YKSINKERTAINEN PALKKI JÄYKÄLLÄ EPÄTASAISELLA ALUSTALLA

Markku Heinisuo

Rakenteiden Mekaniikka, Vol. 17
No 1 1984, s. 1...16

YHTEENVETO: Artikkelissa tarkastellaan kimmoisen kappaleen (palkin) ja jäykän alustan kitkatonta kosketusprobleemaa, kun kimmoisen kappaleen jäykän kappaleen liike on tunnettu. Numeerista ratkaisua varten johdetaan yhtälöt komplementaariseen tehtävään sekä siirtymä- ja voimamenetelmään perustuviin optimointitehtäviin. Käytetyt algoritmit esitellään ja lasketaan numeerinen esimerkki. Tulosten perusteella esitetään suositukset käytettävästä menetelmästä. Menetelmät ovat helposti laajennettavissa tapauksiin, joissa palkin tilalla on jokin muu kimmoinen kappale edellyttäen, että tämän tiivistetty jäykkyys- tai joustomatriisi on laskettavissa, tai tapauksiin, joissa alusta on kimmoinen kappale.

JOHDANTO

Artikkelissa tarkastellaan jäykän alustan ja kimmoisen palkin kitkatonta kosketusprobleemaa. Pääpaino on menetelmien kuvaamisessa. Tarkoituksena on kartoittaa kenttää mutkikkaampien kosketusprobleemien ratkaisemiseksi. Tässä esitetyn yksinkertaisen palkkitehtävän avulla saadaan helposti esiin joitain kosketusprobleeman erityispiirteitä sekä voidaan tarkastella näiden vaikutusta numeeriseen laskentaan.

Tässä esitettyjä tuloksia voidaan rakenteiden suunnittelussa soveltaa esim. sellaisten palkkien tai laattojen analysointiin, jotka ovat epätasaisella (tai hieman vajonneella) alustalla, tai melkein samanlaiseen tehtävään: käyrä palkki (suksi) suoralla alustalla. Menetelmät on helppo laajentaa tapauksiin, joissa palkin tilalla on jokin muu kimmoinen kappale ja joissa alusta on myös kimmoinen. Lisätutkimuksia vaatii tilanne, jossa kimmoisen kappaleen jäykän kappaleen liike ei ole etukäteen tiedossa. Nämä laajennukset ja lisätutkimukset kuuluvat TTKK:n Rakennusstatiikan laitoksella suoritettavaan tutkimusprojektiin: Rakennustekniikan kosketusprobleemat.

Kosketusprobleeman ratkaisua analyyttisillä menetelmillä on selvitetty aikaisemmin (Heinisuo /1/, Gladwell /2/). Kirjallisuudessa on esitetty (vrt. myöh.) numeeriseen laskentaan tähtääviä kosketusprobleeman ratkaisumalleja, jotka perustuvat *suoraan komplementaarisen tehtävän ratkaisuun* sekä vastaavan *siirtymämenetelmään perustuvan optimointitehtävän* ratkaisuun. Seuraavassa esitetään molemmat

$$
\begin{cases}
ph = 0 \quad , \\
p \geq 0 \quad , \\
h \geq 0 \quad , \text{ koko pinnalla.}
\end{cases}
\tag{3}
$$

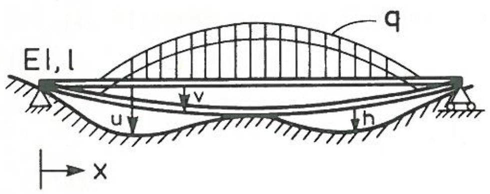
Kitkattoman kosketusprobleeman ratkaisu (kosketusjännitys, kosketuspinta jne.) voidaan konstruoida ratkaisemalla em. komplementaarinen tehtävä, jos jäykän kappaleen liike on tunnettu (tässä nolla). Seuraavassa tarkastellaan erilaisia vaihtoehtoja komplementaarisen tehtävän ratkaisemiseksi.

