

# SIIRTYMIEN MÄÄRITTÄMINEN MUODONMUUTOKSISTA

Jukka Aalto ja  
Eero-Matti Salonen

Rakenteiden Mekaniikka, Vol. 16  
No. 4, 1983, s. 1...15

**YHTEENVETO:** Artikkelissa selostetaan kirjoittajien kehittämää pienimmän neliön keinoon perustuvaa menettelyä määrittää annettuja muodonmuutoksia vastaavat siirtymät. Käytännössä tarvittava diskretointi suoritetaan elementtimenetelmän avulla. Kolmen sovellutusesimerkin yhteydessä saatuja tuloksia esitellään. Menettely on toiminut kaikissa lasketuissa tapauksissa moitteettomasti. Likimääräisten, yhteensopivuusehtoja rikkovien muodonmuutosten esiintyminen ei ole aiheuttanut vaikeuksia.

## JOHDANTO

Tarkastellaan esityksen yksinkertaistamiseksi aluksi vain kaksidimensioista tapausta karteesisessa suorakulmaisessa  $xy$ -koordinaatistossa. Siirtymäkomponenttien  $u$  ja  $v$  ja muodonmuutoskomponenttien  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  ja  $\gamma_{xy}$  välinen yhteys on tunnetusti

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x(u,v) &\equiv \frac{\partial u}{\partial x} = \bar{\epsilon}_x, \\ \epsilon_y(u,v) &\equiv \frac{\partial v}{\partial y} = \bar{\epsilon}_y, \\ \gamma_{xy}(u,v) &\equiv \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \bar{\gamma}_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Merkinnät  $\bar{\epsilon}_x$ ,  $\bar{\epsilon}_y$  ja  $\bar{\gamma}_{xy}$  tarkoittavat tunnetuksi ajateltuja muodonmuutoskomponentteja tietyssä alueessa  $A$ . Tehtävänä on määrittää vastaavat siirtymäkomponentit.

Tällainen asetelma syntyy mm. silloin, kun rakenne on ensin analysoitu jollain voimamenetelmällä kuten esimerkiksi Airyn jännitysfunktiota apuna käyttäen. Lasketuista jännityksistä saadaan ainakin kimmoisen aineen tapauksessa yleistetyn Hooken lain perusteella helposti vastaavat muodonmuutokset. Siirtymät on tämän jälkeen määritettävä yhtälöiden (1) avulla.

Kirjallisuudessa on esitetty ainakin kaksi tapaa edetä.

Ensimmäinen tapa perustuu differentiaaliyhtälöiden (1) tarkkaan ratkaisemiseen. Jos muodonmuutosten lausekkeet ovat kohtuullisen yksinkertaisia - esimerkiksi  $x:n$

ja  $y$ :n polynomeja - ratkaisu löytyy periaatteessa helposti. Käsittely synnyttää integroimisvakioita, jotka eivät tarkemmin sanoen ole vakioita vaan funktioita. Integroimisvakioiden määrittäminen johtaa käytännössä melko työläisiin laskelmiin. Menettelyä on kuvailtu mm. lähteissä /1, s. 325...329/ ja /2, s. 35...39/.

Toinen mahdollinen tapa edetä perustuu siirtymien laskemiseen tiettyjen viivaintegraalien avulla. Tarvittavat lausekkeet on esitetty mm. lähteessä /3/.

Kummankin esitetyn tavan yhteydessä syntyy ongelmia, mikäli muodonmuutokset on saatu likimääräisesti. Tällöin ei nimittäin ole yleensä olemassa funktioita  $u$  ja  $v$ , jotka toteuttaisivat kaikkialla yhtälöt (1). Vastaavasti viivaintegraaleja käytettäessä saadut siirtymien arvot tietyssä pisteessä tulevat riippumaan valitusta integroimistiestä.

## TEORIA

Tässä artikkelissa selostetaan edellisistä tavoista poikkeavaa mahdollisuutta määrittää siirtymät. Sovelletaan nimittäin yksinkertaisesti pienimmän neliösumman eli lyhyemmin pienimmän neliön keinoa.

Systeemi (1) on ns. ylimäärätty (engl. overdetermined) osittaisdifferentiaaliyhtälöryhmä siinä mielessä, että yhtälöitä (3 kpl) on enemmän kuin tuntemattomia funktioita (2 kpl). Diskreettien algebrallisten ylimäärättyjen yhtälösystemien käsittely tapahtuu tavallisesti pienimmän neliön keinon avulla. Täten muodostetaan tässä analogisesti seuraava pienimmän neliön lauseke

$$\Pi(u,v) = \frac{1}{2} \int_A \left[ (\epsilon_x(u,v) - \bar{\epsilon}_x)^2 + (\epsilon_y(u,v) - \bar{\epsilon}_y)^2 + \frac{1}{2} (\gamma_{xy}(u,v) - \bar{\gamma}_{xy})^2 \right] dA. \quad (2)$$

Integraalin edessä oleva kerroin  $1/2$  on epäoleellinen ja on mukana mukavuussyistä. Yhtälösystemiin (1) liittyviä kolmea jäännöstä (engl. residual) on painotettu luvuilla  $1, 1$  ja  $1/2$ . Tämä valinta ei ole ainoa mahdollisuus, mutta se on perusteltavissa sikäli, että tällöin lauseke (2) säilyy invarianttina koordinaatiston kierron suhteen. Tähän palataan tarkemmin artikkelin lopussa.

