

AVARUUDESSA KÄYRÄN SAUVAN LIIKEYHTÄLÖT

Tapio Salmi

Rakenteiden Mekaniikka, Vol. 16
No. 1, 1983, s. 1...24

YHTEENVETO: Artikkelissa johdetaan kinemaattiset yhtälöt ja liikeyhtälöt avaruudessa käyrälle sauvalle, jonka poikkileikkauksen ei tarvitse olla vakio. Sauvan siirtymät oletetaan pieniksi ja materiaali homogeeniseksi, lineaarisesti kimmoiseksi ja isotrooppiseksi. Saatuja yleisiä yhtälöitä sovelletaan hoikkaan sauvaan, jonka poikkileikkauksella on kaksi symmetria-akselia. Lopuksi esitetään sovellutusesimerkkeinä ruuviviivan muotoisen sauvan tasapainoyhtälöt ja eräiden tasossa käyrien sauvojen liikeyhtälöt.

JOHDANTO

Rakenteiden mekaniikan tehtävän ratkaisemisessa lähtökohtana ovat liikeyhtälöt. Niitä tarvitaan rakenteen liikkeen tai tasapainon selvittämiseen. Lisäksi niistä voidaan päätellä tärkeitä rakennesysteemin ominaisuuksia, kuten rakenteen stabiilius.

Sauvateorian uranuurtajia olivat *de Saint-Venant* (1843), *Kirchhoff* (1859), *Clebsch* (1862) ja *Rayleigh* (1877) (Szabó [1], Love [2]). Heidän tuloksensa, joihin kuuluivat muissa avaruudessa käyrän hoikan sauvan *tasapainoyhtälöt* sekä suoran sauvan *liikeyhtälöt*, esittää Love [2]. Washizu [3] johtaa hoikan sauvan tasapainoyhtälöt ottamalla huomioon referenssiviivan venymisen, leikkausmuodonmuutoksen sekä poikkipinnan käyristymisen. Wempner [4] tarkastelee hoikan sauvan kinematiikkaa ja tasapainoa, kun muodonmuutokset ovat pienet, mutta poikkileikkauksen rotaatiot ovat "kohtuulliset".

Tässä esityksessä johdetaan avaruudessa käyrän ja poikkileikkaukseltaan muuttuvan sauvan *liikeyhtälöt*, kun sauvan siirtymät ovat pienet. Kinemaattisessa mallissa otetaan huomioon sauvan referenssiviivan venyminen sekä leikkausmuodonmuutokset, mutta ei poikkipinnan käyristymää. Hitausvoimia laskettaessa myös sauvan poikkileikkauksen

rotaatiosta johtuvat hitausvoimat otetaan huomioon. Saatuja yleisiä yhtälöitä sovelletaan hoikkaan sauvaan, jonka poikkileikkauksella on kaksi symmetria-akselia. Lopuksi esitetään sovellutusesimerkkeinä ruuviviivan muotoisen sauvan ja esikierevän sauvan sekä eräiden tasossa käyrien sauvojen liikeyhtälöt.

KINEMAATTISET YHTÄLÖT

Sauvaa sanotaan *käyräksi*, jos sauvan ollessa kuormittamaton, sen pituussuuntaiset säikeet ovat taso- tai avaruuskäyriä. Valitaan jokin sauvan säikeistä *referenssiviivaksi* ja leikataan sauva tätä viivaa vastaan kohtisuoralla tasolla. Tämän tason ja sauvan materiaalialueen leikkauskuviota kutsutaan sauvan *poikkileikkaukseksi*.

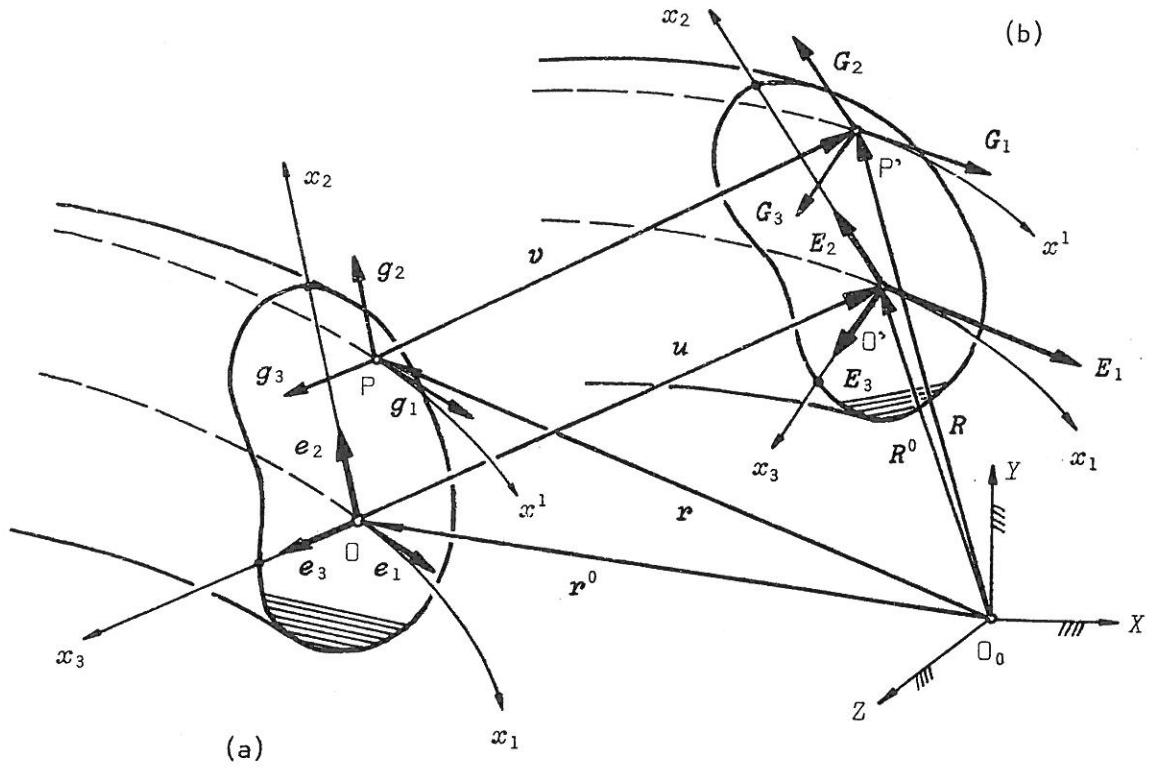
Käyrän sauvan teoria perustetaan tässä esityksessä kinemaattiseen malliin, jossa *siirtymät ovat pienet* ja ne tapahtuvat siten, että referenssiviiva venyy ja taipuu sekä kiertyy, mutta sauvan poikkileikkaustason oletetaan siirtyvän jäykkänä. Tästä seuraa, että sauvan poikkileikkauksen venymät ja liukuma ovat nolliä. Leikkausmuodonmuutosten likimääräiseksi huomioon ottamiseksi poikkileikkaustason kuuluvien materiaali pisteiden oletetaan siirtyvän siten, että loppuasemassa nämä pisteet ovat tasossa, joka voi olla vinossa referenssiviivaa vastaan.

