

## VOIMAREUNAHDOT JA VIRTUAALISEN TYÖN PERIAATE

Eero-Matti Salonen ja Juha Paavola

Rakenteiden Mekaniikka, Vol. 16  
No. 3, 1983, s. 20...45

**YHTEENVETO:** Artikkelissa selostetaan erästä epätavallista virtuaalisen työn periaatteen muotoa, jossa ns. voimareunaehdojen toteutuminen on asetettu korostettuun asemaan. Periaate johdetaan ja syntyviä standardimuodosta poikkeavia termejä pyritään havainnollistamaan fysikaalisten tulkintojen avulla. Kahden eri sovelluksen yhteydessä saatuja numeerisia tuloksia esitellään. Menettelyllä ei liene käytännöllistä merkitystä, mutta se voi olla avuksi opetuksellisessa mielessä perusteltaessa tavanomaisen virtuaalisen työn periaatteen johtamisessa tehtyjä valintoja.

### JOHDANTO

Siirtymäformulaatiota käytettäessä on tunnettua, että likimenetelmien yhteydessä jännityksille saadaan yleensä epätarkimmat arvot rakenteen reunoilla. Rakenteen sisällä tuloksia voidaan usein tarkentaa helposti sopivien keskiarvojen laske- misella tai jollain muulla tasoitusmenettelyllä. Reunoilla tarkentaminen on vaikeampaa, koska tasoittamiseen liittyvä informaatio on reunan suhteen tavallaan aina toispuoleista. Tällöin on lähellä ajatus, että tavanomaisia formulaatioita voitaisiin pyrkiä suoraan modifioimaan siten, että jännityksiin liittyvät reunaehdot tulisivat paremmin edustetuiksi. Tässä kirjoituksessa selostetaan erästä tällaista menettelyä ja esitetään joitakin sillä saatuja numeerisia tuloksia. Menettely saadaan aikaan soveltamalla virtuaalisen työn periaatetta normaalista poikkeavassa muodossa. Artikkelin pohjautuu lähteessä /1/ esitettyjen alustavien aiheiden edelleenkehittelyyn. Virtuaalisen työn periaatteen eri versioita käsitellään perusteellisemmin lähteessä /2/, josta esitetyt kaksi sovellutustakin on lainattu.

### TEORIA

Johdetaan virtuaalisen työn periaate ensin tavallista yleisemmässä muodossa ja tehdään sitten erityisiä valintoja halutun formulaation saavuttamiseksi. Merkin- nöissä seurataan verrattain pitkälti lähteessä /3/ esitettyjä matriisitunnuksia.

Vallitsevat kontinuumin tasapainoyhtälöt ovat

$$\underline{\underline{H}} \underline{\underline{g}} + \underline{\underline{b}} = \underline{\underline{0}} \quad \Omega:ssa \quad (1)$$

$$\underline{\underline{t}} - \underline{\underline{G}} \underline{\underline{g}} = \underline{\underline{0}} \quad \Gamma:lla \quad (2)$$

Tässä

$$\underline{\underline{g}} = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}]^T, \quad (3)$$

$$\underline{\underline{b}} = [b_x, b_y, b_z]^T, \quad (4)$$

$$\underline{\underline{t}} = [t_x, t_y, t_z]^T, \quad (5)$$

$$\underline{\underline{H}} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x, & 0, & 0, & 0, & \partial/\partial z, & \partial/\partial y \\ 0, & \partial/\partial y, & 0, & \partial/\partial z, & 0, & \partial/\partial x \\ 0, & 0, & \partial/\partial z, & \partial/\partial y, & \partial/\partial x, & 0 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$\underline{\underline{G}} = \begin{bmatrix} n_x, & 0, & 0, & 0, & n_z, & n_y \\ 0, & n_y, & 0, & n_z, & 0, & n_x \\ 0, & 0, & n_z, & n_y, & n_x, & 0 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Käytettyjen tunnusten merkitykset ovat ilmeiset. Yhtälö (1) kuvaa kappaleen tilavuusalkioon vaikuttavien voimien tasapainoa. Yhtälö (2) kuvaa kappaleen pinnalla olevaan infinitesimaalisen ohueen tilavuusalkioon vaikuttavien voimien tasapainoa.

Kerrotaan ensimmäinen, toinen ja kolmas yhtälö (1) vastaavasti mielivaltaisilla painofunktioilla  $w_x$ ,  $w_y$  ja  $w_z$ . Samoin kerrotaan ensimmäinen, toinen ja kolmas yhtälö (2) mielivaltaisilla painofunktioilla  $w_x^*$ ,  $w_y^*$  ja  $w_z^*$ . Integroidaan jokainen syntyvä yhtälö oman määrittelyalueensa yli ja lasketaan lopuksi kaikki näin saadut yhtälöt yhteen. Saadaan yhtälö

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{w}}^T \underline{\underline{H}} \underline{\underline{g}} \, d\Omega + \int_{\Omega} \underline{\underline{w}}^T \underline{\underline{b}} \, d\Omega + \int_{\Gamma} \underline{\underline{w}}^{*T} \underline{\underline{t}} \, d\Gamma - \int_{\Gamma} \underline{\underline{w}}^{*T} \underline{\underline{G}} \underline{\underline{g}} \, d\Gamma = 0, \quad (8)$$

jossa

$$\underline{\underline{w}} = [w_x, w_y, w_z]^T, \quad \underline{\underline{w}}^* = [w_x^*, w_y^*, w_z^*]^T. \quad (9)$$

Yhtälö (8) tulee käyttökelpoisempaan muotoon poistamalla jännityksiin  $\underline{\underline{g}}$  kohdistuvat derivaatat osittaisintegroinnin avulla. Suorittamalla laskelmat saadaan

tulos

$$\int_{\Omega} \tilde{w}^T \tilde{H} \tilde{g} \, d\Omega = - \int_{\Omega} (\tilde{L} \tilde{w})^T \tilde{g} \, d\Omega + \int_{\Gamma} \tilde{w}^T \tilde{G} \tilde{g} \, d\Gamma, \quad (10)$$

jossa

$$\tilde{L} = \tilde{H}^T. \quad (11)$$

Yhtälö (8) tulee täten muotoon

$$- \int_{\Omega} (\tilde{L} \tilde{w})^T \tilde{g} \, d\Omega + \int_{\Omega} \tilde{w}^T \tilde{b} \, d\Omega + \int_{\Gamma} \tilde{w}^{*T} \tilde{t} \, d\Gamma - \int_{\Gamma} (\tilde{w}^* - \tilde{w})^T \tilde{t}_{\sigma} \, d\Gamma = 0, \quad (12)$$

jossa on käytetty mukavuussyistä lyhennysmerkintää

$$\tilde{t}_{\sigma} \equiv \tilde{G} \tilde{g} \quad \Gamma:lla. \quad (13)$$

Suuretta  $\tilde{t}_{\sigma}$  nimitetään tässä sisäiseksi jännitysvektoriksi tai traktioksi. Ala- viite  $\sigma$  muistuttaa siitä, että tämä traktio lasketaan jännityksistä  $\tilde{g}$ .

Tavanomainen virtuaalisen työn periaate syntyy tekemällä valinta

$$\tilde{w}^* = \tilde{w} \quad \Gamma:lla \quad (14)$$

ja fysikaalinen tulkinta

$$\tilde{w} = \delta \tilde{u}, \quad (15)$$

jossa  $\delta \tilde{u}$ :ta nimitetään virtuaaliseksi siirtymäksi. Yhtälö (12) on tällöin (vaihdetaan merkit)

$$\int_{\Omega} \delta \tilde{\varepsilon}^T \tilde{g} \, d\Omega - \int_{\Omega} \delta \tilde{u}^T \tilde{b} \, d\Omega - \int_{\Gamma} \delta \tilde{u}^T \tilde{t} \, d\Gamma = 0, \quad (16)$$

jossa termiä

$$\delta \tilde{\varepsilon} = \tilde{L} \delta \tilde{u} = \delta \tilde{L} \tilde{u} \quad (17)$$

nimitetään virtuaaliseksi venymäksi. Sovellutuksissa tehdään lisäksi tavallises- ti rajoitus

$$\delta \tilde{u} = \mathbf{0} \quad \Gamma_u:lla, \quad (18)$$

jolloin vältetään osalla  $\Gamma_u$  vallitsevien tuntemattomien traktioiden ilmestyminen virtuaaliseen työyhtälöön. Tässä siis  $\Gamma_u$  on se reunan osa, jolla siirtymät ovat annetut:

$$\underline{u} = \bar{u} \quad \Gamma_u \text{ :llä .} \quad (19)$$

Lopulla osaa reunasta  $\Gamma_t$  traktiot ovat annetut:

$$\underline{t} = \bar{t} \quad \Gamma_t \text{ :llä .} \quad (20)$$

Täten lopullinen virtuaalisen työn periaatteen standardimuoto on

$$\left. \begin{aligned} \int_{\Omega} \delta \underline{\varepsilon}^T \underline{\sigma} \, d\Omega - \int_{\Omega} \delta \underline{u}^T \underline{b} \, d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta \underline{u}^T \bar{t} \, d\Gamma = 0 , \\ \delta \underline{u} = \underline{0} \quad \Gamma_u \text{ :llä .} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Valinnalla (14) on se etu, että Galerkinin menetelmää käytettäessä syntyvien diskreettien yhtälöiden havaitaan olevan lineaarisessa kimmoteoriassa symmetrisiä. Tulkinnalla (15) saavutetaan se lisäetu, että konservatiivisen systeemin yhteydessä yhtälö (21) on identtinen yhtälön

$$\delta \Pi = 0 \quad (22)$$

kanssa, jossa  $\delta \Pi$  on systeemin potentiaalienergian  $\Pi$  variaatio.