KOMPLEMENTAARINEN TEHTÄVÄ TAIPUISALLE PALKILLE JÄYKÄLLÄ ALUSTALLA

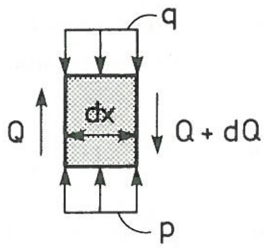
Komplementaarinen tehtävä taipuisalle palkille voidaan esittää muodossa:

$$
\begin{cases}
p(x)h(x) = 0 \quad , \\
p(x) \geq 0 \quad , \\
h(x) \geq 0 \quad , \quad \forall x \in [0,l] \; ,
\end{cases}
\tag{4}
$$

missä x on palkin pituuskoordinaatti ja l on palkin pituus (kuva 2a).



Kuva 2a. Taipuisa palkki epätasaisella jäykällä alustalla.



Kuva 2b. Palkin differentiaalipala.

Palkin differentiaalipalan (kuva 2b) tasapainon mukaan

$$
\begin{aligned}
& p(x) = q(x) + Q'(x) \\
\Rightarrow \; & p(x) = q(x) - EIv^{(4)}(x) \quad ,
\end{aligned}
\tag{5}
$$

missä q(x) on tunnettu palkin kuormitustiheys, Q(x) on leikkausvoima kohdassa x ja EI on taivutusjäykkyys.

Edellä on oletettu, että taipumafunktion v(x) neljäs (ja pienemmän kertaluvun) derivaatta on yksikäsitteinen koko välillä 0,l . Käytännössä näin ei varmastikaan ole asianlaita, koska ulkoinen kuormitus sekä kosketusjännitys saattavat sisältää pistemäisiä voimia. Tämä oletus on perusteltavissa sillä, että kaikki metodit

$$\begin{cases} (-A\underset{\sim}{v} + \underset{\sim}{q})^T(\underset{\sim}{u} - \underset{\sim}{v}) = 0 \quad , \\ -A\underset{\sim}{v} + \underset{\sim}{q} \geq \underset{\sim}{0} \quad , \\ \underset{\sim}{u} - \underset{\sim}{v} \geq \underset{\sim}{0} \quad , \end{cases} \tag{11}$$

missä epäyhtälöt sarakematriiseilla (alaviiva) tarkoittavat, että kaikki alkiot toteuttavat kyseiset epäyhtälöt ja (n-1)x(n-1)-matriisi A on

$$A = \frac{EI}{\Delta x^4} \left| \begin{array}{cccccccccccccc} 5 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & \\ -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & & & & & & & \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & \cdots & & & & & & \\ 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & & & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ & & & & & & & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 \\ & & & & & & & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ & & & & & & & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 \\ & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 5 \end{array} \right| \tag{12}$$

Suorittamalla muuttujan vaihto

$$\underset{\sim}{h} = \underset{\sim}{u} - \underset{\sim}{v} \quad , \tag{13}$$

ja asettamalla ehdot $u(0) = u(1) = u''(0) = u''(1) = 0$ saadaan tehtävä muotoon

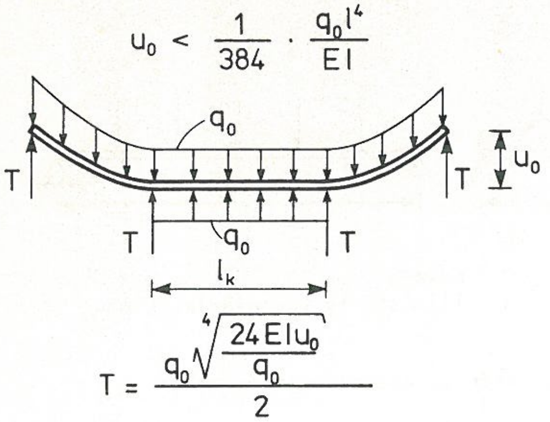
$$\begin{cases} (A\underset{\sim}{h} + \underset{\sim}{q} - A\underset{\sim}{u})^T\underset{\sim}{h} = 0 \quad , \\ A\underset{\sim}{h} + \underset{\sim}{q} - A\underset{\sim}{u} \geq \underset{\sim}{0} \quad , \\ \underset{\sim}{h} \geq \underset{\sim}{0} \quad . \end{cases} \tag{14}$$