Valitaan käyräviivainen koordinaatti x_1 pitkin sauvan referenssiviivaa ja referenssiviivalle ortogonaaliset koordinaattisuorat x_2 ja x_3 siten, että nämä suunnat yhtyvät poikkileikkauksen *pääsuuntiin*. Liitetään näihin koordinaatteihin ortonormeerattu kantavektorijärjestelmä e_1, e_2, e_3 kuvan 1 mukaisesti.

Kun vektorikolmikko e_1, e_2, e_3 liikkuu vakionopeudella pitkin referenssiviivaa, se kääntyy edetessään. Kääntymisvauhti riippuu vektorista

$$\kappa = (e_{2,1} \cdot e_3) e_1 + (e_{3,1} \cdot e_1) e_2 + (e_{1,1} \cdot e_2) e_3 \quad (1)$$

jolloin on merkitty $\partial(\cdot)/\partial x_i = (\cdot)_{,i}$, $i = 1, 2, 3$. Itse asiassa vektori κ esittää vektorikolmikon e_1, e_2, e_3 kulmanopeusvektoria, kun kolmikko etenee referenssiviivaa pitkin ykkösnopeudella (Salmi [5] s. 118).



Kuva 1 Deformoitumattoman sauvan poikkileikkaus (a) ja deformoituneen sauvan poikkileikkaus (b). Piste O on referenssiviivan piste.

Kun määritellään sauvan alkukaarevuudet κ_2 ja κ_3 sekä alkukierevyys τ relaatioilla

$$\begin{aligned}\kappa_2 &\equiv \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_{1,1} = -\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_{2,1} \\ \kappa_3 &\equiv \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_{1,1} = -\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_{3,1} \\ \tau &\equiv \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_{2,1} = -\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_{3,1}\end{aligned}\quad (2)$$

voidaan vektorikolmikon $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ kääntymisvauhti $\boldsymbol{\kappa}$ esittää muodossa

$$\boldsymbol{\kappa} = \tau \mathbf{e}_1 - \kappa_3 \mathbf{e}_2 + \kappa_2 \mathbf{e}_3 \quad (3)$$

Referenssiviivan kaarevuus k_1 ja kierevyys k_2 määritellään relaatioilla (Väisälä [8])

$$\mathbf{t}_{,1} \equiv k_1 \mathbf{n} \quad \& \quad \mathbf{b}_{,1} \equiv -k_2 \mathbf{n} \quad (4)$$

missä \mathbf{t} on referenssiviivan tangentin suuntainen yksikkövektori, \mathbf{n} referenssiviivan päänormaalien ja \mathbf{b} sivunormaalien suuntainen yksikkövektori.

Merkitsemällä vektoreiden \mathbf{n} ja \mathbf{e}_2 välistä kulmaa x_1 -koordinaatin positiivisesta suunnasta katsottuna vastapäivään symbolilla ψ voidaan osoittaa (Salmi [6] tai Love [2]), että

$$\begin{aligned} \kappa_2 &= k_1 \cos \psi \\ \kappa_3 &= -k_1 \sin \psi \\ \tau &= k_2 + \psi,_{,1} \end{aligned} \quad (5)$$

Tuloksesta nähdään, että vaikka referenssiviiva olisi suora, jolloin sillä ei ole kierevyyttä eli $k_2 \equiv 0$, voi sauvalla olla kierevyys $\tau \neq 0$.

Pisteen P siirtymävektori

$$\mathbf{v}(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{R} - \mathbf{r} \quad (6)$$

sekä referenssiviivan pisteen siirtymävektori

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}(x, 0, 0) = \mathbf{R}^0 - \mathbf{r}^0 \quad (7)$$

Tällöin on merkitty sauvan poikkileikkauksen pisteen P asemavektoria ennen muodonmuutosta symbolilla \mathbf{r} sekä muodonmuutoksen jälkeen \mathbf{R} ja saman poikkileikkauksen referenssiviivan pisteen vastaavia paikkavektoreita symboleilla \mathbf{r}^0 ja \mathbf{R}^0 kuvan 1 mukaisesti.

Kiinnitetään sauvan poikkileikkauksen pisteeseen P kantavektori järjestelmä $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3$ (kuva 1) siten, että

$$\mathbf{g}_i = \mathbf{r},_i \quad , \quad i = 1, 2, 3 \quad (8)$$

Vektorit \mathbf{g}_i ovat koordinaattiviivojen x_i tangenttien suuntaiset.

Kuvan 1 perusteella voidaan vielä kirjoittaa

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}^0 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3 \quad (9)$$

Yksikkövektoreiden derivaatat ovat $\mathbf{e}_{i,1} = \boldsymbol{\kappa} \times \mathbf{e}_i$ eli

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{1,1} &= \kappa_2 \mathbf{e}_2 + \kappa_3 \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_{2,1} &= -\kappa_2 \mathbf{e}_1 + \tau \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_{3,1} &= -\kappa_3 \mathbf{e}_1 - \tau \mathbf{e}_2 \end{aligned} \quad (10)$$

Ottamalla vielä huomioon yhteydet $\mathbf{e}_{i,2} = \mathbf{e}_{i,3} = \mathbf{0}$ ja $\mathbf{r},_1 = \mathbf{e}_1$ sekä $\mathbf{r},_2 = \mathbf{r},_3 = \mathbf{0}$ saadaan yhtälöistä (8) ja (9) tulokset

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_1 &= (1 - x_2 \kappa_2 - x_3 \kappa_3) \mathbf{e}_1 - x_3 \tau \mathbf{e}_2 + x_2 \tau \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{g}_2 &= \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{g}_3 &= \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (11)$$

On huomattava, että g_1 ei ole yksikkövektori ja jos $\tau \neq 0$, se ei ole kohtisuorassa poikkileikkausta vastaan! Siis kantavektoreista g_i vain g_2 ja g_3 ovat keskenään ortogonaaliset.

Kun sauva deformatuu, niin referenssiviivan pisteeseen kiinnitetty ortonormeerattu kantavektorikolmikko e_1, e_2, e_3 siirtyy ja deformatuu vektorikolmikoksi E_1, E_2, E_3 kuvan 1 (b) mukaisesti. Vektori E_1 on deformatuneen palkin referenssiviivan tangentin suuntainen ja E_2 sekä E_3 ovat kääntyneen poikkileikkauksen tasossa koordinaattiviivojen x_2 ja x_3 suuntiin. Koska poikkileikkaustaso säilyy jäykkänä, niin koordinaattiviivojen x_2 ja x_3 välinen kulma säilyy suorana, mistä seuraa, että vektorit E_2 ja E_3 ovat keskenään ortogonaaliset.

Kiinnitetään vielä deformatuneen sauvan poikkileikkauksen pisteeseen P' , joka on alkutilan partikkelin P loppuasema, vektorikolmikko G_1, G_2, G_3 (kuva 1) siten, että

$$G_i = R_{,i} \quad , \quad i = 1, 2, 3 \quad (12)$$

Vektorit G_i ovat koordinaattiviivojen suuntaiset, muttane eivät ole yksikkövektoreita ja vain G_2 ja G_3 ovat keskenään ortogonaaliset.