Vaaditaan, että lausekkeen (2) tulee saada minimiarvo. Vaatimuksesta voidaan johtaa variaatiolaskennan keinoin seuraavat ns. Eulerin yhtälöt

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \nabla^2 u + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= \frac{\partial \bar{\epsilon}_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{\gamma}_{xy}}{\partial y}, \\ \frac{1}{2} \nabla^2 v + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{\gamma}_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\epsilon}_y}{\partial y} \end{aligned} \right\} \text{A:ssa} \quad (3)$$

ja ns. luonnolliset reunaehdot

$$\left. \begin{aligned} n_x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} n_y \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) &= n_x \bar{\epsilon}_x + \frac{1}{2} n_y \bar{\gamma}_{xy} , \\ \frac{1}{2} n_x \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + n_y \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{1}{2} n_x \bar{\gamma}_{xy} + n_y \bar{\epsilon}_y . \end{aligned} \right\} \text{ s:llä} \quad (4)$$

Edellä  $\nabla^2$  on Laplacen operaattori ja  $n_x$  ja  $n_y$  ovat alueen reunan  $s$  ulkoisen yksikkönormaalivektorin komponentit.

Yhtälöiden (1) esittämä probleema on siis muunnettu yhtälöiden (3) ja (4) esittämäksi probleemaksi. Oleellista on, että ylimäärätyillä systeemillä (1) ei ole ratkaisua mielivaltaisille oikeiden puolien  $\bar{\epsilon}_x$ ,  $\bar{\epsilon}_y$  ja  $\bar{\gamma}_{xy}$  valinnoille, vaan muodonmuutosten tulee tunnetusti toteuttaa tiettyjä ehtoja – tasotapauksessa yksi ehto

$$\frac{\partial^2 \bar{\epsilon}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{\epsilon}_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \bar{\gamma}_{xy}}{\partial x \partial y} , \quad (5)$$

joita nimitetään yhteensopivuus- eli kompatibiliteettiehtoiksi. Likimenetelmillä saadut muodonmuutokset eivät yleensä toteuta yhteensopivuusehtoja ja joudutaan vaikeuksiin.

Kenttäyhtälöiden (3) esittämä systeemi ei ole ylimäärätty, joten yhtälöiden oikeille puolille ei tarvitse asettaa mitään erityisiä ehtoja. Täten yhtälöt hyväksyvät myös likimenetelmillä saadun ristiriitaisen muodonmuutoksen.

Pienimmän neliön keinoahan käytetään tunnetusti nimenomaan esimerkiksi kokeellisesti saadun ja havaintovirheistä johtuen ristiriitaisen informaation käsittelyyn. Tässä ehdotetussa pienimmän neliön keinon sovellutuksessa on selvästi kyse samantyyppisestä asiasta.

Yhtälöt (3) ja (4) on esitetty edellä vain teoreettisesti mahdollisena ratkaisusasetelmana. Käytännössä on luonnollisesti siirryttävä diskreettiin käsittelyyn ja tällöin diskretointi kohdistetaan parhaiten suoraan lausekkeeseen (2).

Approksimoidaan funktioita  $u$  ja  $v$  elementtimenetelmällä käyttäen  $C^0$ -jatkovaa esitystä. Täten

$$\left. \begin{aligned} u &\approx \hat{u} = \sum N_j u_j , \\ v &\approx \hat{v} = \sum N_j v_j , \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

jossa  $N_j$ :t ovat muotofunktioita ja  $u_j$ :t ja  $v_j$ :t solmusiirtymiä. Esitysten (6) sijoitus lausekkeeseen (2) johtaa tavanomaiseen tapaan lineaariseen symmetriseen

yhtälöryhmään, jonka tyypilliset yhtälöt ovat

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial u_i} \\ \frac{\partial \hat{\Pi}}{\partial v_i} \end{Bmatrix} \equiv \sum_j \begin{bmatrix} (K_{11})_{ij} & (K_{12})_{ij} \\ (K_{21})_{ij} & (K_{22})_{ij} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_j \\ v_j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} (P_1)_i \\ (P_2)_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} . \quad (7)$$

Tässä

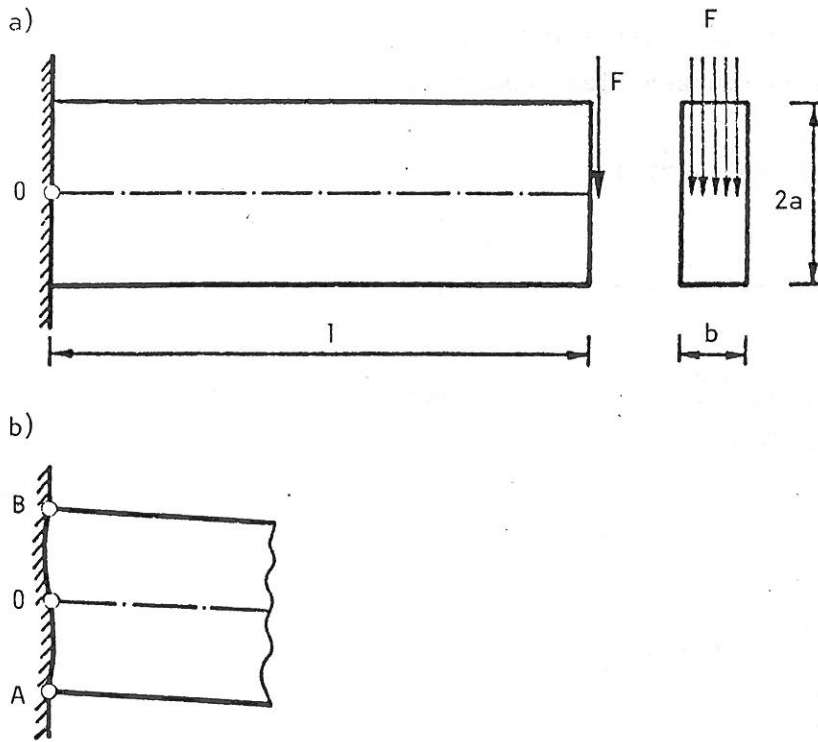
$$\left. \begin{aligned} (K_{11})_{ij} &= \int_A \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dA , \\ (K_{12})_{ij} &= \int_A \frac{1}{2} \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial x} dA , \\ (K_{21})_{ij} &= \int_A \frac{1}{2} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial y} dA , \\ (K_{22})_{ij} &= \int_A \left( \frac{1}{2} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dA , \\ (P_1)_i &= - \int_A \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \bar{\epsilon}_x + \frac{1}{2} \frac{\partial N_i}{\partial y} \bar{\gamma}_{xy} \right) dA \\ (P_2)_i &= - \int_A \left( \frac{\partial N_i}{\partial y} \bar{\epsilon}_y + \frac{1}{2} \frac{\partial N_i}{\partial x} \bar{\gamma}_{xy} \right) dA . \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Yhtälösystemiä ratkaistaessa on lisäksi annettava vähintään niin monta  $u$ :n ja  $v$ :n solmuarvoa, että ko. kappaleen jäykän kappaleen liikkeet ovat estetyt.