On kuitenkin oma mielenkiintonsa poiketa hieman tavanomaiselta polulta ja lähteä kehittämään yhtälöön (12) liittyviä diskreettejä yhtälöitä. Jotta saataisiin kaavoja, joita voitaisiin nimittää edelleen virtuaalisen työn yhtälöiksi, tehdään tulkinnat

$$\underline{w} = \delta \underline{u} \quad (23)$$

$$\underline{w}^* = \delta \underline{u}^* , \quad (24)$$

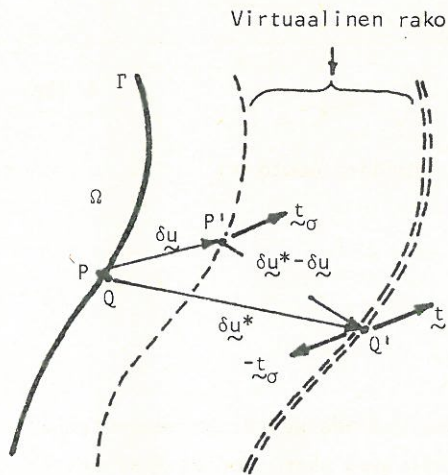
jossa  $\delta \underline{u}$  on mielivaltainen virtuaalinen siirtymä  $\Omega$ :ssa ja  $\delta \underline{u}^*$  on mielivaltainen virtuaalinen siirtymä  $\Gamma$ :lla. Tämä merkitsee vain, että merkitään painofunktioita  $\underline{w}$  ja  $\underline{w}^*$  uusilla tunnuksilla eikä sillä ole mitään vaikutusta lopullisiin diskreetteihin yhtälöihin.

Kun merkinnät (23), (24) ja (17) otetaan huomioon, yhtälö (12) saa ensin muodon (vaihdetaan merkit)



$$\int_{\Omega} \delta \underline{\varepsilon}^T \underline{\sigma} \, d\Omega - \int_{\Omega} \delta \underline{u}^T \underline{b} \, d\Omega - \int_{\Gamma} \delta \underline{u}^{*T} \underline{t} \, d\Gamma + \int_{\Gamma} (\delta \underline{u}^* - \delta \underline{u})^T \underline{t}_{\sigma} \, d\Gamma = 0 . \quad (25)$$

Tämän yhtälön kahden viimeisen integraalin merkitys voidaan tulkita fysikaalisesti seuraavasti. Ajatellaan äärettömän ohut materiaalikaistale erotetuksi kap-



Kuva 1. Virtuaaliset siirtymät alueen  $\Omega$  reunalla  $\Gamma$  periaatteessa (25).

paleen pinnalta ja annetaan sille virtuaalisesta siirtymästä  $\delta \underline{u}$  riippumaton siirtymä  $\delta \underline{u}^*$  (kuva 1). Yhtälön (25) kolmas integraali esittää merkkeineen ulkoisen traktion  $\underline{t}$  tekemää negatiivista virtuaalista työtä. Termi  $\delta \underline{u}^* - \delta \underline{u}$  on kahden alunperin vierekkäisen materiaalipisteen P ja Q välinen suhteellinen virtuaalinen siirtymä. Edellisen pisteen ajatellaan olevan  $\Omega$ :n piste ja jälkimmäisen  $\Gamma$ :n piste. Täten yhtälön (25) viimeinen integraali esittää kuvitellun virtuaalisen raon syntyessä rajapintoihin vaikuttavien sisäisten traktioiden  $\underline{t}_{\sigma}$  ja  $-\underline{t}_{\sigma}$  yhteensä tekemää negatiivista virtuaalista työtä.

Termi virtuaalinen rako tulee tässä käsittää yleisessä mielessä siten, että se voi tarkoittaa myös "negatiivista" rakoja tai pintojen liukumista toistensa suhteen.

Johdannossa esitetyn perustelun mukaisesti pyritään nyt korostamaan erityisesti ns. voimareunaehtojen (2) osuutta periaatteessa (25). Koska funktioilla  $\underline{w} = \delta \underline{u}$  painotettiin tasapainoehtoja (1), asetetaan

$$\underline{w} = \delta \underline{u} = 0 \quad \Gamma_t \text{lla} , \quad (26)$$

jolloin ehtojen (1) osuus häviää kokonaan reunalla. Lisäksi asetetaan

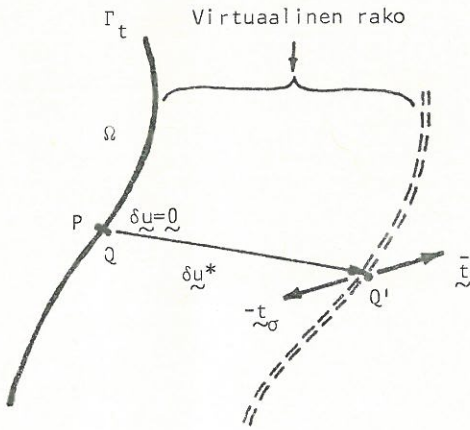
$$\underline{w}^* = \delta \underline{u}^* = 0 \quad \Gamma_u \text{lla} , \quad (27)$$

jolloin vältetään reunalla  $\Gamma_u$  vallitsevien tuntemattomien traktioiden mukaantulo. Täten yhtälö (25) saa muodon

$$\left. \begin{aligned} & \int_{\Omega} \delta \underline{\varepsilon}^T \underline{\sigma} \, d\Omega - \int_{\Omega} \delta \underline{u}^T \underline{b} \, d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta \underline{u}^{*T} (\underline{t} - \underline{t}_{\sigma}) \, d\Gamma = 0 , \\ & \delta \underline{u} = 0 \quad \Gamma_t \text{lla} , \quad \delta \underline{u}^* = 0 \quad \Gamma_u \text{lla} . \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Tämä yhtälö on se virtuaalisen työn periaatteen erikoismuoto, jota tullaan soveltamaan tässä kirjoituksessa.

Kuvassa 1 esitetty asetelma muuttuu kuvan 2 mukaiseksi. Tarkastellaan erityisesti tapausta  $\delta u = 0$   $\Omega$ :ssa ja  $\delta u^* \neq 0$



$\Gamma_t$ :llä. Saadaan yhtälö

$$\int_{\Gamma_t} \delta u^{*T} (\bar{t} - \tilde{t}_\sigma) d\Gamma = 0, \text{ jolla on havainnol-}$$

linen fysikaalinen merkitys (kuva 2). Siis pelkästään ehdon (2) toteutumista vaaditaan tietyssä keskimääräisessä mielessä. Tavanomaista periaatetta (21) käytettäessä vastaavaan tulokseen ei päästä diskreettien menetelmien yhteydessä. Itse asiassa tällöin saadaan aina tietynlainen kombinaatio ehdoista (1) ja (2).

Kuva 2. Virtuaaliset siirtymät alueen  $\Omega$  reunalla  $\Gamma_t$  periaatteessa (28).

Siirrytään diskreettien yhtälöiden johtamiseen. Siirtymiä approksimoidaan

elementtimenetelmällä tuttuun tapaan muodossa

$$\hat{u} = \underline{N} \underline{a}, \quad (29)$$

jossa  $\underline{N}$  on muotofunktio matriisi ja  $\underline{a}$  on tuntemattomista solmuparametreista muodostettu pystyvektori. Likimääräiset jännitykset  $\hat{\sigma}$  ja sisäiset traktiot  $\hat{t}_\sigma$  tulevat olemaan siirtymien funktioita:

$$\hat{\sigma} = \hat{\sigma}(\underline{a}), \quad (30)$$

$$\hat{t}_\sigma = \hat{t}_\sigma(\underline{a}) = \underline{G} \hat{\sigma}. \quad (31)$$

Kun  $\hat{\sigma}$  ja  $\hat{t}_\sigma$  sijoitetaan yhtälöön (28), se ei voi yleensä enää toteutua täysin mielivaltaisten funktioiden  $\delta u$  ja  $\delta u^*$  valinnan suhteen. Mutta ottamalla yhtä monta tiettyä riippumatonta valintaa  $\delta u$  ja  $\delta u^*$  kuin on tuntemattomia parametreja  $\underline{a}$  ja vaatimalla yhtälön (28) toteutumista näille funktioille saadaan tarvittava määrä diskreettejä yhtälöitä parametrien  $\underline{a}$  määrittämiseksi.

