännössä sama kuin yhdessä kuormitustapauksessa.

Tarkastellaan y-akselin suuntaista siirtymää  $v$  ympyrän reunalla kohdassa, jossa se leikkaa särön kyljen ( $\theta = 180^\circ$ ).  $v$  saavuttaa kyseisessä kohdassa maksimin (kuva 5), mikä on numeerisesti edullista. Lisäksi mahdollinen x-akselin suuntainen ulkoinen kuormitus, joka ei vaikuta intensiteettikertoimeen, ei vaikuta myöskään tarkasteltavaan siirtymään. Tarkastelukohta on sikälkin edullinen, että siinä kaavojen (4) perusteella reunakuorma häviää, millä on ilmeisesti positiivinen vaikutus elementtimenetelmällä laskettavan siirtymän tarkkuuteen. Huomattakoon myös, että  $u$  häviää

$$K_I = \frac{v_p^e}{8(1-v^2)^{1/2} \frac{1}{E} \sqrt{\frac{R}{2\pi}}} \cdot (R/a \text{ pieni!}) \quad (12)$$

Tasojännitystilassa kerroin  $(1-v^2)$  korvautuu ykkösellä.

Suhde  $\frac{v_R^e}{v_R^a}$  ( $\sim 1$ ) antaa viitteitä ratkaisun tarkkuudesta. Ilmeisesti suhde ei saa erota huomattavasti arvosta 1.

#### ESIMERKKI

Menetelmää kokeiltiin kuvan 7 esittämässä tapauksissa, joissa oletettiin vallitsevan tasovenymätila. Elementtinä käytettiin 8-solmuista, isoparametrista taselementtiä. Ajot suoritettiin VTT:n JINT-ohjelmalla ajoajan vaihdeltaessa välillä 6.4... 10.6 s VTT:n CDC CYBER 173-koneella.

Viihteestä /2/ on saatu vertailuratkaisut, joiden virheen ilmoitetaan olevan enintään 0.5%. Taulukossa 1 esitetyistä tuloksista havaitaan, että ympyrän säteen ja särön pituuden suhde 0.1 antaa huomattavasti paremman tuloksen kuin suhde 0.2. Jonkinlaisena ohjearvona voisi suhteelle  $R/a$  antaa enimmäisarvon 0.1, jolla ympyrän koosta aiheutuvan ratkaisun virheen pitäisi olla vähäinen.

Taulukko 1. Viiden testitapauksen tulokset.  $K_I^{10}$  on kaavasta (10) ja  $K_I^{12}$  kaavasta (12) laskettu jännitysintensiiteettikerroin.

tapaus	r/mm	$v_p^e/m$	$\frac{v_R^e}{\sqrt{m}}/Pa$	$\frac{v_R^a}{\sqrt{m}}/Pa$	$v_R^e/v_R^a$	vertailu- ratkaisu $K_I/MPa\sqrt{m}$	$K_I^{10}$	ero %	$K_I^{12}$	ero %
I	5,0	0,12065E-4	0,10731E-11	0,05134E-11	2,09	7,85	7,60	3,2	11,7	53,9
II	2,5	0,58863E-5	0,38852E-12	0,36304E-12	1,07	7,85	7,83	0,2	8,11	3,3
III	5,0	0,11286E-3	0,10708E-11	0,05134E-11	2,09	76,1	71,2	6,5	110,0	44,5
IV	2,5	0,55757E-4	0,38772E-12	0,36304E-12	1,07	76,1	74,3	2,4	76,8	0,9
V	2,5	0,56280E-4	0,39011E-12	0,36304E-12	1,08	76,1	74,7	1,8	77,5	1,8



### $K_{III}$ KERTOIMEN LASKEMINEN

Kuormitustavassa II tarkastellaan x-akselin suuntaisia siirtymiä ympyrän reunalla, jossa  $\theta=180^\circ$ . Jännityskomponentit lähellä särön kärkeä ovat tasojännitys- ja tasovenymätilassa (/I/, s. 73)

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = K_{III} \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \begin{bmatrix} -\sin\frac{\theta}{2}(2+\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}) \\ \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2}(1-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}) \end{bmatrix} \quad (13)$$

Siirtymät ovat tasojännitystilassa

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = K_{III} \frac{2(1+\nu)}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{bmatrix} \sin\frac{\theta}{2}(\frac{2}{1+\nu} + \cos\frac{2\theta}{2}) \\ \cos\frac{\theta}{2}(-\frac{1-\nu}{1+\nu} + \sin\frac{2\theta}{2}) \end{bmatrix} \quad (14)$$

ja tasovenymätilassa

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = K_{III} \frac{2(1+\nu)}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{bmatrix} \sin\frac{\theta}{2}(2-2\nu+\cos\frac{2\theta}{2}) \\ \sin\frac{\theta}{2}(-1+2\nu+\sin\frac{2\theta}{2}) \end{bmatrix} \quad (15)$$

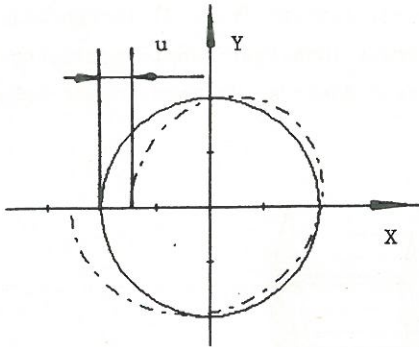
Kuva 8 havainnollistaa muodonmuutoksia.

Analyttisen ratkaisun mukaiseksi siirtymäksi  $u_R^a$  saadaan tasojännitystilassa ( $\theta=180^\circ$ )

$$u_R^a = K_{III} \frac{4}{E} \sqrt{\frac{R}{2\pi}} \quad (16)$$

ja tasovenymätilassa

$$u_R^a = K_{III} \frac{4(1-\nu^2)}{E} \sqrt{\frac{R}{2\pi}}, \quad (17)$$



Kuva 8. Särön kärkeen piirretyn ympyrän muodonmuutos kuormitustavassa II.

### $K_{III}$ -KERTOIMEN LASKEMINEN

Kolmannessa kuormitustavassa ovat jännitykset särön kärjen lähellä

## LOPPUPÄÄTELMÄT

Kehitetyllä laskentamenetelmällä on etuja aiemmin käytettyihin menetelmiin verrattuna. Elementtiverkon tekeminen yksinkertaistuu ja laskenta-aika lyhenee. Särön kärkialue otetaan huomioon tarkkojen analyttisten lausekkeiden avulla. Elementtien väliset jäykkyyserot vähenevät ja numeerinen tarkkuus paranee, jolloin tarve kaksinkertaisen tarkkuuden käyttöön eräissä tietokoneissa vähenee. Tietokoneohjelmalta ei edellytetä intensiteettikertoimen laskentaan liittyviä erityisominaisuuksia.

Menetelmää käytettäessä poistettavan ympyrän säteen tulee olla riittävän pieni. Sädettä voidaan helposti pienentää lisäämällä elementtikerroksia ympyrän reunalle.

Kiitän dipl.ins. Heli Taljaa ja dipl. ins. Pertti Salmista tietokoneajojen suorittamisesta.

## LÄHDELUETTELO

- /1/ Broek, D., Elementary engineering fracture mechanics. Martinus Nijhoff Publishers, Hague 1983, 3. painos. 469 s.
- /2/ Carlsson, J., Brottmekanik. Stockholm, Ingengörsförlaget Ab, 1976. 292 s.

*Kari Ikonen, tekn.lis., Valtion teknillinen tutkimuskeskus, Ydinvoimatekniikan laboratorio*