Kinemaattisten yhtälöiden eli muodonmuutosten ja siirtymien välisen yhteyden johtamiseksi valitaan siirtymiksi referenssiviivan siirtymät $\{u\} \equiv \{u_1 \ u_2 \ u_3\}$ ja poikkileikkauksen rotaatiot $\{\varphi\} \equiv \{\varphi_1 \ \varphi_2 \ \varphi_3\}$ siten, että

$$u = u_1 e_1 + u_2 e_2 + u_3 e_3$$

$$\varphi = \varphi_1 e_1 + \varphi_2 e_2 + \varphi_3 e_3$$

Koordinaatisto x_1, x_2, x_3 valitaan materiaalkoordinaatistoksi, jolloin se ajatellaan kiinnitetyksi partikkeliin. Koordinaatisto kokee saman muodonmuutoksen kuin kappalekin. Tällöin pisteen P' koordinaateilla $x_i, i = 1, 2, 3$ on samat arvot deformaation jälkeenkin, vaikka partikkeli P on siirtynyt uuteen asemaan P' .

Käyrän sauvan geometriaa on edellä kuvattu käyräviivaisessa koordinaatistossa. Tästä johtuu, että sauvan muodonmuutoksia kuvattaessa kannattaa ottaa käyttöön tensoriesitys ja pyrkiä muodostamaan muodonmuutostensorin komponentit.

Käyräviivaisten koordinaatistojen x_1, x_2, x_3 alku- ja lopputilojen metriikkatensoren komponentit ovat

$$g_{ij} \equiv g_i \cdot g_j \quad \& \quad G_{ij} \equiv G_i \cdot G_j \quad (13)$$

Alkutilan metriikkatensoren kovarianteiksi komponenteiksi saadaan tulosten (11) perusteella

$$\begin{aligned} g_{11} &= (1 - x_2 \kappa_2 - x_3 \kappa_3)^2 + (x_3 \tau)^2 + (x_2 \tau)^2 \\ g_{12} &= g_{21} = -x_3 \tau \\ g_{13} &= g_{31} = x_2 \tau \\ g_{22} &= g_{33} = 1 \\ g_{23} &= g_{32} = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

joista sen determinantiksi seuraa

$$g \equiv \det(g_{ij}) = (1 - x_2 \kappa_2 - x_3 \kappa_3)^2 \quad (15)$$

Alkutilan metriikkatensoren kontravariantit komponentit g^{ij} saadaan yhtälöstä †

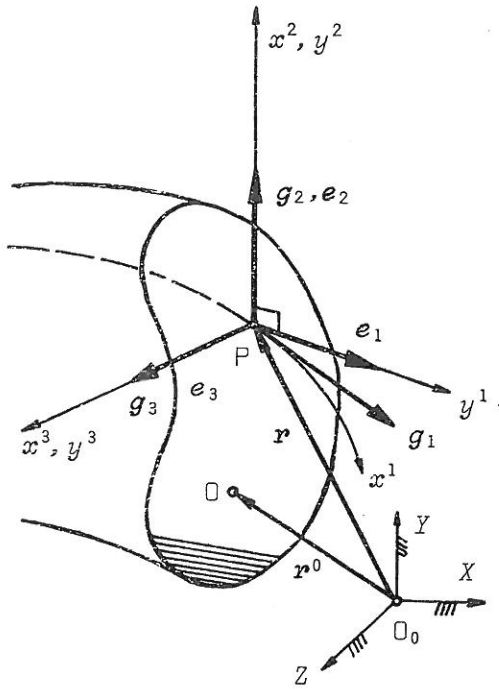
$$g_{ik} g^{jk} = \delta_i^j, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (16)$$

Symboli δ_i^j tarkoittaa Kroneckerin deltaa. Yhtälöryhmän (16) ratkaisu voidaan kirjoittaa muotoon

$$(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1} = \begin{bmatrix} g_{11} & -x_3 \tau & x_2 \tau \\ -x_3 \tau & 1 & 0 \\ x_2 \tau & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{g} \begin{bmatrix} 1 & x_3 \tau & -x_2 \tau \\ x_3 \tau & g_{11} - (x_2 \tau)^2 & -x_2 x_3 \tau^2 \\ -x_2 \tau & -x_2 x_3 \tau^2 & g_{11} - (x_3 \tau)^2 \end{bmatrix}$$

Tarkastellaan seuraavassa koordinaatiston muunnosta käyräviivaisesta x^1, x^2, x^3 -koordinaatistosta karteesiseseen ortogonaaliseen y^1, y^2, y^3 -koordinaatistoon (kuva 2). Tätä koordinaatistomuunnosta tarvitaan muunnettaessa x^1, x^2, x^3 -koordinaatistoon liittyvä muodonmuutostenso-ri karteesiseseen koordinaatistoon, jossa materiaaliyhtälöt kirjoite-
taan.

†Kun sama indeksi esiintyy tulossa kahdesti, on tuloon sovellettava *Einsteinin* summaussääntöä.



Kuva 2 Poikkileikkauksen pisteeseen P liitetty käyräviivainen x^1, x^2, x^3 -koordinaatisto.

Paikkavektorin \mathbf{r} muutos on

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i} dx^i = \mathbf{g}_i dx^i \quad (17)$$

Toisaalta $d\mathbf{r} = dy^j \mathbf{e}_j$, mistä seuraa

$$dx^i \mathbf{g}_i = dy^j \mathbf{e}_j \quad (18)$$

Muodostamalla yhtälön (18) molempien puolien skalaaritulo vektoreiden \mathbf{g}_k , $k=1,2,3$ kanssa ja ottamalla huomioon määritelmä (13) saadaan

$$dx^i g_{ik} = dy^j (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{g}_k), \quad k=1,2,3$$

josta ratkaisemalla seuraa

$$dx^i = g^{ik} (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{g}_k) dy^j$$

Koska toisaalta $dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial y^j} dy^j$, niin saadaan

$$\frac{\partial x^i}{\partial y^j} = g^{ik} (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{g}_k) \quad (19)$$

Laskemalla saadaan matriisi

$$\left(\frac{\partial x^i}{\partial y^j} \right) \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial y^1} & \frac{\partial x^1}{\partial y^2} & \frac{\partial x^1}{\partial y^3} \\ \frac{\partial x^2}{\partial y^1} & \frac{\partial x^2}{\partial y^2} & \frac{\partial x^2}{\partial y^3} \\ \frac{\partial x^3}{\partial y^1} & \frac{\partial x^3}{\partial y^2} & \frac{\partial x^3}{\partial y^3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{g} & 0 & 0 \\ x_3 \tau / \sqrt{g} & 1 & 0 \\ -x_2 \tau / \sqrt{g} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (20)$$

Muodonmuutostensorin komponentit käyräviivaisessa x^1, x^2, x^3 -koordinaatistossa määritellään lausekkeilla (Flügge [7], s. 28)

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (G_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta}), \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3 \quad (21)$$

Ne esitetään jatkossa Lagrangen esitystapaa käyttäen. Muodonmuutostensorin komponentit ϵ_{ij} karteesisessa ortogonaalisessa y^1, y^2, y^3 -koordinaatistossa ovat

$$\epsilon_{ij} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^j} \gamma_{\alpha\beta}, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (22)$$

Soveltamalla tulosta (20) saadaan

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \frac{1}{g} (\gamma_{11} + 2x_3 \tau \gamma_{12} - 2x_2 \tau \gamma_{13}) \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{\sqrt{g}} \gamma_{12} \\ \varepsilon_{13} &= \frac{1}{\sqrt{g}} \gamma_{13}\end{aligned}\quad (23)$$

Poikkileikkauksen venymät γ_{22} ja γ_{33} sekä liukuma γ_{23} ovat nollija, mistä seuraa, että myös $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \varepsilon_{23} = 0$.