Elliot /5/ on esittänyt vastaavan redusoinnin, kun taipuisan palkin tilalla on taipuisa kieli. Tällöin matriisi A on ns. Minkowski matriisi, jolloin on käytettävissä tehokkaita algoritmeja komplementaarisen tehtävän numeeriseen ratkaisemiseen. Italialainen matemaatikko Stampacchia tutki v. 1966-1968 vastaavaa kalvotehtävää (The obstacle problem, ks. Cottle /6/). Artikkelissa /7/ on esitetty kirjallisuusluettelo ja kuvauksia erilaisista algoritmeista komplementaarisen tehtävän suoraan ratkaisuun. Myöhemmin esitetään optimointitehtävän numeerisen ratkaisun yhteydessä yksinkertainen algoritmi, jota sovellettiin seuraavassa esimerkissä. Algoritmi ei ehkä ole yleispätevä, mutta yksinkertaisissa tehtävissä se antoi hyvän tuloksen. Algoritmia sovellettaessa annettiin $A = A$, $\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{h}$, $\underset{\sim}{b} = A\underset{\sim}{u} - \underset{\sim}{q}$ (vrt. myöh.).

NUMEERINEN ESIMERKKI KOMPLEMENTAARISEEN TEHTÄVÄÄN

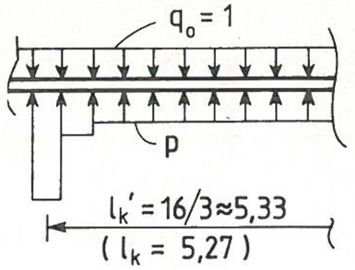
Tarkastellaan kuvan 3 kimmoista palkkia jäykällä alustalla. Alkuvälys u_0 on vakio lähes koko palkin matkalla sekä kuormitustiheys q_0 ja taivutusjäykkyys EI ovat vakioita. Palkkiteorian mukaan on johdettavissa kolme eri tilannetta kuvan 3

Palkkiteorian
vertailuratkaisu



Komplementaarisen tehtävän ratkaisu
differenssimenetelmällä

Pohjapaine, kun $u_0=1$, $l=10$, $q_0=1$
$EI=500/384$, $n=30$



Kuva 4. Esimerkkipalkin tulokset.

REDUSOINTI OPTIMOINTITEHTÄVÄKSI, SIIRTYMÄMENETELMÄ

Palkin potentiaalienergian lauseke on funktionaali

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_0^{\ell} EIv''^2 dx - \int_0^{\ell} q(x)v(x)dx \quad , \tag{17}$$

jolloin funktion $v(x)$ tulee olla C^1-jatkuva. Jos funktio $v(x)$ on komplementaarisen tehtävän (7) reunaehdoin (8) ratkaisu, niin se on myös optimointitehtävän

$$\begin{aligned} &\min J(v) \\ &v \leq u \\ &v(0) = v(l) = 0 \end{aligned} \tag{18}$$

ratkaisu. Optimointi tehtävän (18) yksikäsitteisen ratkaisun olemassaolo todistetaan variationaaliseen epäyhtälöön nojaten Stampacchian ja Lionsin teoreeman /8/ avulla (vrt. /4/).