Artikkelin kirjoittajat eivät ole nähneet alan kirjallisuudessa viitauksia edellä esitetyn tapaiseen pienimmän neliön keinoon perustuvaan siirtymien määrittämiseen. Toisaalta ajatus on niin ilmeinen, että olisi outoa, jollei sitä olisi jo joissain yhteyksissä sovellettu.

#### ENSIMMÄINEN SOVELLUTUS

Tarkastellaan kuvan 1 (a) esittämää levymäisen kimmoisen homogeenisen isotrooppisen palkin taivutusta. Lähteessä /1, s. 325...329/ on esitetty ratkaisuun liittyvä Airyn jännitysfunktio



Kuva 1. (a) Kimmoinen palkki. (b) Palkin pään tuenta.

$$\Phi = -\frac{F}{4a^3b} [(1-x)y^3 + 3a^2xy] \quad (9)$$

vastaavat jännityskomponentit

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -\frac{3F}{2a^3b}(1-x)y, \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0, \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = \frac{3F}{4a^3b}(a^2 - y^2) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

sekä niistä johtuvat muodonmuutoskomponentit

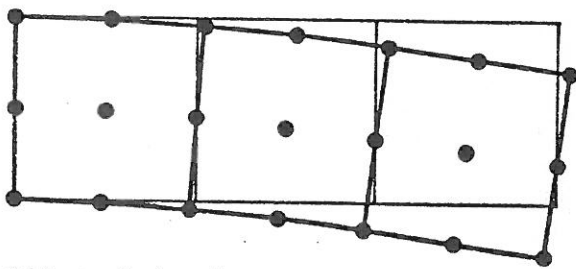
$$\left. \begin{aligned} \bar{\epsilon}_x &= -\frac{3F}{2Ea^3b}(1-x)y, \\ \bar{\epsilon}_y &= \frac{3\nu F}{2Ea^3b}(1-x)y, \\ \bar{\gamma}_{xy} &= \frac{3F}{4Ga^3b}(a^2 - y^2). \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Lähteessä /1/ on lisäksi johdettu vastaavien siirtymien lausekkeet erityisesti vielä kuvan 1 (b) esittämien reunaehto- jen tapauksessa:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{F}{4Ea^3b} [(2+\nu)y(a^2-y^2) - 3(2lx-x^2)y] \\ v &= \frac{F}{4Ea^3b} [3\nu(1-x)y^2 + (3lx^2-x^3) + (4+5\nu)a^2x] . \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

(Huomautettakoon, että vastaavassa lähteen /1/ kaavassa (400) on  $\nu$ :n lausekkeessa  $y$ :n eksponenttia koskeva painovirhe.)

Esimerkki on laskettu tapauksessa  $l = 6a$  ja  $\nu = 0,3$  9-solmuisilla Lagrange-neliöelementeillä. On käytetty harvempaa  $1 \times 3$  elementtiverkkoa ja tiheämpää



Siirtymämittakaava

$$\left| \right| = 100 \cdot \frac{F}{Eb}$$

Kuva 2. Palkin siirtymät.

2 x 6 verkkoa. Kuvaan 2 on hahmoteltu harvemmalla verkolla saatu rakenteen liioiteltu geometria siirtymien tapahduttua.