Seuraava tehtävä on laskea metriikkatensorin komponentit G_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$. Tätä varten tarvitaan kantavektoreiden G_i , $i = 1, 2, 3$ lausekkeet. Kuvan 1 ja lausekkeen (7) perusteella voidaan kirjoittaa

$$R = R^0 + x_2 E_2 + x_3 E_3 = r^0 + u + x_2 E_2 + x_3 E_3 \quad (24)$$

Yhteyden (12) mukaan

$$G_1 = R_{,1} = r_{,1}^0 + u_{,1} + x_2 E_{2,1} + x_3 E_{3,1} \quad (25)$$

missä $r_{,1}^0 = e_1$ ja

$$u_{,1} = (u_{1,1} - \kappa_2 u_2 - \kappa_3 u_3) e_1 + (u_{2,1} + \kappa_2 u_1 - \tau u_3) e_2 + (u_{3,1} + \kappa_3 u_1 + \tau u_2) e_3$$

Deformoituneen sauvan poikkileikkauksen kantavektorit E_2 ja E_3 ovat

$$\begin{aligned}E_2 &= e_2 + \varphi \times e_2 = -\varphi_3 e_1 + e_2 + \varphi_1 e_3 \\ E_3 &= e_3 + \varphi \times e_3 = +\varphi_2 e_1 - \varphi_1 e_2 + e_3\end{aligned}\quad (26)$$

Käyttämällä hyväksi yhtälöitä (10) saadaan

$$\begin{aligned}E_{2,1} &= (-\varphi_{3,1} - \kappa_2 - \kappa_3 \varphi_1) e_1 + (-\kappa_2 \varphi_3 - \tau \varphi_1) e_2 + (-\kappa_3 \varphi_3 + \tau + \varphi_{1,1}) e_3 \\ E_{3,1} &= (\varphi_{2,1} - \kappa_3 + \kappa_2 \varphi_1) e_1 + (\kappa_2 \varphi_2 - \tau - \varphi_{1,1}) e_2 + (\kappa_3 \varphi_2 - \tau \varphi_1) e_3\end{aligned}\quad (27)$$

Tällöin kantavektoriksi G_1 seuraa

$$\begin{aligned}G_1 &= (1 + u_{1,1} - \kappa_2 u_2 - \kappa_3 u_3 - x_2 \varphi_{3,1} + x_3 \varphi_{2,1} - x_2 \kappa_2 - x_3 \kappa_3 - x_2 \kappa_3 \varphi_1 + x_3 \kappa_2 \varphi_1) e_1 \\ &+ (u_{2,1} + \kappa_2 u_1 - \tau u_3 - x_2 \kappa_2 \varphi_3 - x_2 \tau \varphi_1 + x_3 \kappa_2 \varphi_2 - x_3 \varphi_{1,1} - x_3 \tau) e_2 \\ &+ (u_{3,1} + \kappa_3 u_1 + \tau u_2 - x_2 \kappa_3 \varphi_3 - x_3 \tau \varphi_1 + x_3 \kappa_3 \varphi_2 + x_2 \varphi_{1,1} + x_2 \tau) e_3\end{aligned}\quad (28)$$

Kantavektorit G_2 ja G_3 ovat

$$\begin{aligned}G_2 &= E_2 = -\varphi_3 e_1 + e_2 + \varphi_1 e_3 \\ G_3 &= E_3 = +\varphi_2 e_1 - \varphi_1 e_2 + e_3\end{aligned}\quad (29)$$

Käyttämällä määritelmiä (13) ja (21) sekä tuloksia (14), (28) ja (29) päädytään muodonmuutostensorin komponenttien γ_{ij} lausekkeisiin

$$\begin{aligned}\gamma_{11} &= \sqrt{g} [u_{1,1} - \kappa_2 u_2 - \kappa_3 u_3 - x_2 \varphi_{3,1} + x_3 \varphi_{2,1} - (x_2 \kappa_3 - x_3 \kappa_2) \varphi_1] + x_2 \tau^2 u_2 + x_3 \tau^2 u_3 \\ &\quad + \tau (x_2 \kappa_3 - x_3 \kappa_2) (u_1 - x_2 \varphi_3 + x_3 \varphi_2) + \tau (x_2^2 + x_3^2) \varphi_{1,1} - x_3 \tau u_{2,1} + x_2 \tau u_{3,1} \\ \gamma_{12} &= \frac{1}{2} (-\varphi_3 + u_{2,1} - x_3 \varphi_{1,1} + \kappa_2 u_1 - \tau u_3 + x_3 \kappa_3 \varphi_3 + x_3 \kappa_2 \varphi_2) \\ \gamma_{13} &= \frac{1}{2} (\varphi_2 + u_{3,1} + x_2 \varphi_{1,1} + \kappa_3 u_1 + \tau u_2 - x_2 \kappa_2 \varphi_2 - x_2 \kappa_3 \varphi_3)\end{aligned}\quad (30)$$

Lausekkeita (30) johdettaessa oletetaan, että siirtymät $\{u_1, u_2, u_3\}$ ja rotaatiot $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ ovat pienet toisin sanoen niiden epälineaariset termit on jätetty huomioon ottamatta.

Muodonmuutostensorin komponenteiksi ϵ_{ij} seuraa lausekkeista (30) ja yhtälöistä (23)

$$\begin{aligned}\epsilon_{11} &= \frac{1}{\sqrt{g}} (u_{1,1} - \kappa_2 u_2 - \kappa_3 u_3 - x_2 \varphi_{3,1} + x_3 \varphi_{2,1} - x_2 \kappa_3 \varphi_1 + x_3 \kappa_2 \varphi_1 - x_3 \tau \varphi_3 - x_2 \tau \varphi_2) \\ \epsilon_{12} &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{g}} (u_{2,1} + \kappa_2 u_1 - \tau u_3 - \varphi_3 + x_3 \kappa_3 \varphi_3 + x_3 \kappa_2 \varphi_2 - x_3 \varphi_{1,1}) \\ \epsilon_{13} &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{g}} (u_{3,1} + \kappa_3 u_1 + \tau u_2 + \varphi_2 - x_2 \kappa_2 \varphi_2 - x_2 \kappa_3 \varphi_3 + x_2 \varphi_{1,1})\end{aligned}\quad (31)$$

Merkitään sauvan poikkileikkauksen pisteen P paikkavektoria paikalliskoordinaatistossa $Ox_1x_2x_3$

$$\mu^0 = x_2 e_2 + x_3 e_3 \quad (32)$$

Määrittelemällä "muodonmuutosvektori" ϵ relaatiolla

$$\epsilon \equiv \epsilon_{11} e_1 + 2 \epsilon_{12} e_2 + 2 \epsilon_{13} e_3 \quad (33)$$

voidaan tulokset (31) kirjoittaa tiiviiseen asuun

$$\sqrt{g} \epsilon = u_{,1} + e_1 \times \varphi + \varphi_{,1} \times \mu^0 \quad (34)$$

Pisteen P (kuva 1) siirtymävektoriksi v saadaan

$$v = u + x_2 E_2 + x_3 E_3 - \mu^0 = u + \varphi \times \mu^0 \quad (35)$$

eli

$$v = (u_1 - x_2 \varphi_3 + x_3 \varphi_2) e_1 + (u_2 - x_3 \varphi_1) e_2 + (u_3 + x_2 \varphi_1) e_3 \quad (36)$$

Tuloksesta (36) nähdään, että poikkileikkauksen pisteiden koordinaattiviivojen suuntaiset siirtymäkomponentit ovat pisteen koordinaattien x_2 ja x_3 lineaarisia funktioita.