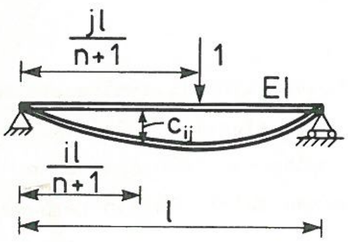
Saatu energialauseke voidaan diskretoida elementtimenetelmän mukaisesti (ks. Strang /9/) käyttäen 3. asteen muotofunktioita ja saattaa näin tietokonekäsittelyyn sopivaan muotoon. Tunnetusti em. menettely johtaa palkilla tarkkaan ratkaisuun, jos kuormitus ja kosketusjännitys ovat pistemäisiä. Tässä tyydytään tähän approksimaatioon. Energialauseke $J(v)$ voidaan tällöin konstruoida

joten $\underset{\sim}{h}$ on myös optimointitehtävän (21) ratkaisu.
Numeeriset tulokset esitetään myöhemmin.

Yhteenvetona todetaan, että optimointitehtävä siirtymämenetelmällä on *potentiaalienergian minimointi rajoitteena läpitunkemattomuusehto*.

REDUSOINTI OPTIMOINTITEHTÄVÄKSI, VOIMAMENETELMÄ

Voimamenetelmään perustuvaa kosketusprobleeman ratkaisua ei tiettävästi ole esitetty kirjallisuudessa tässä muodossa. Joustomatriisi, joka vastaa kuvan 5c voimia saadaan esimerkiksi kääntämällä yhtälön (20) jäykkyysmatriisi K tai ratkaisemalla palkkiteorialla kuvan 6 palkkitehtävä.



Kuva 6. Joustomatriisin alkion geometrinen tulkinta.

Tulos on matriisimuodossa

$$\underset{\sim}{v} = C\underset{\sim}{t} \quad , \tag{25}$$

C on joustomatriisi ja $\underset{\sim}{t}$ on palkin kuormavektori. Symmetrisen nxn-joustomatriisin alkio on

$$c_{ij} = \frac{l^3(1+n-j)\,i\,(2j(n+1) - j\cdot j - i\cdot i)}{6EI(n+1)^4} \quad , \; i<j, \; i,j=1,\ldots,n \; . \tag{26}$$

Palkkiin kohdistuva kuormitus on

$$\underset{\sim}{t} = \underset{\sim}{q} - \underset{\sim}{p} \quad , \tag{27}$$

kun käytetään samoja merkintöjä kuin edellä. Komplementaarinen tehtävä on

$$\begin{cases} [C\underset{\sim}{p} + \underset{\sim}{u} - C\underset{\sim}{q}]^T\underset{\sim}{p} = 0 \quad , \\ \underset{\sim}{p} \geq \underset{\sim}{0} \; , \\ C\underset{\sim}{p} + \underset{\sim}{u} - C\underset{\sim}{q} \geq \underset{\sim}{0} \quad . \end{cases} \tag{28}$$

sarakematriisi $\underset{\sim}{b}$ on tunnettu. Neliömuodon minimointiin löytyy monia tehokkaita algoritmeja (Lokki /16/, Rosen /17/). P. Neittaanmäki on tarkastellut /18/ eri algoritmien ja ohjelmistojen käyttökelpoisuutta samantapaisen tehtävän ratkaisussa. Jos dimensio n on suuri, niin käyttökelpoinen algoritmi on projektioon ja ylirelaksaatioon perustuva iteratiivinen NSOR-algoritmi, jonka matemaattiset perusteet Neittaanmäki on esittänyt /19/.

Koska matriisi A on symmetrinen, niin gradientti $\underset{\sim}{g}$ on

$$\underset{\sim}{g} = A\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{b} \quad . \tag{33}$$

Voidaan todistaa, että vektori $\underset{\sim}{x}^k$ on tehtävän (32) ratkaisu, jos (Bazaraa /20/)

$$\begin{cases} g_i \geq 0, & \forall i = 1,\ldots,p \quad , \\ g_j = 0, & \forall j = p+1,\ldots,n. \end{cases} \tag{34}$$