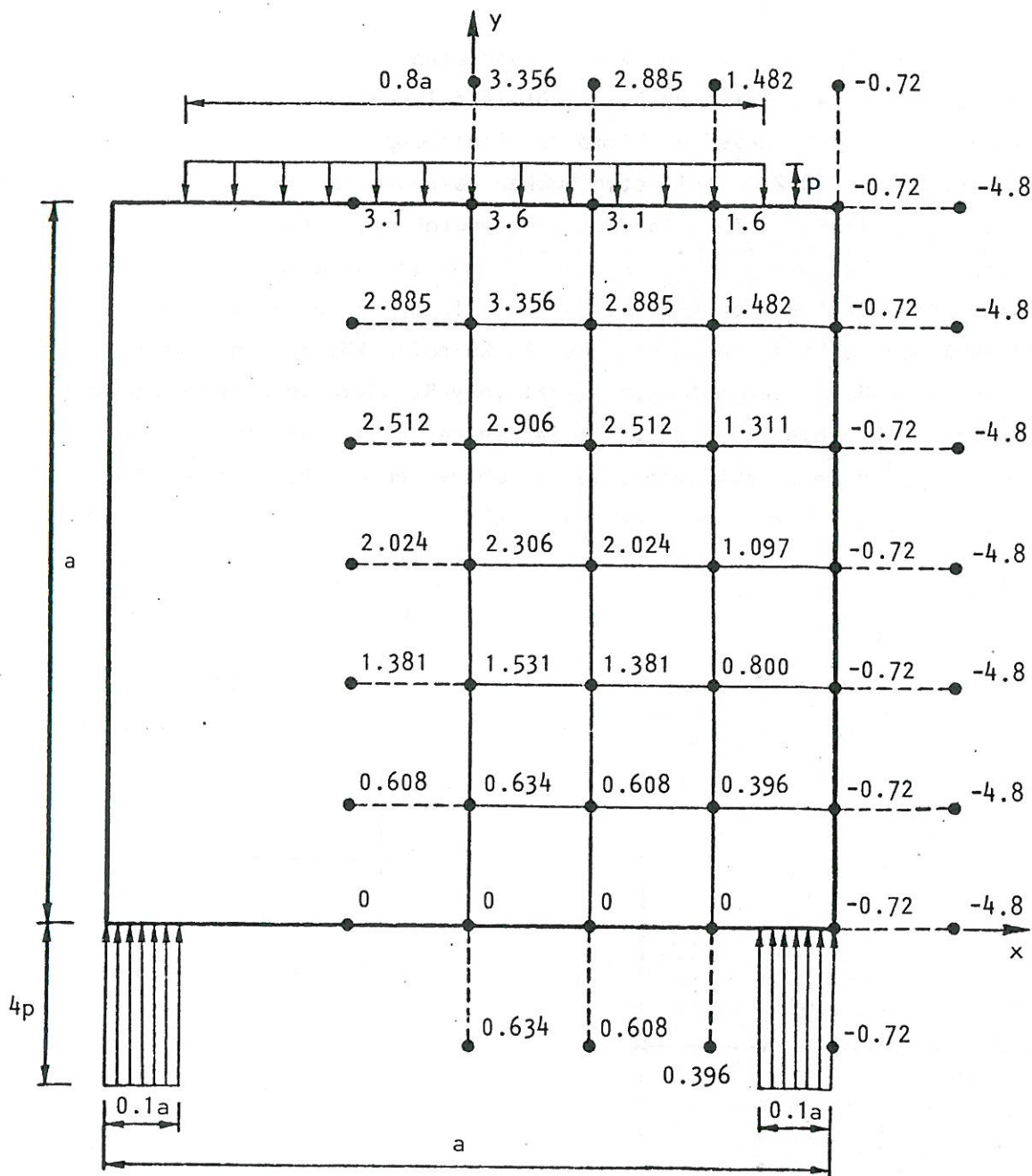
Tarkan ratkaisun mukainen taipuma palkin päässä akselilla  $y = 0$  on  $116,25 F/(Eb)$ . Harvemmalla verkolla saatiin tulos  $116,10 F/(Eb)$  ja tiheämällä tulos  $116,13 F/(Eb)$ . Suhteelliset virheet ovat vastaavasti  $0,13 \%$  ja  $0,10 \%$ . Esimerkki laskettiin vertailun

vuoksi myös ottaen lausekkeen (2) painojen  $1,1$  ja  $1/2$  sijasta vastaavasti painot  $1,1$  ja  $1$ . Äskeisten suhteellisten virheiden sijasta saatiin luvut  $0,24 \%$  ja  $0,15 \%$ .

## TOINEN SOVELLUTUS

Edellisessä esimerkissä muodonmuutokset toteuttavat yhteensopivuusehdon (5), joten vastaavat tarkat siirtymät ovat olemassa ja lisäksi niiden lausekkeet tunnetaan.

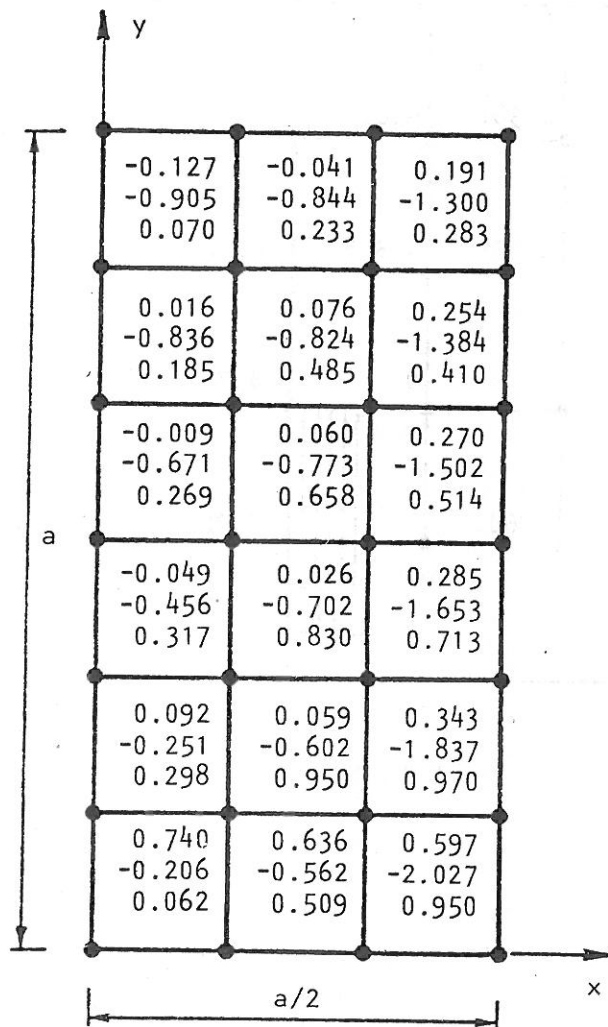
Nyt käsiteltävä sovellutus on valittu tarkoituksella siten, että yhteensopivuusehtoa rikotaan. Lähteessä /2, s. 483...490/ on tarkasteltu Airyn jännitysfunktiota koskevan ns. biharmonisen differentiaaliyhtälön  $\nabla^4 \phi = 0$  ratkaisemista differenssimenetelmän avulla kuvan 3 esittämän levyn jännitystilän määrittämiseksi. Kuvassa näkyvät lähteessä /2/ lopuksi saadut jännitysfunktion arvot valitun differenssihilan hilapisteissä. Symmetrian vuoksi riittää, kun tarkastellaan vain