MATERIAALIYHTÄLÖT

Kun oletetaan, että sauvan materiaali on homogeenista, isotrooppista ja lineaarisesti kimmoista, voidaan *jännitystensorin* kontravariantit komponentit σ^{ij} karteesisessa ortogonaalisessa y^1, y^2, y^3 -koordinaatistossa kirjoittaa muotoon

$$\begin{aligned}\sigma^{11} &= E \epsilon_{11} \\ \sigma^{12} &= 2G \epsilon_{12} \\ \sigma^{13} &= 2G \epsilon_{13}\end{aligned}\tag{37}$$

missä E on materiaalin kimmomoduuli ja G liukumoduuli. Ensimmäinen näistä yhtälöistä edellyttää ehtoja $\epsilon_{22} = \epsilon_{33} = 0$, jotka hoikalla sauvalla pätevät paremmin kuin aiemmin mainitut ehdot $\epsilon_{22} = \epsilon_{33} = 0$. Sauvan poikkileikkauksen suuntaiset normaali-jännitykset σ^{22} ja σ^{33} sekä leikkausjännitys σ^{23} oletetaan niin pieniksi muihin jännityksiin verrattuna, että niitä ei tarvitse ottaa huomioon muodonmuutoksia laskettaessa.

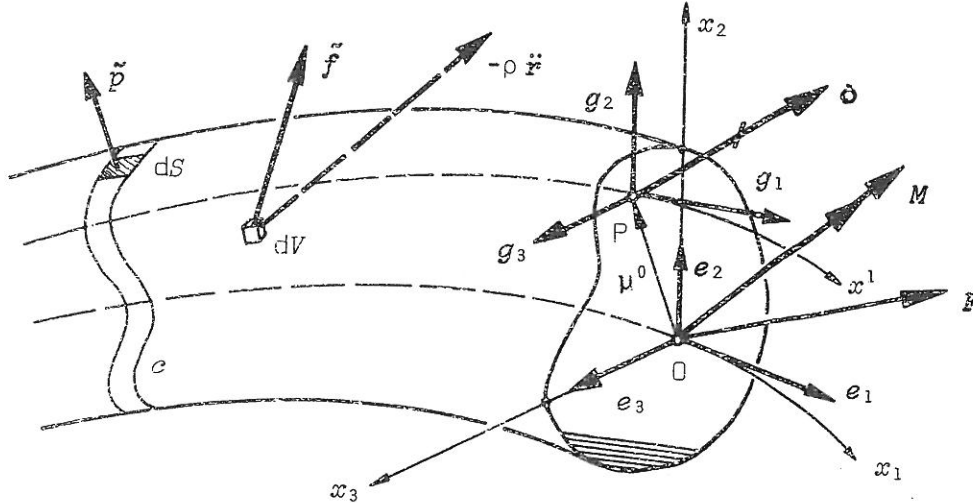
POIKKILEIKKAUKSEN JÄNNITYSRESULTANTIT

Deformoitumattoman sauvan geometriaa käyttäen poikkileikkauksen pisteeseen P vaikuttava jännitysvektori on (Wempner [4], s. 78)

$$\sigma \equiv \frac{1}{\sqrt{g^{11}}} \tau^{1j} g_j = \sqrt{g} (\tau^{11} g_1 + \tau^{12} g_2 + \tau^{13} g_3)\tag{38}$$

missä τ^{ij} ovat jännitystensorin kontravariantit komponentit käyräviivaisessa x^1, x^2, x^3 -koordinaatistossa (kuva 3).[†]

[†] Tässä esitysmuodossa on kyse *Piolan-Kirchhoffin* 1.lajin eli *Lagrangen* jännitystensorin komponenteista. Yhtälöissä (38) pitäisi käyttää *Piolan-Kirchhoffin* 2.lajin eli *Kirchhoffin* jännitystensoria. Näiden ero kuitenkin häviää, kun sauvan siirtymät ovat pienet.



Kuva 3 Sauvan poikkileikkauksen jännitysresultantit F ja M .

Komponentit τ^{ij} saadaan lausutuiksi y^1, y^2, y^3 -koordinaatiston jännityskomponenttien avulla 2. kertaluvun tensorin kontravarianttien komponenttien yleistä muunnoskaavaa käyttäen:

$$\tau^{ij} = \frac{\partial x^i}{\partial y^\lambda} \frac{\partial x^j}{\partial y^\mu} \sigma^{\lambda\mu} \quad (39)$$

Yhtälön (20) perusteella saadaan

$$\begin{aligned} \tau^{11} &= \frac{1}{g} \sigma^{11} \\ \tau^{12} &= \frac{x_3^\top}{g} \sigma^{11} + \frac{1}{\sqrt{g}} \sigma^{12} \\ \tau^{13} &= -\frac{x_2^\top}{g} \sigma^{11} + \frac{1}{\sqrt{g}} \sigma^{13} \end{aligned} \quad (40)$$

jolloin jännitysvektoriksi (38) saadaan

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{g}} \sigma^{11} g_1 + \left(\frac{x_3^\top}{\sqrt{g}} \sigma^{11} + \sigma^{12} \right) g_2 + \left(-\frac{x_2^\top}{\sqrt{g}} \sigma^{11} + \sigma^{13} \right) g_3 \quad (41)$$

Yhtälöitä (11) käyttämällä voidaan jännitysvektori σ esittää kantaa e_1, e_2, e_3 käyttäen seuraavasti:

$$\sigma = \sigma^{1j} e_j \quad (42)$$

Poikkileikkauksen pisteeseen P liitettyyn poikkileikkauksessa olevaan differentiaaliseen pinta-alaan dA_1 vaikuttava voimavektori $d\mathbf{F}$ on (Flügge [7], s.48)

$$d\mathbf{F} = dF^j \mathbf{g}_j = \frac{\tau^{1j}}{\sqrt{g^{11}}} dA_1 \mathbf{g}_j = \sigma dA_1 \quad (43)$$