Tässä tullaan käyttämään samoja muotofunktioita sekä virtuaalisten että todellisten siirtymien esittämiseen kuten on tavallista elementtimenetelmässä. Jaetaan solmuparametrit kahteen ryhmään  $\underline{a}^a$  ja  $\underline{a}^b$ . Edelliset liittyvät verkon sisäisiin solmuihin ja jälkimmäiset reunalla  $\Gamma_t$  oleviin solmuihin. Merkintöjen yksin-

kertaistamiseksi ajatellaan, että ko. parametrit on lueteltu vektorissa  $\underline{a}$  erikseen siten, että voidaan kirjoittaa

$$\underline{a} = \begin{Bmatrix} \underline{a}^a \\ \underline{a}^b \end{Bmatrix} \quad (32)$$

Täten myös esitys (29) voidaan saattaa osittamalla muotoon

$$\hat{u} = \underline{N}^a \underline{a}^a + \underline{N}^b \underline{a}^b . \quad (33)$$

Parametreihin  $\underline{a}^a$  liittyvät diskreetit yhtälöt synnytetään ottamalla

$$\left. \begin{aligned} \delta \underline{u} &= \underline{N}^a \delta \underline{a}^a & \Omega:ssa , \\ \delta \underline{u}^* &= \underline{0} & \Gamma:lla . \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Kaavan (17) perusteella vastaava virtuaalinen venymä

$$\delta \underline{\varepsilon} = \underline{B}^a \delta \underline{a}^a , \quad (35)$$

jossa lyhennysmerkintä

$$\underline{B}^a = \underline{L} \underline{N}^a . \quad (36)$$

Kun lausekkeet (34) ja (35) sijoitetaan periaatteeseen (28), asetetaan  $\underline{u} \rightarrow \hat{\underline{u}}$  ja  $\underline{t}_\sigma \rightarrow \hat{\underline{t}}_\sigma$  ja otetaan huomioon, että variaatiot  $\delta \underline{a}^a$  ovat mielivaltaisia, saadaan lopuksi diskreetit yhtälöt

$$\int_{\Omega} \underline{B}^{aT} \hat{\underline{u}} \, d\Omega - \int_{\Omega} \underline{N}^{aT} \underline{b} \, d\Omega = \underline{0} . \quad (37)$$

On helppo todeta, että täsmälleen samat yhtälöt olisi saatu myös tavanomaista periaatetta (21) käyttäen, koska otettiin  $\delta \underline{u}^* = \underline{0}$  ja  $\delta \underline{u} = \underline{0}$   $\Gamma$ :lla.

Parametreihin  $\underline{a}^b$  liittyvät diskreetit yhtälöt synnytetään ottamalla

$$\left. \begin{aligned} \delta \underline{u} &= \underline{0} & \Omega:ssa , \\ \delta \underline{u}^* &= \underline{N}^b \delta \underline{a}^b & \Gamma:lla . \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Virtuaaliset venymät häviävät ja periaatteesta (28) seuraa vastaavasti kuin edel-



lä yhtälöt

$$\int_{\Gamma_t} \tilde{N}^{bT} \hat{\tilde{t}}_\sigma d\Gamma - \int_{\Gamma_t} \tilde{N}^{bT} \tilde{t} d\Gamma = \tilde{0}, \quad (39)$$

joiden fysikaalinen merkitys on ilmeinen.

Periaatteen (28) avulla saadut diskreetit yhtälöt ovat täten koottuina

$$\left. \begin{aligned} \int_{\Omega} \tilde{B}^{aT} \hat{\tilde{g}} d\Omega &= \tilde{R}^a, \\ \int_{\Gamma_t} \tilde{N}^{bT} \hat{\tilde{t}}_\sigma d\Gamma &= \tilde{S}^b, \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

jossa ulkoisten solmuvoimien  $\tilde{R}^a$  ja  $\tilde{S}^b$  lausekkeet ovat

$$\tilde{R}^a = \int_{\Omega} \tilde{N}^{aT} \tilde{b} d\Omega, \quad (41)$$

$$\tilde{S}^b = \int_{\Gamma_t} \tilde{N}^{bT} \tilde{t} d\Gamma. \quad (42)$$

Tavanomaisen periaatteen (25) avulla saadut diskreetit yhtälöt tulevat olemaan vastaavasti

$$\left. \begin{aligned} \int_{\Omega} \tilde{B}^{aT} \hat{\tilde{g}} d\Omega &= \tilde{R}^a \\ \int_{\Omega} \tilde{B}^{bT} \hat{\tilde{g}} d\Omega &= \tilde{R}^b, \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

jossa

$$\tilde{R}^b = \int_{\Omega} \tilde{N}^{bT} \tilde{b} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \tilde{N}^{bT} \tilde{t} d\Gamma. \quad (44)$$

Koska yhtälöt (40) poikkeavat tavanomaisista yhtälöistä (43) vain solmuparametreihin  $\tilde{a}^b$  liittyvien yhtälöiden suhteen, voidaan myös niin haluttaessa yrittää käsitellä yhtälöitä (40) häirittyinä yhtälöinä (43). Täten voimme kirjoittaa yhtälöt (40) muodossa



$$\left. \begin{aligned} \int_{\Omega} \underline{\underline{B}}^a \hat{\underline{\underline{g}}} \, d\Omega &= \underline{\underline{R}}^a \\ \int_{\Omega} \underline{\underline{B}}^b \hat{\underline{\underline{g}}} \, d\Omega &= \underline{\underline{R}}^b + \Delta \underline{\underline{R}}^b, \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

jossa

$$\begin{aligned} \Delta \underline{\underline{R}}^b &= \underline{\underline{S}}^b - \underline{\underline{R}}^b + \int_{\Omega} \underline{\underline{B}}^b \hat{\underline{\underline{g}}} \, d\Omega - \int_{\Gamma_t} \underline{\underline{N}}^b \hat{\underline{\underline{t}}} \, d\Gamma \\ &= \int_{\Omega} (\underline{\underline{B}}^b \hat{\underline{\underline{g}}} - \underline{\underline{N}}^b \hat{\underline{\underline{t}}}) \, d\Omega - \int_{\Gamma_t} \underline{\underline{N}}^b \hat{\underline{\underline{t}}} \, d\Gamma. \end{aligned} \quad (46)$$

Suureita  $\Delta \underline{\underline{R}}^b$  voidaan pitää kuviteltuina rakenteen jännitystilasta riippuvina ulkoisina reunan  $\Gamma_t$  solmuihin vaikuttavina korjausvoimina, jotka muuntavat tavanomaisella tavalla diskretoidun rakenteen ratkaisun periaatteen (28) mukaiseksi.

Tarkastellaan jatkossa pelkästään lineaarisesta kimmoisesta materiaalista olevia rakenteita ja jätetään yksinkertaisuuden vuoksi mahdollisten alkuvienymien tai alkujännitysten osuus huomiotta. Saadaan

$$\hat{\underline{\underline{g}}} = \underline{\underline{D}} \underline{\underline{B}} \underline{\underline{a}}, \quad (47)$$

jossa

$$\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{L}} \underline{\underline{N}} \quad (48)$$

ja  $\underline{\underline{D}}$  on jännityksien ja venymien välisen yhteyden ilmaiseva matriisi. Ositetaan myös esitys (47), jolloin siis

$$\hat{\underline{\underline{g}}} = \underline{\underline{D}} \underline{\underline{B}}^a \underline{\underline{a}}^a + \underline{\underline{D}} \underline{\underline{B}}^b \underline{\underline{a}}^b, \quad (49)$$

jossa

$$\underline{\underline{B}}^a = \underline{\underline{L}} \underline{\underline{N}}^a, \quad \underline{\underline{B}}^b = \underline{\underline{L}} \underline{\underline{N}}^b. \quad (50)$$

Vastaavasti

$$\hat{\underline{\underline{t}}} = \underline{\underline{G}} \underline{\underline{D}} \underline{\underline{B}} \underline{\underline{a}} \quad (51)$$

$$= \underline{\underline{G}} \underline{\underline{D}} \underline{\underline{B}}^a \underline{\underline{a}}^a + \underline{\underline{G}} \underline{\underline{D}} \underline{\underline{B}}^b \underline{\underline{a}}^b. \quad (52)$$

Yhtälöiden (40) havaitaan olevan muotoa

$$\begin{bmatrix} \mathbb{K}^{aa} & \mathbb{K}^{ab} \\ \mathbb{L}^{ba} & \mathbb{L}^{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{z}^a \\ \tilde{z}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{R}^a \\ \tilde{S}^b \end{Bmatrix}, \quad (53)$$

jossa

$$\mathbb{K}^{aa} = \int_{\Omega} \mathbb{B}^a \mathbb{D} \mathbb{B}^a d\Omega, \quad (54)$$

$$\mathbb{K}^{ab} = \int_{\Omega} \mathbb{B}^a \mathbb{D} \mathbb{B}^b d\Omega, \quad (55)$$

$$\mathbb{L}^{ba} = \int_{\Gamma_t} \mathbb{N}^b \mathbb{G} \mathbb{D} \mathbb{B}^a d\Gamma, \quad (56)$$

$$\mathbb{L}^{bb} = \int_{\Gamma_t} \mathbb{N}^b \mathbb{G} \mathbb{D} \mathbb{B}^b d\Gamma, \quad (57)$$