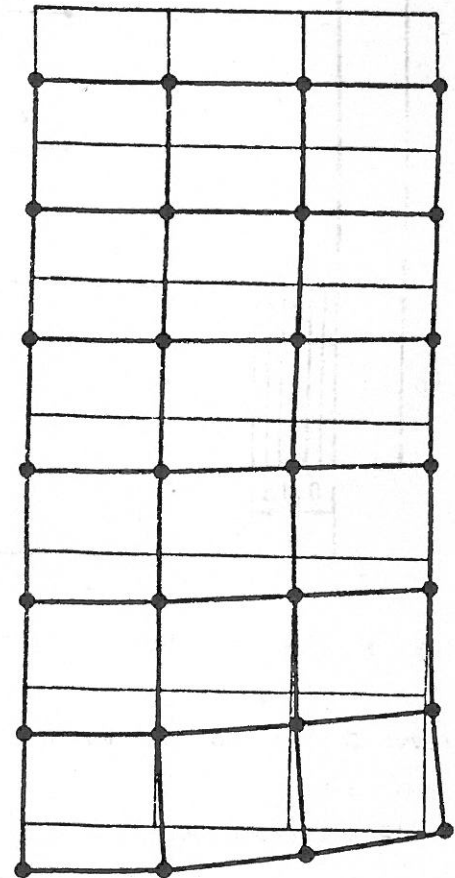
$\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  ja  $\tau_{xy}$  on ajateltu sitten vallitsevan aina kunkin hilaneliön alueella. Tässä on tarpeetonta esittää yksityiskohtaisia laskelmia.

Otaksutaan, että kyseessä on kimmainen isotrooppinen homogeeninen levy, jonka Poissonin vakio  $\nu = 0,2$ . Yleistetyn Hooken lain avulla saadaan kuvassa 4 esitetyt laskettuja jännityksiä vastaavat muodonmuutokset. Otaksutaan siis, että nämä muodonmuutoskomponentit  $\bar{\epsilon}_x$ ,  $\bar{\epsilon}_y$  ja  $\bar{\gamma}_{xy}$  ovat vakioita kussakin hilaneliössä. Kuvassa esiintyvät luvut on kerrottava termillä  $p/E$  oikeiden arvojen saamiseksi.

Siirtymät on ratkaistu pienimmän neliön keinolla käyttäen nelisolmuisia nelikulmioelementtejä, joiden solmujen paikat yhtyvät käytetyn differenssiverkon hilalasteiden paikkoihin levyn alueella ja sen reunalla. Siirtymille on valittu tukiehto  $v(a/2, 0) = 0$  sekä symmetriasta johtuva ehto  $u(0, y) = 0$ . Kuvassa 5 on esitetty saatuja siirtymiä vastaava rakenteen uusi liioiteltu geometria. Tulos



Kuva 4. Levyn muodonmuutokset. Kussakin hilaneliössä ylin luku  $\hat{=}$   $\bar{\epsilon}_x$ , keskimäinen luku  $\hat{=}$   $\bar{\epsilon}_y$ , alin luku  $\hat{=}$   $\bar{\gamma}_{xy}$ .



Siirtymämittakaava

$$\text{---} = 1 \cdot \frac{pa}{E}$$

Kuva 5. Levyn siirtymät.

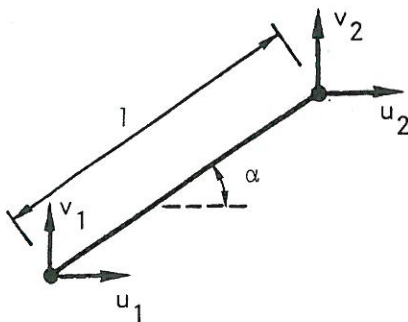


on ainakin yleispiirteiltään sopusoinnussa intuition ja käsikirjoissa esitettyjen korkeita vapaasti tuettuja palkkeja koskevien tietojen kanssa. Suurimmat muodonmuutosgradientit ovat keskittyneet levyn alareunan läheisyyteen ja siirtymäjakama poikkeaa radikaalisti teknillisen taivutusteorian mukaisesta tuloksesta.

On mielenkiintoista todeta seuraavaa. Jos jokaisessa elementissä suureilla  $\bar{\epsilon}_x$ ,  $\bar{\epsilon}_y$  ja  $\bar{\gamma}_{xy}$  ajatellaan olevan tehtävän asettelun mukaisesti vakioarvot, kukin alkuaan neliön muotoinen alue muuttuu täsmälleen suunnikkaaksi. Näistä suunnikkaista koottua palapeliä ei saada enää kasaan ilman rakoja tai päällekkäisyyksiä; toisin sanoen otaksuttu muodonmuutoskenttä on ristiriitainen eikä täytä yhteensopivuusehtoa. Pienimmän neliön keinon soveltaminen antaa silti täysin mielekkään siirtymäkentän.

### KOLMAS SOVELLUTUS

Poiketaan hieman edellä esitetystä teoriasta ja siirrytään jo valmiiksi diskreetin rakenteen – taseoristikon – käsittelyyn. Kuva 6 esittää tyypillistä ristikon sauvaa.



Päiden siirtymäkomponentit  $u_1, v_1, u_2$  ja  $v_2$  kuvaavat sauvan siirtymätilan ja venymä  $\Delta l$  (tai suhteellinen venymä  $\Delta l/l$ ) kuvaa sauvan muodonmuostilan. Sauvan siirtymä-venymäyhteys (kaavojen (1) vastine) on

$$\Delta l(u_1, v_1, u_2, v_2) = \overline{\Delta l}, \quad (13)$$

jossa funktio  $\Delta l$  on tunnetusti muotoa

$$\Delta l = -c u_1 - s v_1 + c u_2 + s v_2. \quad (14)$$

Kuva 6. Taseoristikon tyypillinen sauva.

Tässä on käytetty lyhennysmerkintöjä  $c = \cos \alpha$ ,  $s = \sin \alpha$  ja merkintä  $\overline{\Delta l}$  viittaa tunnetuksi ajateltuun venymän arvoon.