Koska lisäksi

$$dA = dA_i \mathbf{g}^i = \mathbf{g}_2 \times \mathbf{g}_3 \sqrt{g^{11}} dx_2 dx_3 = \sqrt{g} \sqrt{g^{11}} \mathbf{g}^1 dx_2 dx_3$$

missä vektorit \mathbf{g}^i ovat pinnan pisteeseen P liitetty kontravariantti kanta, niin

$$dA_1 = \sqrt{g g^{11}} dx_2 dx_3 = dx_2 dx_3 = dA \quad (44)$$

Yhtälön (42) perusteella voidaan nyt kirjoittaa

$$d\mathbf{F} = \sigma dA = \sigma^{1j} \mathbf{e}_j dA \quad (45)$$

Sauvan poikkileikkauksen referenssiviivan pisteeseen O kootun dynaamin (\mathbf{F}, \mathbf{M}) komponentit eli poikkileikkauksen *jännitysresultantit* ovat

$$\mathbf{F} = F^j \mathbf{e}_j = \iint_A d\mathbf{F} = \iint_A \sigma dA = \iint_A \sigma^{1j} dA \mathbf{e}_j \quad (46)$$

$$\mathbf{M} = M^j \mathbf{e}_j = \iint_A \boldsymbol{\mu}^0 \times d\mathbf{F} = \iint_A \boldsymbol{\mu}^0 \times \sigma dA = \iint_A \boldsymbol{\mu}^0 \times \sigma^{1j} dA \mathbf{e}_j \quad (47)$$

missä $\boldsymbol{\mu}^0 = x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3$. Komponenttimuodossa jännitysresultanteilla on lausekkeet

$$F^1 = \iint_A \sigma^{11} dA, \quad F^2 = \iint_A \sigma^{12} dA, \quad F^3 = \iint_A \sigma^{13} dA \quad (48)$$

$$M^1 = \iint_A (x_2 \sigma^{13} - x_3 \sigma^{12}) dA$$

$$M^2 = \iint_A x_3 \sigma^{11} dA \quad (49)$$

$$M^3 = -\iint_A x_2 \sigma^{11} dA$$

Otetaan käyttöön poikkipinnan *yleistetyt tulomomentit*

$$I_{ij} = \iint_A \frac{1}{\sqrt{g}} x_2^i x_3^j dA = \iint_A \frac{x_2^i x_3^j}{1-x_2\kappa_2-x_3\kappa_3} dx_2 dx_3 \quad (50)$$

Lausekkeessa (50) $\sqrt{g} = 1 - x_2\kappa_2 - x_3\kappa_3 \neq 0$, sillä sauvan pituussuuntaiset säikeet eivät voi olla kohtisuorassa sauvan referenssiviivaa vastaan. Sauvan jäykkyyssuureet voidaan nyt koota *dyadeiksi*[†] (Väisälä [8], s.147)

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= EI_{00} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + GI_{00} \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + GI_{00} \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{S}_1 &= EI_{01} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 - EI_{10} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 - GI_{01} \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 + GI_{10} \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{S}_2 &= -GI_{01} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + GI_{10} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 + EI_{01} \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 - EI_{10} \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{I} &= G(I_{20} + I_{02}) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + EI_{02} \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 - EI_{11} \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 - EI_{11} \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2 + EI_{20} \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (51)$$

Jännitysresultantit \mathbf{F} ja \mathbf{M} saadaan lausutuksi siirtymien \mathbf{u} ja $\boldsymbol{\varphi}$ avulla, kun yhteydet (31) ja (37) otetaan huomioon. Dyadialgebraa käyttäen voidaan kirjoittaa

$$\mathbf{F} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{u},_1 + \mathbf{e}_1 \times \boldsymbol{\varphi}) + \mathbf{S}_1 \cdot \boldsymbol{\varphi},_1 \quad (52)$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{S}_2 \cdot (\mathbf{u},_1 + \mathbf{e}_1 \times \boldsymbol{\varphi}) + \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\varphi},_1 \quad (53)$$

Tulosten (52) ja (53) avulla voidaan myöhemmin johdettavat liikeyhtälöt kirjoittaa siirtymien avulla.

SAUVAN LIIKEYHTÄLÖT

Deformoitumattoman sauvan differentiaalielementin tilavuus

$$dV = \sqrt{g} dx_1 dx_2 dx_3 = \sqrt{g} dx_1 dA \quad (54)$$

sekä sauvan pinnan differentiaalisen alueen pinta-ala

$$dS = \sqrt{g} dx_1 dc \quad (55)$$

missä c on poikkileikkauskuvion reunakäyrän kaarenpituus.

[†]Tässä yhteydessä ei ole tarpeen tutkia, ovatko dyadit (51) aitoja, toisin sanoen ovatko ne tensoreita (Budiasky [9]).

Seuraavassa määritellään käyräviivaisen koordinaatiston metriikan avulla eräitä vektoreita, jotka jatkossa ilmaistaan karteesisessä koordinaatistossa. Merkitsemällä sauvan tilavuusvoimatiheyttä symbolilla $\tilde{\mathbf{f}}$ sekä pintavoimatiheyttä $\tilde{\mathbf{p}}$ saadaan annettujen voimien referenssiiviivalle lasketuksi rezultoivaksi pituustiheydeksi

$$\tilde{\mathbf{q}}(x_1) = \iint_A \tilde{\mathbf{f}} \sqrt{g} \, dA + \int_c \tilde{\mathbf{p}} \sqrt{g} \, dc \quad (56)$$

sekä referenssiiviivalle kootun momentin pituustiheydeksi

$$\tilde{\mathbf{e}}(x_1) = \iint_A \boldsymbol{\mu}^0 \times \tilde{\mathbf{f}} \sqrt{g} \, dA + \int_c \boldsymbol{\mu}^0 \times \tilde{\mathbf{p}} \sqrt{g} \, dc \quad (57)$$

Sauvan päätypintaan referenssiiviivan pisteeseen koottu päätypintaan vaikuttavien annettujen voimien dynaami olkoon $(\tilde{\mathbf{F}}, \tilde{\mathbf{M}})$.

Liikkeyhtälöiden johtamisessa käytetään *d'Alembertin* formalismia ja siihen liittyvää hitausvoima-ajattelutapaa. Hitausvoimatiheys on $-\rho \ddot{\mathbf{r}}$, missä ρ on tiheys ja $\ddot{\mathbf{r}}$ on sauvan partikkelin kiihtyvyydsvektori, jolloin on merkitty $d^2\mathbf{r}/dt^2 = \ddot{\mathbf{r}}$.

Rezultoivaksi hitausvoimien pituustiheydeksi seuraa

$$\mathbf{H} = - \iint_A \rho \ddot{\mathbf{r}} \sqrt{g} \, dA \quad (58)$$

ja rezultoivaksi hitausvoimien momenttien pituustiheydeksi referenssiiviivalle

$$\mathbf{MH} = - \iint_A \boldsymbol{\mu}^0 \times \rho \ddot{\mathbf{r}} \sqrt{g} \, dA \quad (59)$$

Partikkelin kiihtyvyydsvektori $\ddot{\mathbf{r}}$ voidaan esittää myös muodossa $\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{v}}$, missä \mathbf{v} on partikkelin siirtymävektori (36). Kirjoittamalla

$$\ddot{\mathbf{v}} = (\ddot{u}_1 + x_3 \ddot{\varphi}_2 - x_2 \ddot{\varphi}_3) \mathbf{e}_1 + (\ddot{u}_2 - x_3 \ddot{\varphi}_1) \mathbf{e}_2 + (\ddot{u}_3 + x_2 \ddot{\varphi}_1) \mathbf{e}_3 = \ddot{\mathbf{u}} + \ddot{\boldsymbol{\varphi}} \times \boldsymbol{\mu}^0 \quad (60)$$

saadaan hitausvoimien ja hitausvoimien momentin viivatiheyksien lausekkeiksi

$$\mathbf{H} = - \iint_A \rho \ddot{\mathbf{v}} \sqrt{g} \, dA = - \iint_A \rho (\ddot{\mathbf{u}} + \ddot{\boldsymbol{\varphi}} \times \boldsymbol{\mu}^0) \sqrt{g} \, dA \quad (61)$$

$$\mathbf{MH} = - \iint_A \boldsymbol{\mu}^0 \times \rho \ddot{\mathbf{v}} \sqrt{g} \, dA = - \iint_A \boldsymbol{\mu}^0 \times \rho (\ddot{\mathbf{u}} + \ddot{\boldsymbol{\varphi}} \times \boldsymbol{\mu}^0) \sqrt{g} \, dA \quad (62)$$