Tavanomainen yhtälösystemi (43) on

$$\begin{bmatrix} \mathbb{K}^{aa} & \mathbb{K}^{ab} \\ \mathbb{K}^{ba} & \mathbb{K}^{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{z}^a \\ \tilde{z}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{R}^a \\ \tilde{R}^b \end{Bmatrix}, \quad (58)$$

jossa

$$\mathbb{K}^{ba} = (\mathbb{K}^{ab})^T = \int_{\Omega} \mathbb{B}^b \mathbb{D} \mathbb{B}^a d\Omega, \quad (59)$$

$$\mathbb{K}^{bb} = \int_{\Omega} \mathbb{B}^b \mathbb{D} \mathbb{B}^b d\Omega. \quad (60)$$

Lopuksi yhtälösystemi (45) on

$$\begin{bmatrix} \mathbb{K}^{aa} & \mathbb{K}^{ab} \\ \mathbb{K}^{ba} & \mathbb{K}^{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{z}^a \\ \tilde{z}^b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{R}^a \\ \tilde{R}^b + \Delta \tilde{R}^b \end{Bmatrix} \quad (61)$$

jossa

$$\Delta \tilde{z}^b = \tilde{z}^b - \tilde{R}^b + (\mathbb{K}^{ba} \mathbb{L}^{ba}) \tilde{z}^a + (\mathbb{K}^{bb} \mathbb{L}^{bb}) \tilde{z}^b. \quad (62)$$

Tarkempi tarkastelu osoittaa, että korjausvoimat  $\Delta R^b$  riippuvat vain reunaan  $\Gamma_t$  liittyvän ensimmäisen elementtikerroksen solmusiirtymistä.

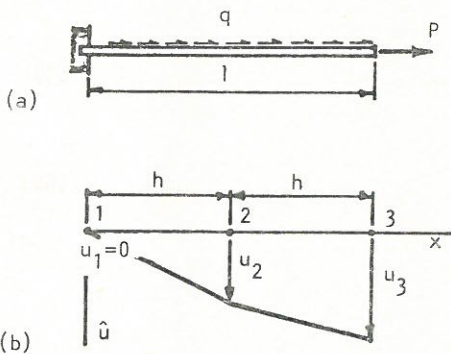
Sen sijaan, että ratkaistaisiin suoraan epäsymmetrinen yhtälöryhmä (53), voidaan yrittää myös käsitellä yhtälöryhmää (61) iteratiivisesti aloittaen arvolla  $\Delta R^{b(0)} = \underline{0}$ . Systemin (61) ensimmäinen ratkaisu  $\underline{a}^{(1)}$  antaa täten tavanomaisen menettelyn (yhtälöt (58)) mukaisen ratkaisun. Korjausvoimat  $\Delta R^{b(1)}$  saadaan lausekkeesta (62)  $a$ :n arvolla  $\underline{a}^{(1)}$ . Yhtälöistä (61) saadaan uusi ratkaisu  $\underline{a}^{(2)}$ . Menettelyä jatketaan vastaavasti, kunnes tulokset ovat supenneet riittävän tarkasti mikäli mahdollista. Ryhmä (53) voidaan tietenkin ratkaista myös suoraan, mutta iteratiivisella menettelyllä on se etu, että tarvittava ohjelma voidaan synnyttää tavanomaisen ohjelman pohjalta verrattain helposti. Vain solmuvoimien laskemiseen tulee muutoksia. Yhtälösystemin symmetrisyyttä ja positiivista definiittiyttä voidaan tällöin käyttää hyväksi iteraatiokierrosten kustannuksella.

#### ENSIMMÄINEN SOVELLUTUS

Kuvassa 3 (a) esitetty kimmainen tasajäykkä sauva (vetojäykkyys EA) on tasaisen kuormituksen (intensiteetti  $q$ ) ja sauvan päässä vaikuttavan voiman  $P$  alaisena. Sauvassa vallitsevaa normaalivoimaa  $S$  pidetään positiivisena, kun sauvassa on vetoa

Teoriakohdassa johdetut yleiset kaavat eivät sovellu sellaisenaan, kun käytetään yksinkertaistettuja rakenneteorioita kuten on tavallista esimerkiksi sauvojen, palkkien, levyjen, laattojen ja

kuorien yhteydessä. Virtuaalisen työn yhtälö pitää tällöin johtaa periaatteessa aina erikseen ottaen huomioon kulloinkin tehdyt yksinkertaistavat otaksumat. Itse asiassa johtamistapah-  
tuma tuottaa automaattisesti valittuja ns. yleistettyjä jännityksiä  $\underline{\sigma}$  vastaavat ns. yleistetyt venymät  $\underline{\epsilon}$  (ks. esimerkiksi lähde /4, s. 243/. Tässä tapauksessa voidaan helposti osoittaa, että tarvittavat lausekkeet saadaan yleisistä kaavoista tekemällä tulkinnat



Kuva 3 (a) Aksiaalisesti kuormitettu kimmainen sauva. (b) Siirtymän elementtiapproksimaatio.



$$\left. \begin{aligned}
 \Omega &\hat{=} 0 < x < 1, & \Gamma_u &\hat{=} x = 0, & \Gamma_t &\hat{=} x = 1 \\
 \tilde{g} &\hat{=} S, & \tilde{b} &\hat{=} q, & \tilde{t} &\hat{=} P, & \tilde{H} &\hat{=} \frac{d}{dx} \\
 \tilde{g}_x &\hat{=} n_x \quad (n_x = -1 \text{ kun } x = 0, \quad n_x = 1 \text{ kun } x = 1), \\
 \tilde{k} &= \tilde{H}^T = \frac{d}{dx}, & \tilde{u} &\hat{=} u, & \tilde{\varepsilon} &\hat{=} \varepsilon = \frac{du}{dx}, & \tilde{D} &\hat{=} EA.
 \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

Standardiperiaate (21) on nyt

$$\left. \begin{aligned}
 \int_0^1 \delta \varepsilon S dx - \int_0^1 \delta u q dx - \delta u(1) P = 0, \\
 \delta u(0) = 0.
 \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

Erikoisperiaate (28) saa muodon ( $\tilde{t}_\sigma \hat{=} S$ )

$$\left. \begin{aligned}
 \int_0^1 \delta \varepsilon S dx - \int_0^1 \delta u q dx - \delta u^*(P - S(1)) = 0, \\
 \delta u(0) = 0, \quad \delta u(1) = 0, \quad \delta u_0^* = 0.
 \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

Käytetään karkeaa kahdesta lineaarisesta janaelementistä muodostettua mallia. Täten siirtymää  $u(x)$  approksimoidaan vain kahden solmuparametrin  $u_2$  ja  $u_3$  avulla (kuva 3 (b)):

$$\hat{u} = N_2 u_2 + N_3 u_3. \quad (66)$$

Tässä siis

$$\left. \begin{aligned}
 \tilde{a}^a &\hat{=} u_2, & \tilde{a}^b &\hat{=} u_3, \\
 \hat{\varepsilon} &= \frac{dN_2}{dx} u_2 + \frac{dN_3}{dx} u_3, \\
 \hat{S} &= EA \hat{\varepsilon}.
 \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

Kuvassa 4 (a) ja (b) on esitetty periaatteisiin (64) ja (65) liittyvät kaksi virtuaalista siirtymää. Vastaaviksi diskreeteiksi yhtälöiksi saadaan

$$\frac{EA}{h} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{qh}{2} \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix} + P \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad (68)$$