Olkoon tietyn ristikon sauvojen venymät  $\overline{\Delta l}^e$  annetut. Tehtävänä on määrittää ristikon nurkkien siirtymät. Toimitaan vastaavasti kuin kontinuumin yhteydessä. Muodostetaan lausekkeen (2) vastine ristikolle:

$$\Pi(u_1, v_1, u_2, \dots, u_n, v_n) = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^m (\Delta l^e - \overline{\Delta l}^e)^2. \quad (15)$$

Tässä  $n$  on ristikon nurkkien lukumäärä ja  $m$  on sauvojen lukumäärä. Tyypillisen sauvan  $e$  osuus pienimmän neliön lausekkeesta (15) on

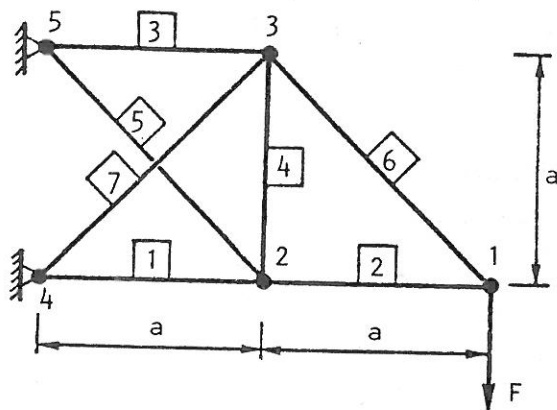
$$\Pi^e = \frac{1}{2} (\Delta l^e - \overline{\Delta l^e})^2. \quad (16)$$

Samoin tyypillisen sauvan antamat osuudet lopulliseen lausekkeen (15) minimiehdosta johtuvaan yhtälöryhmään tulevat olemaan

$$\begin{Bmatrix} \partial \Pi^e / \partial u_1 \\ \partial \Pi^e / \partial v_1 \\ \partial \Pi^e / \partial u_2 \\ \partial \Pi^e / \partial v_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} c \\ s \\ -c \\ -s \end{Bmatrix} \overline{\Delta l^e}. \quad (17)$$

Yhtälöryhmä voidaan koota sauvojen antamista osuuksista elementtimenetelmästä tuttuun tapaan.

Tarkastellaan nyt sovellutuksena kuvan 7 esittämää yksinkertaista kimmoista



Kuva 7. Kimmoinen tasoristikko.

ristikkoa /4/. Kuvasta näkyy käytetty nurkkien ja sauvojen numerointi. Taulukko 1 antaa tiedot sauvojen mitoista ja kimmosista ominaisuuksista sekä vielä saadut sauvavoimien ja vastaavien venymien arvot. Suure  $EA_0$  on vetojäykkyyden referenssiarvo.

Sauvavoimat on laskettu otaksuen, että ko. kerran staattisesti määräämättömässä systeemissä ei vallitse sisäisiä voimia, kun  $F = 0$ . Ajatellaan, että sauvavoimat on saatu voimamenetelmän avulla ja määritetään annettuihin vastaaviin venymiin liittyvät siirtymät.

Taulukko 1. Eräitä sauvoihin liittyviä arvoja.

Sauva	$l/a$	$c$	$s$	$EA/EA_0$	$S/F$	$\overline{\Delta l}/(Fa/EA_0)$
1	1	1	0	1	-1,43	-1,43
2	1	1	0	1	-1,00	-1,00
3	1	1	0	1	1,57	1,57
4	1	0	1	1	-0,43	-0,43
5	$\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	0,61	0,61
6	$\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1,41	1,41
7	$\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	-0,81	-0,81

Yhtälöt (13) ovat

$$\begin{array}{l}
 \text{Sauva 1} \\
 \text{Sauva 2} \\
 \text{Sauva 3} \\
 \text{Sauva 4} \\
 \text{Sauva 5} \\
 \text{Sauva 6} \\
 \text{Sauva 7}
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\
 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 u_1 \\
 v_1 \\
 u_2 \\
 v_2 \\
 u_3 \\
 v_3 \\
 v_3
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 -1,43 \\
 -1,00 \\
 1,57 \\
 -0,43 \\
 0,61 \\
 1,41 \\
 -0,81
 \end{bmatrix}
 \frac{Fa}{EA_0} \quad (18)$$

Tässä on jo otettu huomioon tukiehdot

$$u_4 = v_4 = u_5 = v_5 = 0 \quad (19)$$

Yhtälösystemi (18) on ylimäärätty; seitsemän yhtälöä mutta vain kuusi tuntematonta. Tekemällä ristikko staattisesti määrättyksi ajattelemalla joku sauvoista 1, 4, 3, 5 tai 7 poistetuksi saadaan kuitenkin aina systeemi, jossa on yhtä monta yhtälöä kuin tuntematonta ja jolla on yksikäsitteinen ratkaisu. On nimittäin tunnettua, että staattisesti määrätyn ristikon sauvojen venymien antaminen riittää sen nurkkien siirtymien määrittämiseen. Tähän tehtäväänhän käytetään klassillisesti ns. yksikkövoimamenettelyä /1, s. 415...417/ (engl. dummy unit - load method). Kutakin siirtymäkomponenttia laskettaessa ajatellaan tällöin vastaavaan nurkkaan ko. komponentin suuntainen yksikkövoima. Tämän jälkeen määritetään voimaa vastaavat sauvavoimat ja sovelletaan virtuaalisen työn periaatetta, joka antaa sitten siirtymäkomponentin arvon. (Yksikkövoimamenettely on luonteeltaan lähellä alussa kontinuumin yhteydessä mainittua tapaa laskea siirtymiä viivaintegraalien avulla.) Tietokoneiden aikakaudella tämä menettely on ehkä menettänyt osittain merkitystään, koska kaikki siirtymäkomponentit voidaan määrittää yhtä hyvin samalla kertaa ratkaisemalla ko. lineaarinen yhtälöryhmä esimerkiksi jollain tavanomaisella epäsymmetrisen lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisuohjelmalla. Näin toimimalla saadaan kaikilla valinnoilla synnytyistä systeemeistä samat tulokset

$$\left. \begin{array}{l}
 u_1 = -2,43 Fa/(EA_0) , \quad v_1 = -8,71 Fa/(EA_0) , \\
 u_2 = -1,43 Fa/(EA_0) , \quad v_2 = -2,29 Fa/(EA_0) , \\
 u_3 = 1,57 Fa/(EA_0) , \quad v_3 = -2,71 Fa/(EA_0) .
 \end{array} \right\} \quad (20)$$

Koska annetut venymät ovat tässä pyöristysvirheitä lukuunottamatta yhteensopivia, tulokset (20) tulevat myös pyöristysvirheitä lukuunottamatta samoiksi.