Yleistettyjen hitaustulojen

$$J_{ij} = \iint \rho x_2^i x_3^j \sqrt{g} \, dA \quad (63)$$

ja vektorin

$$\mathbf{J}_1 = J_{10} \mathbf{e}_2 + J_{01} \mathbf{e}_3 \quad (64)$$

sekä dyadin

$$\mathbf{J} = (J_{20} + J_{02}) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + J_{02} \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 - J_{11} \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 - J_{11} \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2 + J_{20} \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3 \quad (65)$$

avulla voidaan referenssiviivalle koottujen hitausvoimien ja hitausvoimien momenttien pituustiheyksien lausekkeet lausua siirtymien \mathbf{u} ja $\boldsymbol{\varphi}$ aikaderivaattojen avulla seuraavasti

$$\mathbf{H} = -J_{00} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{J}_1 \times \ddot{\boldsymbol{\varphi}} \quad (66)$$

$$\mathbf{M}_1 = -\mathbf{J}_1 \times \ddot{\mathbf{u}} - \mathbf{J} \cdot \ddot{\boldsymbol{\varphi}} \quad (67)$$

Annetaan sauvalle pieni virtuaalinen siirtymäkenttä $\{\delta\mathbf{u}, \delta\boldsymbol{\varphi}\}$, missä $\delta\mathbf{u} = \delta u_1 \mathbf{e}_1 + \delta u_2 \mathbf{e}_2 + \delta u_3 \mathbf{e}_3$ ja $\delta\boldsymbol{\varphi} = \delta\varphi_1 \mathbf{e}_1 + \delta\varphi_2 \mathbf{e}_2 + \delta\varphi_3 \mathbf{e}_3$. Tällöin ulkoisten voimien virtuaalinen työ

$$\delta W_{\mathbf{u}} = \int_a^b (\tilde{\mathbf{F}} \cdot \delta\mathbf{u} + \tilde{\mathbf{M}} \cdot \delta\boldsymbol{\varphi}) + \int_{x_1=a}^b (\tilde{\mathbf{q}} \cdot \delta\mathbf{u} + \tilde{\mathbf{c}} \cdot \delta\boldsymbol{\varphi}) \, dx_1 \quad (68)$$

Sauvan päätyppintojen kohdilla käyräviivaisella koordinaatilla on arvot $x_1 = a$ ja $x_1 = b$. Sisäisten voimien virtuaaliseksi työksi saadaan

$$\delta W_S = - \int_a^b \iint_A \sigma^{ij} \delta \epsilon_{ij} \sqrt{g} \, dA \, dx_1 \quad (69)$$

joka merkinnöin (33) ja (44) voidaan esittää muodossa

$$\delta W_S = - \int_a^b \iint_A \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \boldsymbol{\epsilon} \sqrt{g} \, dA \, dx_1 \quad (70)$$

Toisaalta kinemaattisen yhtälön (34) perusteella saadaan

$$\sqrt{g} \delta \boldsymbol{\epsilon} = \delta \mathbf{u}_{,1} + \mathbf{e}_1 \times \delta \boldsymbol{\varphi} + \delta \boldsymbol{\varphi}_{,1} \times \boldsymbol{\mu}^0 \quad (71)$$

josta seuraa

$$\delta W_S = - \int_a^b \left[\iint_A \boldsymbol{\sigma} \, dA \cdot \delta \mathbf{u}_{,1} + \iint_A \boldsymbol{\sigma} \, dA \cdot \mathbf{e}_1 \times \delta \boldsymbol{\varphi} - \iint_A \boldsymbol{\sigma} \times \boldsymbol{\mu}^0 \, dA \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}_{,1} \right] \, dx_1$$

Ottamalla huomioon jännitysresultanttien lausekkeet (46) ja (47) voidaan sisäisten voimien virtuaalinen työ sieventää muotoon

$$\delta W_S = - \int_a^b (F \cdot \delta u_{,1} + F \cdot e_1 \times \delta \varphi + M \cdot \delta \varphi_{,1}) dx_1$$

Osittaisintegroinnilla seuraa

$$\delta W_S = - \int_a^b (F \cdot \delta u + M \cdot \delta \varphi) + \int_a^b (F_{,1} \cdot \delta u - F \times e_1 \cdot \delta \varphi + M_{,1} \cdot \delta \varphi) dx_1 \quad (72)$$

Hitausvoimien virtuaalinen työ on

$$\delta W_H = \int_a^b (H \cdot \delta u + \tilde{M} \cdot \delta \varphi) dx_1 \quad (73)$$

Virtuaalisten siirtymien lauseen mukaan $\delta W_u + \delta W_S + \delta W_H = 0$. Kun virtuaalinen siirtymäkenttä $\{ \delta u, \delta \varphi \}$ on mielivaltainen, niin tuloksista (68), (72) ja (73) päädytään käyrän sauvan liikeyhtälöihin

$$F_{,1} + \tilde{q} + H = 0 \quad (74)$$

$$M_{,1} + e_1 \times F + \tilde{c} + \tilde{M} = 0 \quad (75)$$

Käyrän sauvan liikeyhtälöt ovat komponenttimuodossa

$$\begin{aligned} F_{,1}^1 - \kappa_2 F^2 - \kappa_3 F^3 + \tilde{q}^1 + H^1 &= 0 \\ F_{,1}^2 + \kappa_2 F^1 - \tau F^3 + \tilde{q}^2 + H^2 &= 0 \\ F_{,1}^3 + \kappa_3 F^1 + \tau F^2 + \tilde{q}^3 + H^3 &= 0 \\ M_{,1}^1 - \kappa_2 M^2 - \kappa_3 M^3 + \tilde{c}^1 + \tilde{M}^1 &= 0 \\ M_{,1}^2 + \kappa_2 M^1 - \tau M^3 - F^3 + \tilde{c}^2 + \tilde{M}^2 &= 0 \\ M_{,1}^3 + \kappa_3 M^1 + \tau M^2 + F^2 + \tilde{c}^3 + \tilde{M}^3 &= 0 \end{aligned} \quad (76)$$

Virtuaalisten siirtymien lause antaa reunaehdoiksi

$$\int_a^b [(\tilde{F} - F) \cdot \delta u + (\tilde{M} - M) \cdot \delta \varphi] = 0 \quad (77)$$

josta seuraa, että sauvan päissä $x_1 = a$ ja $x_1 = b$ on oltava

$$\begin{aligned} \tilde{F} &= F & \text{tai} & & \delta u &= 0 \\ \tilde{M} &= M & \text{tai} & & \delta \varphi &= 0 \end{aligned} \quad (78)$$

Asettamalla liikeyhtälöissä (74), (75) hitausvoimat nolliksi saadaan käyrän sauvan tasapainoyhtälöt

$$F_{,1} + \tilde{q} = 0 \quad (79)$$

$$M_{,1} + e_1 \times F + \tilde{c} = 0 \quad (80)$$

Tasapainoyhtälöitä (79) ja (80) kutsutaan usein Kirchhoffin-Clebshin yhtälöiksi (Love [2], s. 387).