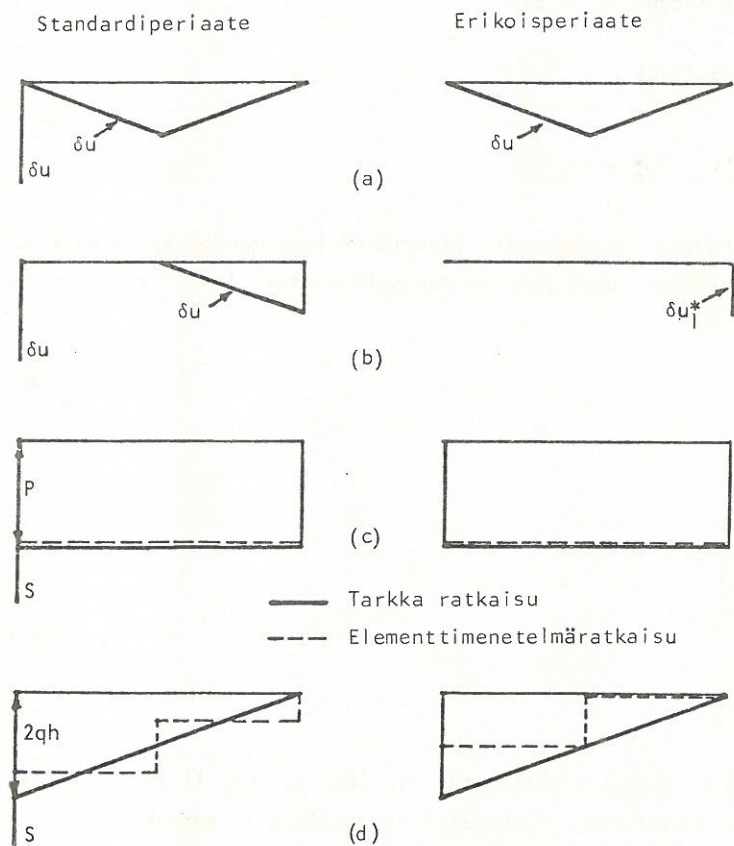
$$\frac{EA}{h} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{qh}{2} \begin{Bmatrix} 2 \\ 0 \end{Bmatrix} + P \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (69)$$

ja vastaavat ratkaisut tulevat olemaan

$$u_2 = \frac{3}{2} \frac{qh^2}{EA} + \frac{Ph}{EA}, \quad u_3 = 2 \frac{qh^2}{EA} + 2 \frac{Ph}{EA} \quad (70)$$

sekä

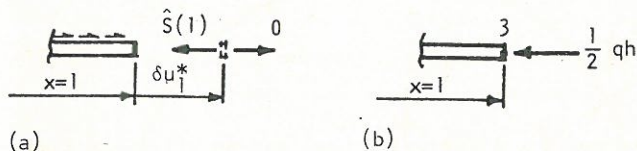
$$u_2 = \frac{qh^2}{EA} + \frac{Ph}{EA}, \quad u_3 = \frac{qh^2}{EA} + 2 \frac{Ph}{EA} \quad (71)$$



Kuva 4 (a) Ensimmäinen virtuaalinen siirtymä. (b) Toinen virtuaalinen siirtymä. (c) Normaalivoiman jakautuma voiman P johdosta. (d) Normaalivoiman jakautuma tasaisen kuormituksen q johdosta.

Havaitaan, että tulokset ovat identtisiä voiman  $P$  vaikuttaessa, mutta että ne eroavat tasaisen kuormituksen  $q$  suhteen. Normaalivoiman  $\hat{S}$  jakautuma näissä kahdessa kuormitustapauksessa on esitetty kuvissa 4 (c) ja 4 (d). Erikoisperiaate (65) antaa kummassakin tapauksessa sisäisen normaalivoiman  $\hat{S}(l)$ , joka on täsmälleen sama kuin ulkoinen traktio ( $P$  tai  $0$ ), kun taas standardiperiaatteen (64) antama sisäinen normaalivoima  $\hat{S}(l)$  poikkeaa tarkasta arvosta tasaisen kuormituksen tapauksessa. Näillä kahdella periaatteella saatujen tulosten erot kuitenkin pienenevät verkkoa tihennettäessä. Jos käytetään vakiopituisia elementtejä, käy aina niin, että standardiperiaate antaa tarkat arvot elementtien keskikohtilla ja erikoisperiaate elementtien oikeanpuoleisissa päissä. Vaikka erikoisperiaate siis parantaa normaalivoimajakautumaa voimareunaehdon toteutumisen kannalta, tämä tulos merkitsee toisaalta keskimääräisesti epätarkempaa jakautumaa itse alueessa.

Kuvassa 5 (a) on esitetty jälkimmäisen yhtälön (69) fysikaalinen tulkinta tasaisen kuormituksen  $q$  vaikuttaessa. Sauvan oikeanpuoleiseen päähän liittyvälle



Kuva 5 (a) Yhtälöön (72) liittyvä virtuaalinen siirtymä. (b) Solmussa 3 vaikuttava korjausvoima.

infinitesimaalisella materiaalikaistaleelle on annettu virtuaalinen siirtymä  $\delta u_1^* \neq 0$ . Kaistaleen vasemman- ja oikeanpuoleisissa päissä vaikuttavat vastavasti sisäinen voima  $\hat{S}(l)$  ja annettu ulkoinen voima ( $= 0$ ) (vrt. kuva 2). Periaatteesta (65) seuraava vastaava yhtälö on yksinkertaisesti

$$-\delta u_1^* (0 - \hat{S}(l)) = 0 \quad (72)$$

$$\text{eli } \hat{S}(l) = EA(-u_2 + u_3)/h = 0.$$

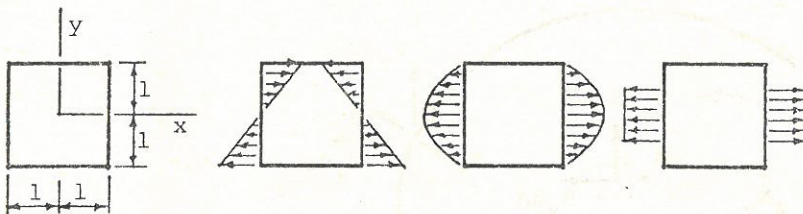
Systeemeillä (68) ja (69) sattuu olemaan tässä identtiset kerroinmatriisit. Kaavan (62) esittämäksi korjausvoimaksi saadaan siis

$$\Delta R_3^b = S_3^b - R_3^b = 0 - \frac{qh}{2} = -\frac{qh}{2}. \quad (73)$$

Se ei riipu solmuisiirtymistä. Täten jo toinen iteraatiokierros ehdotetussa iteraatiomenettelyssä antaa tarkan ratkaisun. Korjausvoima on esitetty rakenteeseen vaikuttavana kuvassa 5 (b). On helppo havaita kuvaa 4 (d) tarkastelemalla,

$$\left. \begin{aligned}
 & \int_A (\delta \epsilon_x N_x + \delta \epsilon_y N_y + \delta \gamma_{xy} N_{xy}) dA - \int_A (\delta u B_x - \delta v B_y) dA + \\
 & - \int_{s_t} [\delta u^* (\bar{T}_x - (T_\sigma)_x) + \delta v^* (\bar{T}_y - (T_\sigma)_y)] = 0, \\
 & \delta u = 0, \quad \delta v = 0 \quad s_{\text{llä}}, \quad \delta u^* = 0, \quad \delta v^* = 0 \quad s_{\text{u}} \text{lla}.
 \end{aligned} \right\} \quad (82)$$

Artikkelin jälkimmäinen kirjoittaja on ohjelmoinut esitetyn teorian sovelletuna nelisolmuiselle suorakaiteen muotoiselle levyelementille. Sovellutuksessa voidaan käyttää joko standardiperiaatetta (81) tai erikoisperiaatetta (82). Jälkimmäisessä tapauksessa tulokset saadaan joko ratkaisemalla suoraan epäsymmetrinen yhtälöryhmä tai sitten esitetyllä iteratiivisella menettelyllä.

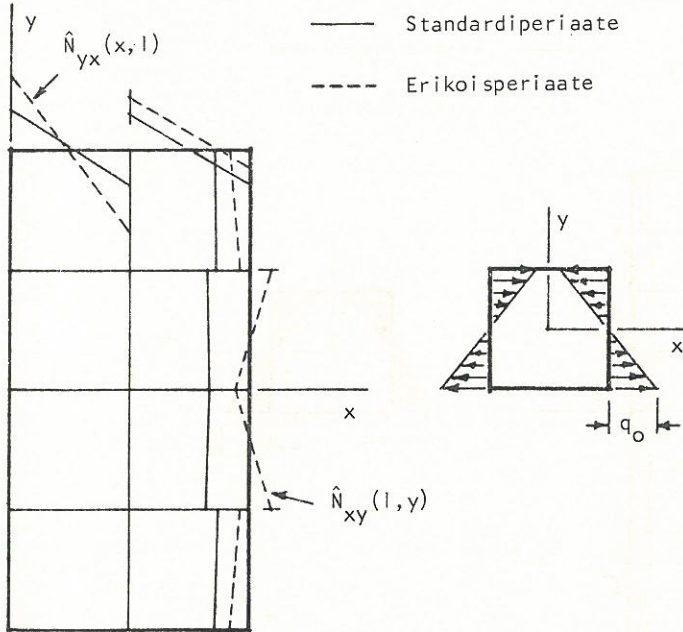
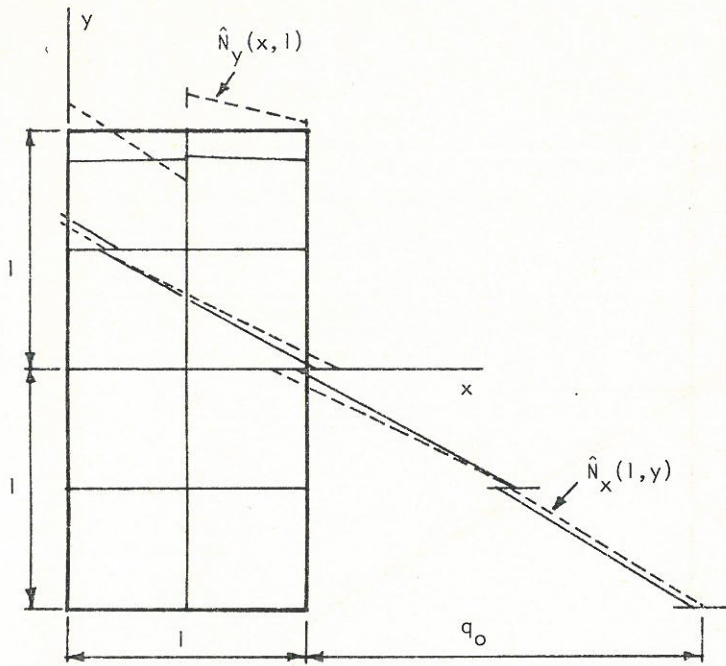


Kuva 7. Neliön muotoinen levy ja kolme kuormitustapausta.