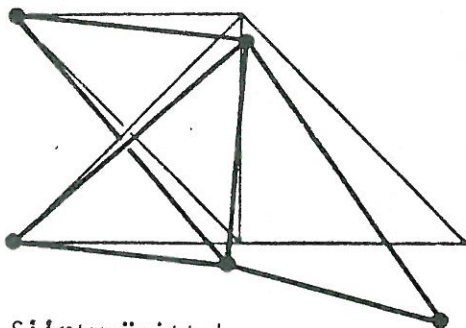
Voitaisiin kuitenkin ajatella vastakohtana tilannetta, jossa ristikon sauvojen venymät olisi saatu esimerkiksi kokeellisesti venymäliuskojen avulla ja mittaauksissa esiintyisi huomattavia havaintovirheitä. Tällöin tulokset (20) riippuisivat oleellisesti valitusta staattisesta perusmuodosta.

Pienimmän neliön keino antaisi kuitenkin yksikäsitteisen tuloksen. Jos olisi perusteita pitää joitakin mittauksia toisia tarkempina, tämä voitaisiin ottaa huomioon lausekkeessa (15) painottamalla eri termejä eri tavoin. Esimerkiksi jos jossain sauvassa olisi kaksi mittauspistettä ja muissa vain yksi, voitaisiin ko. sauva ottaa kaksi kertaa mukaan summaan (15) jne.

Soveltamalla pienimmän neliön keinoa taulukon 1 esittämässä tapauksessa saadaan kaavoja (17) apuna käyttäen symmetrinen yhtälöryhmä

$$\begin{array}{l}
 \text{Nurkka 1} \\
 \text{Nurkka 2} \\
 \text{Nurkka 3}
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l}
 \left[ \begin{array}{cccccc}
 1,5 & -0,5 & -1 & 0 & -0,5 & 0,5 \\
 -0,5 & 0,5 & 0 & 0 & 0,5 & -0,5 \\
 -1 & 0 & 2,5 & -0,5 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -0,5 & 1,5 & 0 & -1 \\
 -0,5 & 0,5 & 0 & 0 & 2 & 0 \\
 0,5 & -0,5 & 0 & -1 & 0 & 2
 \end{array} \right]
 \begin{array}{l}
 u_1 \\
 v_1 \\
 u_2 \\
 v_2 \\
 u_3 \\
 v_3
 \end{array}
 \right\}
 =
 \left\{ \begin{array}{l}
 0,00 \\
 -1,00 \\
 0,00 \\
 0,00 \\
 0,00 \\
 0,00
 \end{array} \right\}
 \frac{F_a}{EA_0} \quad (21)$$

Yhtälöitä muodostettaessa on otettu lisäksi huomioon ehdot (19). Ratkaisu on luonnollisesti jälleen lausekkeiden (20) mukainen, koska venymät ovat yhteensopivia. Ristikon siirtynyt geometria on esitetty liioiteltuna kuvassa 8.



Siirtymämittakaava

$$\left| \text{---} \right| = 10 \cdot \frac{F_a}{EA_0}$$

Kuva 8. Ristikon siirtymät.

HUOMAUTUKSIA

Tarkastellaan vielä lisää kolmatta sovellutusta. Alkuvenymän  $\overline{\Delta l^e}$  omaavan kimmoisen tasajäykän (vetojäykkyys =  $E^e A^e$ ) sauvan muodonmuutosenergian eli kimmoenergian  $U^e$  lauseke voidaan esittää muodossa

$$U^e = \frac{1}{2} \frac{E^e A^e}{l^e} (\Delta l^e - \overline{\Delta l^e})^2 \quad (22)$$

Tämän lausekkeen havaitaan nimittäin toteuttavan kimmoenergian määritelmän mukaisen vaatimuksen

$$\frac{\partial U^e}{\partial (\Delta l^e)} = \frac{E^e A^e}{l^e} (\Delta l^e - \overline{\Delta l^e}) = S^e, \quad (23)$$

jossa  $S^e$  on sauvassa vallitseva sauvavoima.

Vertaamalla lausekkeitä (16) ja (22) saadaan välittömästi seuraava tulkinta: Esitetty pienimmän neliön keino annettuja sauvojen venymiä vastaavien siirtymien määrittämiseksi vastaa siirtymien laskemista potentiaalienergian stationaarisen arvon periaatteen avulla kimmoiselle kuormittamattomalle ristikolle, jonka kaikilla sauvoilla suureen  $EA/l$  arvo on vakio ja jonka sauvojen alkuvenymät ovat annettujen venymien suuruiset. (On huomattava, että jos lausekkeen (15) kukin termi kerrotaan samalla vakiolla, syntyvän yhtälöryhmän ratkaisu ei muutu.)

Täten ymmärretään, että pienimmän neliön keinoon käyttö synnyttää yhtälöryhmän, jonka kerroinmatriisi on luonteeltaan hyvin lähellä kimmoisen rakenteen jäykkyyssmatriisia. Itse asiassa voisimme nyt niin halutessamme painottaa kimmoisen ristikon tapauksessa (15) kutakin diskreettiä jäännöstä  $\Delta l^e - \overline{\Delta l^e}$  vaikka vastaavasti painolla  $E^e A^e / l^e$ , jolloin pienimmän neliön keinolla saataisiin kerroinmatriisiksi täsmälleen rakenteen jäykkyyssmatriisi.