Matriisin $\underset{\sim}{x}^k$ aktiiviset ehdot on indeksoitu
$i = 1,\ldots,p$ ja muut $j = p+1,\ldots,n$ eli

$$\begin{cases} x_i^k = 0 \quad , & i = 1,\ldots,p \quad , \\ x_j^k > 0 \quad , & j = p+1,\ldots,n. \end{cases} \tag{35}$$

Fysikaalisesti optimaalisuuskriteeri (34) tarkoittaa:

- voimamenetelmässä gradientti $\underset{\sim}{g}$ on välys $\underset{\sim}{h}$
- siirtymämenetelmässä gradientti $\underset{\sim}{g}$ on pohjapaine $\underset{\sim}{p}$.

Seuraavan algoritmin kolmella ensimmäisellä kohdalla päästään käyvän alueen reunalle, josta voidaan jatkaa jollain epälineaarisen optimoinnin algoritmilla.

Algoritmi:

1° Ratkaise lineaarinen yhtälöryhmä $\underset{\sim}{A}x = \underset{\sim}{b}$.
2° Jos $\underset{\sim}{x} \geq \underset{\sim}{0}$, niin ratkaisu on löytynyt.
3° Aseta $\min \{x_i \mid i = 1,\ldots,n\} = 0$.
4° Palaa kohtaan 1°.

Tässä lasketussa esimerkissä osoittautui, että optimikohta löytyi suoraan tällä algoritmilla. Käyttökelpoisia tuloksia saatiin, kun palkki jaettiin 20 tasapitkään osaväliin. Kuvissa 7 ja 8 on esitetty laskennan tulokset, kun palkki on jaettu 30 tasapitkään osaväliin. Kuvissa on esitetty palkkiteorian vertailuarvot katkoviivoilla.

TULOSTEN TARKASTELUA

Dundurs ja Keer /22/ ovat tarkastelleet vastaavaa laattaprobleemaa. He käyttivät ratkaisumenetelmänä analyyttistä laattateoriaa ja kosketusprobleemassa (vajonneilla tuilla) redusointia integraaliyhtälöksi, joka ratkaistiin numeerisesti. Laatalle tulee irtoamiskohtaan em. tukireaktiota T vastaava pistevoima. Tämä pistevoima aiheuttaa luonnollisesti hankaluuksia voimamenetelmän numeerisessa ratkaisussa, mutta palkkiesimerkissä tulokset olivat silti hyviä. Pohjapainejakauman ja palkin siirtymätilan arviot ovat aivan käyttökelpoiset. Voima- ja siirtymämenetelmä johtavat tässä täysin samaan lopputulokseen. Tukivoimaksi saatiin likiarvo 1,14 (n = 29), kun palkkiteorian mukainen vertailuarvo on 1,18.

Vaikkakin komplementaarisen tehtävän sekä optimointitehtävän käyttö kosketusprobleeman ratkaisussa on verrattain uusi keksintö, niin matematiikassa on näiden tehtävien numeerista ratkaisua tutkittu laajasti ja perusteellisesti (/5/, /7/, /16/, /18/, /22/). Vähemmän kirjallisuudessa on tarkasteltu kosketuskohdan staattisten suureiden vaikutusta koko rakenteen käyttäytymiseen. Näistä mainittakoon mm. holvivaikutus palkeilla ja laatoilla (Parland /23/, Schlaich /24/, Heinisuo /25/). Käytännön liitoksissa (holkkiliitos, pulttiliitos) esiintyy usein kosketusprobleemoita, joiden käsittely on välttämätöntä liitoksien turvallista mitoitusta varten. Tämän vuoksi voitaneen suositella ratkaisumenetelmäksi sekä voima- että siirtymämenetelmää. Edellä lasketussa esimerkissä jäykkä alusta diskretoitiin tasavälein sijoitetuilla painumattomilla tuilla. Jos voimamenetelmässä voidaan varmistua siitä, että vetoa ei esiinny saumassa myöskään tukien välillä tai siirtymämenetelmässä välys on postiivinen myös tukien välillä, niin rakenteellinen suure jäykkyys D saadaan rajatuksi sekä ylä- että alapuolelta /3/.