Neliön muotoinen tasapaksu homogeeninen levy (Poissonin vakio  $\nu = 0,3$ ) on analysoitu kolmen kuormitustapauksen alaisena (kuva 7). Alueen reuna on kokonaan tyyppiä  $s_t$ . Jäykän kappaleen liikkeiden estämiseksi on annettu ehdot  $u(0,y) = 0$  ja  $v(0,0) = 0$  symmetriaviivalla  $x = 0$  sijaitseville solmuille.

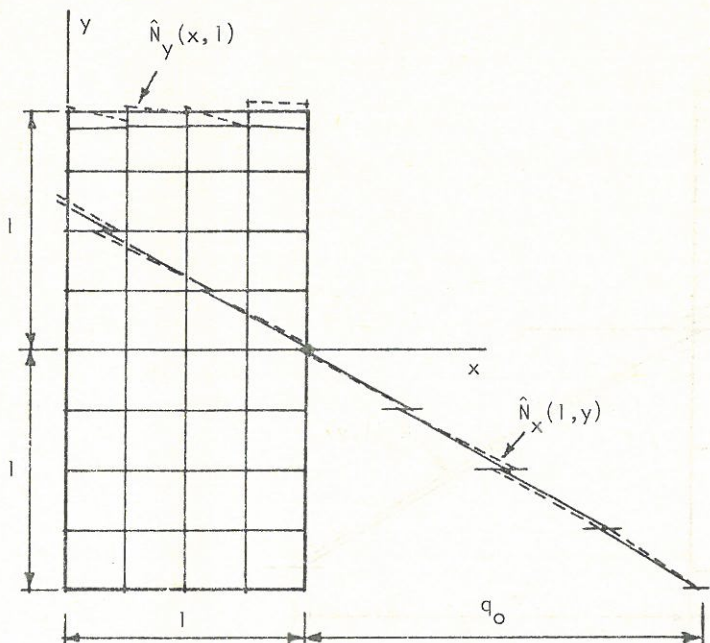
Kuvissa 8...13 on esitetty joitakin ko. ohjelmalla saatuja sisäisten jännitysresultanttien jakautumia levyn reunoilla  $x = 1$  ja  $y = 1, x > 0$ . Kuviin on piirretty näkyviin symmetrian johdosta vain levyn oikea puolisko. Tulokset on esitetty kussakin kuormitustapauksessa harvemalla  $4 \times 4$ - ja tiheämmällä  $8 \times 8$ -verkolla saatuina. Levyn vaikuttavan annetun ulkoisen reunakuormituksen perusteella voidaan päätellä, että kuvissa näkyvien suureiden  $N_{xy}$ ,  $N_{yx}$  ja  $N_y$  jakautumien tulisi hävitä tarkassa ratkaisussa ja että suureen  $N_x$  jakautuman reunalla  $x = 1$  tulisi yhtyä kulloinkin annettuun ulkoiseen kuormitusjakautumaan. Verkon tihentämisen havaitaan muuttavan jakautumia tarkemmiksi. Silmämääräinen tarkastelu osoittaa myös, että erikoisperiaatteella saadaan yleensä keskimäärin hieman tarkempia tuloksia kuin standardiperiaatteella. Kuvittelemalla kuhunkin reunasolmuun tässä bilineaarisista muotofunktioista johtuva reunalla lineaarisesti jakau-



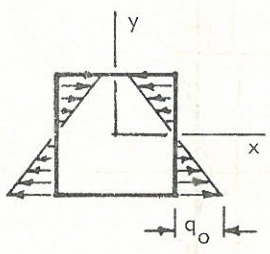
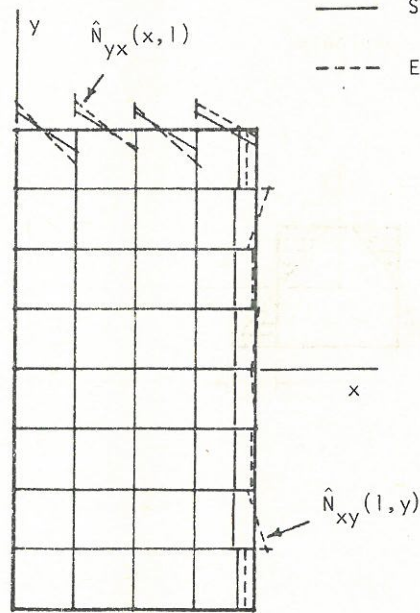


Kuva 8. Taivutuskuormitustapauksessa saatuja tuloksia.  $4 \times 4$ -elementtiverkko.

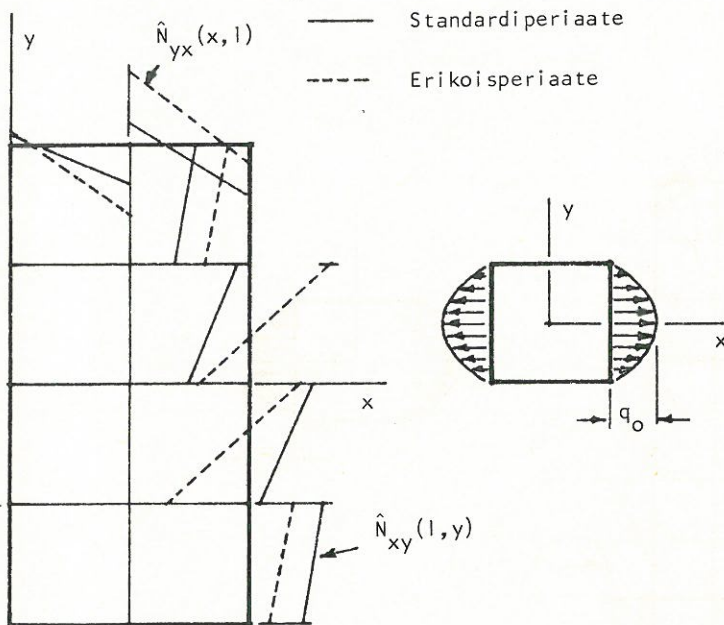
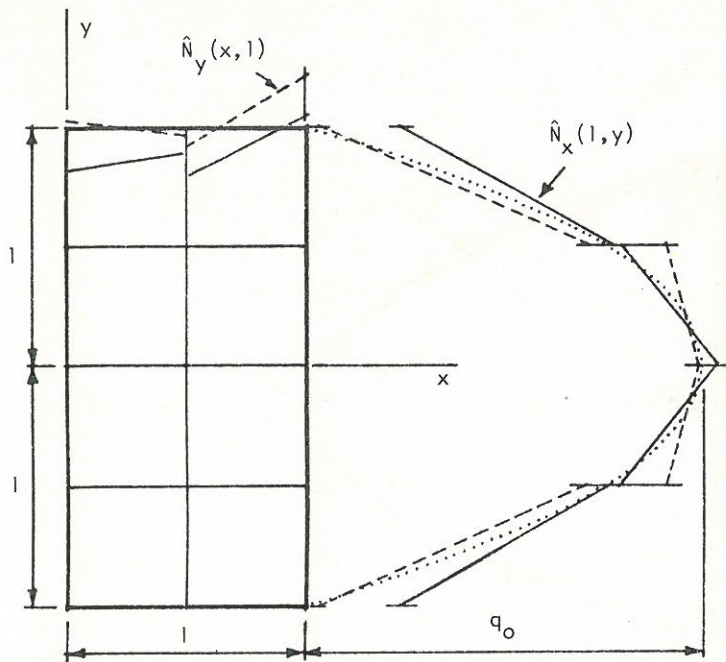