Kontinuumin yhteydessä saadaan analogisia tulkintoja. Tarkastellaan kuviteltua kimmoista materiaalia, jonka konstitutiiviset yhteydet ovat

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= E(\epsilon_x - \bar{\epsilon}_x) \\ \sigma_y &= E(\epsilon_y - \bar{\epsilon}_y) \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2} (\gamma_{xy} - \bar{\gamma}_{xy}) \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

jossa  $\bar{\epsilon}_x$ ,  $\bar{\epsilon}_y$  ja  $\bar{\gamma}_{xy}$  ovat annettuja alkumuodonmuutoskomponentteja ja  $E$  on kimmoduulin dimension omaava kerroin. Vastaava kimmoenergian tiheyden  $U_0$  lauseke

olisi

$$U_0 = \frac{1}{2} E \left[ (\varepsilon_x - \bar{\varepsilon}_x)^2 + (\varepsilon_y - \bar{\varepsilon}_y)^2 + \frac{1}{2} (\gamma_{xy} - \bar{\gamma}_{xy})^2 \right], \quad (25)$$

sillä pätee mm.

$$\frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_x} = E(\varepsilon_x - \bar{\varepsilon}_x) = \sigma_x. \quad (26)$$

Lausekkeen (2) tulkinta kappaleen muodonmuutosenergiana on siis jälleen ilmeinen, kun vain vielä ajatellaan mukaan kerroin E.

Kaavan (24) esittävät itse asiassa täsmälleen isotrooppisen kimmoisen aineen yleistettyä Hooken lakia sekä tasojännitys- että tasomuodonmuutostapauksessa, kun Poissonin vakion  $\nu$  arvo on nolla. Samoin voidaan todeta, että yhtälöt (3) ovat E:llä kerrottuina kimmoteorian tutut Navierin yhtälöt /1, s. 52/, jotka esittävät tasapainoyhtälöitä siirtymäkomponenteissa lausuttuina. Vastaavasti ehdot (4) E:llä kerrottuina voidaan tulkita siirtymissä lausutuiksi traktioreunaehdoiksi. Erona tavanomaisiin yhtälöihin nähden on vain, että ulkoisen kuormituksen sijalla esiintyy alkumuodonmuutoksista syntyviä termejä.

Esitetty fysikaalinen tulkinta on ollut pohjana lausekkeessa (2) näkyvien suhteellisten painojen 1,1 ja 1/2 valinnalle. Kimmoenergian lauseke on nimittäin tunnetusti ns. invariantti eli sen arvo ei riipu käytetystä koordinaatistosta. Täten kaavan (25) muoto antaa heti vihjeen painojen loogiselle valinnalle.

Invarianttisuus voidaan osoittaa ilman äskeitä tulkintaa suoraan seuraavasti. Tasotapauksessa muodonmuutostilan invariantit ovat /1, s. 37/

$$\left. \begin{aligned} I_1(\underline{\varepsilon}) &= \varepsilon_x + \varepsilon_y, \\ I_2(\underline{\varepsilon}) &= \varepsilon_x \varepsilon_y - \frac{1}{4} \gamma_{xy}^2. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Lauseke (2) voidaan saattaa muotoon

$$\begin{aligned} \Pi(u, v) &= \frac{1}{2} \int_A \left\{ \left[ (\varepsilon_x - \bar{\varepsilon}_x) + (\varepsilon_y - \bar{\varepsilon}_y) \right]^2 - 2 \left[ (\varepsilon_x - \bar{\varepsilon}_x)(\varepsilon_y - \bar{\varepsilon}_y) - \frac{1}{4} (\gamma_{xy} - \bar{\gamma}_{xy})^2 \right] \right\} dA \\ &= \frac{1}{2} \int_A \left[ I_1^2(\underline{\varepsilon} - \bar{\underline{\varepsilon}}) - 2I_2(\underline{\varepsilon} - \bar{\underline{\varepsilon}}) \right] dA, \end{aligned} \quad (28)$$

joka osoittaa väitteen oikeaksi.

Mahdollisia tutkimisen arvoisia kohteita olisivat kirjallisuudessa esitetyt sekamenetelmää tai puhdasta voimamenetelmää (ks. esimerkiksi lähde /5/) sovelta-

vat modernit numeeriset formulaatiot. Niissä saatujen siirtymien ja pienimmän neliön keinolla laskettujen siirtymien tarkkuuden vertailu olisi mielenkiintoista.

Esitetyn pienimmän neliön keinon yleistäminen tapauksiin, joissa käytetään muuta kuin karteesista suorakulmaista koordinaatistoa tai kolmidimensioisiin tapauksiin, ei tuottane teoreettisia ongelmia. Samoin lienee laita suurten siirtymien yhteydessä, jolloin muodonmuutos-siirtymäriippuvuus on epälineaarinen. Jälkimmäisessä tapauksessa syntyvät diskreetit yhtälöt ovat kuitenkin myös epälineaarisia ja niiden ratkaiseminen voi siten tulla työlääksi. Korostettakoon vielä, että vaikka tämän artikkelin sovellutukset koskivat kimmoisia rakenteita, itse menettely on luonnollisesti puhtaasti kinemaattinen ja riippumaton rakenteen ainemallista.

#### KIRJALLISUUTTA

- [1] Ylinen, A., Kimmo- ja lujuusoppi I. Toinen painos. Werner Söderström 1969.
- [2] Timoshenko, S. and Goodier, J.N., Theory of Elasticity. Second edition. McGraw-Hill 1951.
- [3] Sokolnikoff, I.S., Mathematical Theory of Elasticity. McGraw-Hill 1956. s. 25...29.
- [4] Salonen, E-M., Dynamiikka 434. Otakustantamo 1978. s. 293...299.
- [5] Taylor, R.L. and Zienkiewicz, O.C., Complementary Energy with Penalty Functions in Finite Element Analysis. Luku 8 teoksessa Glowinski, R., Rodin, E.Y., Zienkiewicz, O.C. (toim.), Energy Methods in Finite Element Analysis. Wiley 1979. s. 153...174.

*Jukka Aalto, dipl.ins. ja Eero-Matti Salonen, apul.prof., Teknillinen korkeakoulu, Mekaniikan laitos*