Lasketun esimerkin perusteella laskumenetelmäksi voidaan suositella voima- tai siirtymämenetelmää riippuen siitä kumpi on helpommin laskettavissa: jäykkyys- vai joustomatriisi. Joustomatriisin saattaa löytää kirjallisuudesta analyyttisessä muodossa, koska voimamenetelmä palautetaan tietyn perusrakenteen (tässä yksinkertainen palkki) statiikkaan.

LOPPULAUSE

Kontinuumimekaniikassa on tunnettu jo pitkään (Parland /3/) kolme em. periaatetta kosketusprobleeman ratkaisussa: komplementaarinen tehtävä, potentiaalienergian ja komplementaarisen energian minimointi ao. rajoitteineen. Kaksi ensimmäistä on puettu diskretoituun muotoon aikaisemmin. Tässä artikkelissa on esitetty komplementaarisen energian diskretointi ja pyritty havainnollistamaan

/10/ Gallagher, R.H., Finite Element Analysis, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1975.

/11/ Conry, T.F., Seireg, A., A Mathematical Programming Method for Design of Elastic Bodies in Contact, J. Appl. Mech., 387, 1971.

/12/ Haug, E., Chand, R., Pan, K., Multibody Elastic Contact Analysis by Quadratic Programming, J. Optimization Theory and Apll., Vol. 20, 1977.

/13/ Wilson, E.A., Parsons, B., Finite element analysis of elastic contact problems using differential displacements, Int. J. Num. Methd. Engng., 2, 1970.

/14/ Oden, J.T., Kikuchi, N., Finite element methods for constrained problems in elasticity, Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 18, 1982.

/15/ Tseng, J., Olson, M.D., The mixed finite element method applied to two-dimensional elastic contact problems, Int. J. Num. Meth. Engng, 17, 1981.

/16/ Lokki, O., Matemaattinen ohjelmointi 1, Ota DATA C 19, TKY/Otapaino, Otaniemi, 1973.

/17/ Rosen, J.B., The Gradient Projection Method for Nonlinear Programming, Society for Industrial and Applied Mathematics, Vol. 8, 1960 and Vol. 9, 1961.

/18/ Neittaanmäki, P., Tiihonen, T., Optimal Shape Design of Systems governed by a unilateral boundary value problem, Research Report 4, Lappeenranta University of Technology, Lappeenranta, 1982.

/19/ Haslinger, J., Neittaanmäki P., On the existence of optimal shape in contact problems, Preprint 23, University of Jyväskylä, Jyväskylä 1983.

/20/ Bazaraa, M.S., Shetty, C.M., Nonlinear Programming, Theory and Algorithms. John Wiley & Sons. New York, 1979.

/21/ Dundurs, J., Klattikomol, K., Keer, L.M., Contact Between Plates and Sagged Supports, Journal of the Engineering Mechanics Division, No 2, 1974.

/22/ Mangasarian, O.L., Solution of Symmetric Linear Complementarity Problems by Iterative Methods, Journal of Optimization Theory and Applications: Vol. 22, No 4, 1977.

/23/ Parland, H., On the linear elastic theory of the dome action in reinforced concrete plates, In: Proc. Symp. World Congress on Shell and Spatial Structures, Vol. 3, Madrid, 1979.

/24/ Schlaich, J., Dic Gewölbewirkung in durchlaufenden Stahlbetonplatten, Technischen Hochschule Stuttgart, 1963.

/25/ Heinisuo, M., Vetoakestämättömästi tuetun kimmoisen pilarin nurjahdus, Suomen I Mekaniikkapäivät, Oulun Yliopisto, Oulu, 1982.

Markku Heinisuo, tekn.lis., Tampereen teknillinen korkeakoulu, Rakennustekniikan osasto