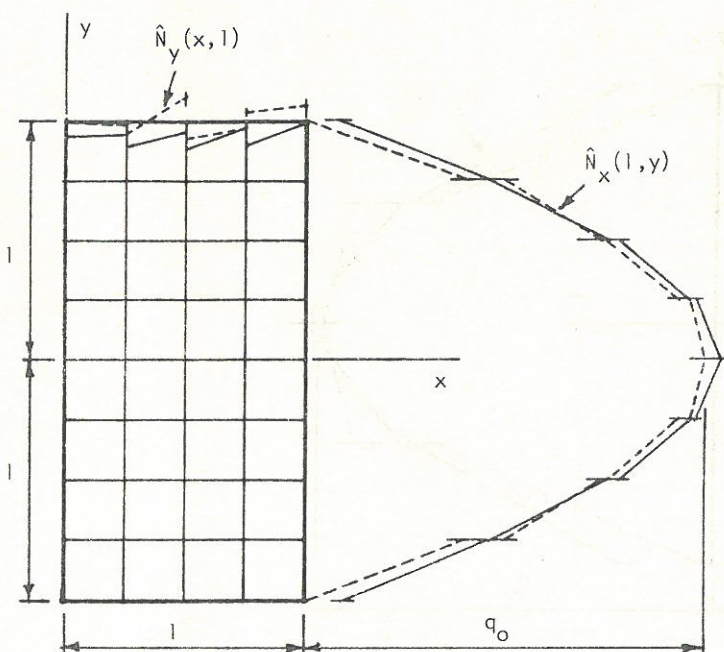
— Standardiperiaate  
 - - - Eikoisperiaate



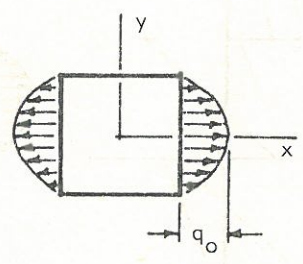
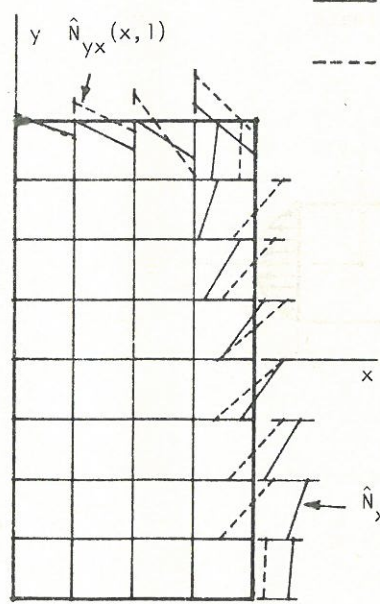
Kuva 9. Taivutuskuormitustapauksessa saatuja tuloksia. 8x3-elementtiverkko.



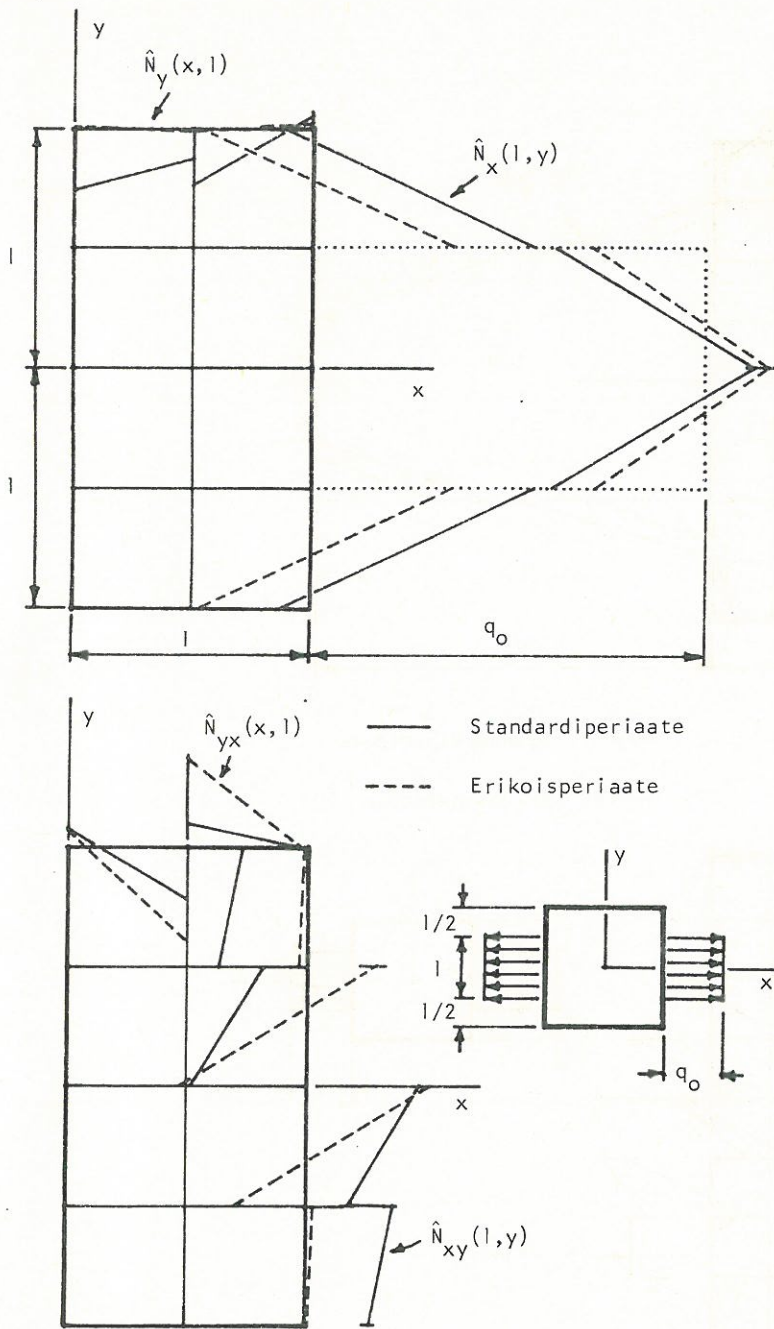
Kuva 10. Parabolisessa kuormitustapauksessa saatuja tuloksia. 4x4-elementtiverkko.



— Standardiperiaate  
 - - - Erikoisperiaate

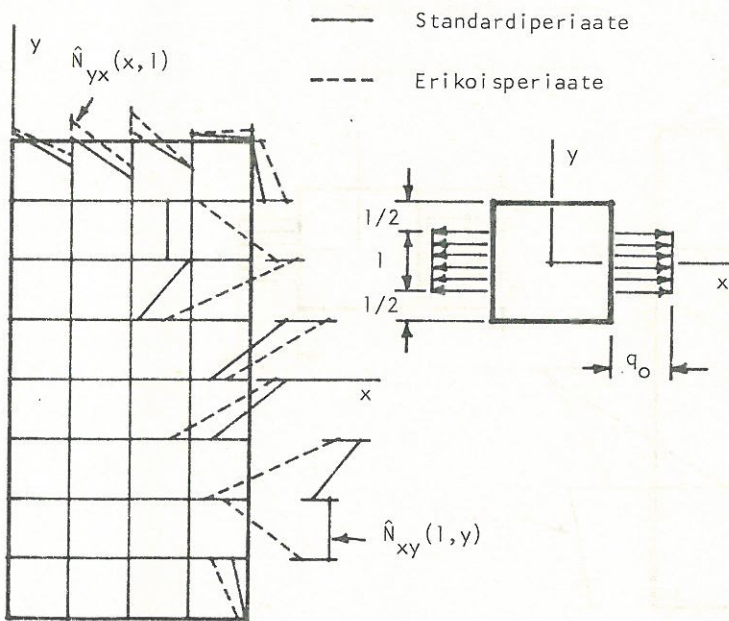
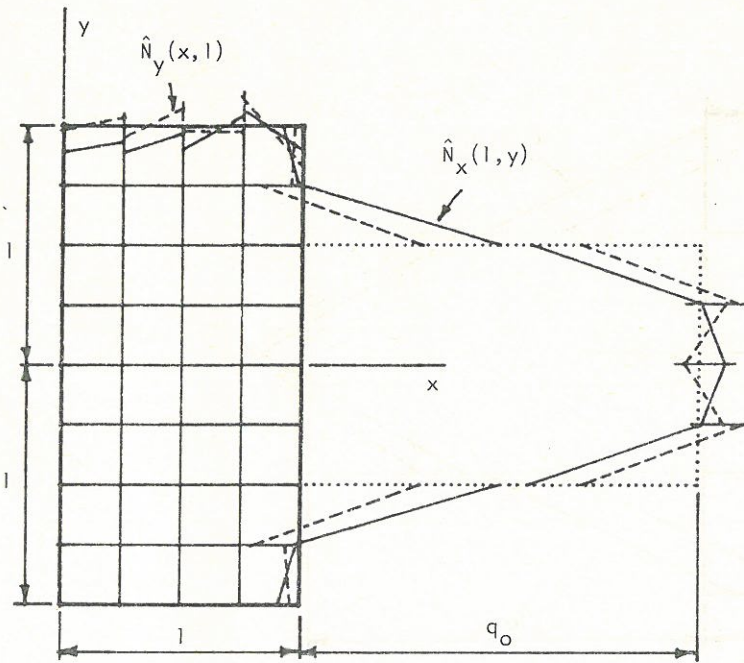


Kuva 11. Parabolisessa kuormitustapauksessa saatuja tuloksia. 3x8-elementtiverkko.



Kuva 12. Askelkuormitustapauksessa saatuja tuloksia. 4x4 elementtiverkko.





Kuva 13. Askelkuormitustapauksessa saatuja tuloksia. 8x8 elementtiverkko.

tunut virtuaalinen siirtymä  $\delta u^*$  tai  $\delta v^*$  voidaan todeta kuvan 2 antaman tulkinnan mukaisesti, että erikoisperiaatteen antamat sisäiset traktiojakautumat ovat silmämääräisesti arvioiden todella keskimäärin tasapainossa ulkoisten traktiojakautumien kanssa. Standardiperiaatteen tapauksessa näin ei ole.

Iteratiivinen menettely antoi kaikissa lasketuissa tapauksissa suppenevia tuloksia. Suppenemisnopeus ei ollut erityisen hyvä. Niinpä tarvittiin karkeasti luokkaa kymmenen iterointikierrosta, jotta tulokset olisivat olleet noin kahden merkitsevän numeron tarkkuudella muuttumattomia. Koska erikoisperiaatteella saatuja jakautumia ei voida pitää ainakaan insinöörin intuitiivisella "silmänormilla" mitattuina oleellisesti parempina verrattuina standardiperiaatteella saatuihin – paikallisestihan edellisellä tavalla saadut tulokset ovat usein virheellisempiä – on todettava, että erikoisperiaatteen käyttö reunalla  $\Gamma_t$  saavutettavan mahdollisen tarkkuuden parantamiseksi ei ole käytännössä siihen uhratun lisätyön arvoisen. Erikoisperiaatetta sovellettaessa joudutaan nimittäin ratkaisemaan joko suoraan epäsymmetrinen yhtälöryhmä tai sitten iteroimaan symmetrisen yhtälöryhmän avulla, jotka molemmat toimenpiteet kasvattavat laskenta-aikaa.

#### HUOMAUTUKSIA

Ikivanhasta taustastaan huolimatta virtuaalisen työn periaate (jo Leonardo da Vincin ja jopa Aristoteleen väitetään soveltaneen sitä /5/) ei ole kadottanut merkitystään, vaan pikemminkin sen asema on viime aikoina pelkästään korostunut numeeristen likimenetelmien lähtökohtana. Lainattakoon myös seuraava toteamus /6/: "It is thus clear that the principle of virtual work is of prime importance in the theory of structures; indeed, it forms the foundation of many other major theorems including, for example, the fundamental theorems of the plastic theory of structures. It is regrettable, therefore, that the principle is so often misunderstood and misused by structural engineering students."

Tässä artikkelissa esitetty virtuaalisen työn periaatteen erikoisversiolla ei ilmeisestikään ole käytännöllistä merkitystä. Sitä voitaisiin kuitenkin mahdollisesti hyödyntää opetuksellisessa mielessä: Tavanomainen virtuaalisen työn periaate ei ole ainoa mahdollisuus. Mitä seuraa, kun luovutaan siinä tehdyistä virtuaalisten siirtymien valinnoista?

Virtuaalisen työn periaate on johdettu edellä käyttäen aluksi jäännösmenetelmän (engl. weighted-residual method /7/) mukaista terminologiaa. Tätä ajattelutapaa on sovellettu mm. lähteessä /3/. Sen tärkeänä etuna on, että tavallisesti pelkästään mekaniikan alueelle rajoittuva monelle ehkä hieman mystinen käsite virtuaalinen työ paljastuukin täysin yleisen matemaattisen menetelmän avulla



tulkittavaksi ja mystiikka ainakin osittain poistuu.

Jäännösmenetelmien yhteydessä sovelletaan usein osittaisintegrointia ja tehdään sitten reunaehtojen painofunktioidelle valintoja, joita ei monastikaan vaivauduta perustelemaan. Poikkeamalla tavanomaisista valinnoista samaan tapaan kuin tässä artikkelissa on tehty ja osoittamalla, mitä seuraa voidaan tavanomaiset formulaatiot saattaa samoin ymmärrettävimmiksi.

Sakkomenettely olisi eräs konservatiivisen systeemin yhteydessä käytettävissä oleva vaihtoehtoinen tapa yrittää tarkentaa voimareunaehtojen toteutumista. Täten muodostettaisiin modifioitu systeemin potentiaalienergian lauseke

$$\Pi_p = \Pi + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_t} (\bar{t} - \bar{t}_0, \bar{\sigma})^T [\alpha] (\bar{t} - \bar{t}_0, \bar{\sigma}) d\Gamma \quad (83)$$

laskelmien pohjaksi. Edellä  $[\alpha]$  on valituista painokertoimista muodostettu lävis-täjämatrissi. Lausekkeen (83) käyttö johtaisi symmetriseen yhtälöryhmään. Kuten yleensä sakkomenettelyssä sakkotermien numeerisen integroinnin suorittamiseen olisi kiinnitettävä huomiota mahdollisen lukkiutumisen estämiseksi. Artikkelissa /8/ on esitetty eräitä muita mahdollisia käsittelytapoja.

Kuitenkin esimerkiksi artikkelissa /9/ esitetyt ajatukset tulosten tarkentamisesta rakenteen reunoilla tuntuvat käytännön kannalta kaikkein lupaavimmilta. Rakenne analysoidaan ensin tavanomaiseen tapaan siirtymämenetelmällä. Jännityksiä laskettaessa ei tyydytäkään suoraan pelkästään venymistä saatuihin tai niistä tasoitettuihin arvoihin, vaan käytetään kaikki mahdollinen sopiva lisäinformaatio apuna. Tämä muodostuu paitsi hyvällä tarkkuudella saaduista venymäkomponenttien arvoista elementin keskellä ja samoin elementin reunojen suuntaisista venymien arvoista reunojen keskikohtilla myös solmuvoimien arvoista ja reunaan  $\Gamma_t$  liittyvässä elementissä annetuista traktiokomponenttien arvoista.

Todettakoon lopuksi, että teoriakohdassa esitetyt johdot on esitetty merkinnällisistä mukavuussyistä johtuen siten, että alueen reuna on ajateltu jaetuksi osaan  $\Gamma_u$ , jolla kaikki siirtymäkomponentit on annettu sekä osaan  $\Gamma_t$ , jolla kaikki traktiokomponentit on annettu. Kuten tavanomaisessa virtuaalisen työn periaatteen tapauksessa ei myöskään tässä käsitellyssä modifioidussa periaatteessa ole teoreettisia ongelmia yleistää käsittely tapaukseen, jossa reunaehdot ovat yleisemmässä muodossa. Kuhunkin reunan pisteeseen on ajateltava paikallinen kierretty koordinaatisto, jonka yksi akseli yhtyy ulkoisen normaalin suuntaan. Reunaehtoina annetaan aina kunkin akselin suuntainen siirtymäkomponentti tai traktiokomponentti, mutta ei kumpiakin /4, s. 238/. Jätetään tapaukseen liittyvien kaavojen johto tässä suorittamatta. Vastaavasti on todettava, että myös esitys (83) voidaan helposti laajentaa yleisempää reunaehtotapausta koskevaksi.



## KIITOKSET

Haluamme kiittää tekn.tri P. Mäkeläistä lähteen /6/ saattamisesta tietoomme. Lisäksi artikkelin ensimmäinen kirjoittaja kiittää Suomen Akatemiaa tähän työhön saadusta taloudellisesta tuesta.

## KIRJALLISUUTTA

- [1] Salonen, E-M., Tasapainoyhtälöiden diskretointi. Rakenteiden Mekanikka 5 (1972) 3, s. 396...421.
- [2] Salonen, E-M. and Paavola, J., The principle of virtual work with discontinuous virtual displacements. Julkaistaneen laitosraporttina. Mekanikan laitos. Teknillinen korkeakoulu 1984.
- [3] Zienkiewicz, O.C., The Finite Element Method. Third edition. McGraw-Hill 1977.
- [4] Malvern, L.E., Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium. Prentice-Hall 1969.
- [5] Oden, J.T., Mechanics of Elastic Structures. McGraw-Hill 1967. s. 230.
- [6] Kong, F.K., Prentis, J.M., Charlton, T.M., Principle of virtual work for a general deformable body - a simple proof. The Structural Engineer 61A (1983) 6, s. 173...179.
- [7] Crandall, S.P., Engineering Analysis. McGraw-Hill 1956.
- [8] Rhee, H.C., Atluri, S.N., On the accuracy of finite element solutions of problems with traction boundary conditions. Appl Math. Modelling 5 (1981), s. 103...108.
- [9] Herrmann, L.R., Improved stress calculations for simple quadrilateral elements. Computers & Structures 6 (1976), s. 141...148.

*Eero-Matti Salonen, apul.prof., Teknillinen korkeakoulu, Mekanikan laitos*

*Juha Paavola, dipl.ins., Valtion teknillinen tutkimuskeskus, Palotekniikan laboratorio*