Käyrän sauvan liikeyhtälöt siirtymien u ja φ avulla lausuttuna ovat tulosten (52), (53), (66) ja (67) mukaan

$$-J_{00} \ddot{u} + J_1 \times \ddot{\varphi} + [A \cdot (u_{,1} + e_1 \times \varphi) + S_1 \cdot \varphi_{,1}]_{,1} + \tilde{q} = 0 \quad (81)$$

$$-J_1 \times \ddot{u} - J \cdot \ddot{\varphi} + [S_2 \cdot (u_{,1} + e_1 \times \varphi) + I \cdot \varphi_{,1}]_{,1} + e_1 \times [A \cdot (u_{,1} + e_1 \times \varphi) + S_1 \cdot \varphi_{,1}] + \tilde{c} = 0 \quad (82)$$

Skalaari J_{00} , vektori J_1 sekä dyadi J sisältävät tiedot sauvan massasta ja dyadit A , S_1 , S_2 ja I sauvan jäykkyyksistä. Vektorit \tilde{q} ja \tilde{c} sisältävät tiedot sauvalle annetuista ulkoisista kuormituksista.

HOIKKA SAUVA, JONKA POIKKILEIKKAUS ON KAKSOISSYMMETRINEN

Hoikalla sauvalla tarkoitetaan sauvaa, jonka poikkileikkausmitat ovat pienet verrattuna sauvan kaarevuus- ja kierevyyssäteisiin. Tällöin voidaan kirjoittaa

$$\sqrt{g} = 1 - x_2 \kappa_2 - x_3 \kappa_3 \approx 1 \quad (83)$$

Jos sauvan poikkileikkauksella on kaksi symmetria-akselia, joiden leikkauspisteen kautta kulkeva pituussuuntainen säie valitaan referenssiiviivaksi ja jos lisäksi sauva on hoikka, niin tulomomentit $I_{ij} = 0$ ja $J_{ij} = 0$, kun toinen tai molemmat indeksit i, j ovat parittomat. Tämän perusteella

$$S_1 = S_2 = 0, \quad I = G(I_{20} + I_{02}) e_1 e_1 + EI_{02} e_2 e_2 + EI_{20} e_3 e_3 \quad (84)$$

$$J_1 = 0, \quad J = (J_{20} + J_{02}) e_1 e_1 + J_{02} e_2 e_2 + J_{20} e_3 e_3 \quad (85)$$

Tällöin sauvan liikeyhtälöt menevät muotoon

$$-J_{00} \ddot{u} + [A \cdot (u_{,1} + e_1 \times \varphi)]_{,1} + \tilde{q} = 0 \quad (86)$$

$$-J \cdot \ddot{\varphi} + (I \cdot \varphi_{,1})_{,1} + e_1 \times [A \cdot (u_{,1} + e_1 \times \varphi)] + \tilde{c} = 0 \quad (87)$$

Liikeyhtälöt ovat tässä tapauksessa vain staattisesti kytketyt.

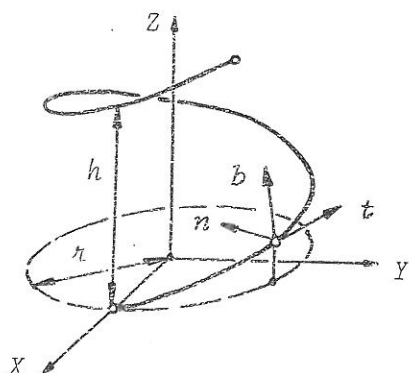
RUUVIVIIVAN MUOTOISEN SAUVAN TASAPAINOYHTÄLÖT

Sovelletaan yhtälöitä (76) sauvaan, jonka referenssiviiva muodostaa avaruuteen ruuviviivan. Ruuviviivan säde on κ ja nousu yhdellä kierroksella h . Ruuviviivan nousukulma $\alpha = \arctan(h/2\pi\kappa)$. Ruuviviivan kaarevuus k_1 ja kierevyys k_2 ovat vakioita

$$k_1 = \frac{\kappa}{\kappa^2 + (h/2\pi)^2} = \frac{1/\kappa}{1 + \tan^2\alpha} = \frac{1}{\kappa} \cos^2\alpha$$

$$k_2 = \frac{h/2\pi}{\kappa^2 + (h/2\pi)^2} = \frac{h}{2\pi} \frac{1/\kappa^2}{1 + \tan^2\alpha} = \frac{1}{\kappa} \sin\alpha \cos\alpha$$

Tarkastellaan sauvaa, jonka poikkileikkauksen pääakselit ovat referenssiviivan jokaisessa pisteessä referenssiviivan päänormaalini \mathbf{n} ja sivunormaalini \mathbf{b} suuntaiset (kuva 4). Tällöin sauvan alkukaarevuudet κ_2 ja κ_3 sekä alkukierevyys τ ovat tulosten (5) mukaan



Kuva 4 Ruuviviivan muotoinen sauva.

$$\kappa_2 = k_1 \cos 0^\circ = k_1 = \frac{1}{\kappa} \cos^2\alpha$$

$$\kappa_3 = -k_1 \sin 0^\circ = 0$$

$$\tau = k_2 = \frac{1}{\kappa} \sin\alpha \cos\alpha$$

Merkitsemällä jännitysresultantteja $F^1 \equiv N$, $F^2 \equiv Q_n$, $F^3 \equiv Q_b$, $M^1 \equiv T$, $M^2 \equiv M_n$ ja $M^3 \equiv M_b$ saadaan yhtälöistä (76) ruuviviivan muotoisen sauvan tasapainoehtoiksi

$$N_{,1} - \frac{1}{\kappa} \cos^2\alpha Q_n + \tilde{q}^1 = 0$$

$$Q_{n,1} + \frac{1}{\kappa} \cos^2\alpha N - \frac{1}{\kappa} \sin\alpha \cos\alpha Q_b + \tilde{q}^2 = 0$$

$$Q_{b,1} + \frac{1}{\kappa} \sin\alpha \cos\alpha Q_n + \tilde{q}^3 = 0$$

$$T_{,1} - \frac{1}{\kappa} \cos^2\alpha M_n + \tilde{c}^1 = 0$$

$$M_{n,1} + \frac{1}{\kappa} \cos^2\alpha T - \frac{1}{\kappa} \sin\alpha \cos\alpha M_b - Q_b + \tilde{c}^2 = 0$$

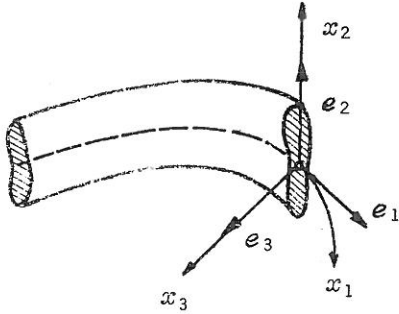
$$M_{b,1} + \frac{1}{\kappa} \sin\alpha \cos\alpha M_n + Q_n + \tilde{c}^3 = 0$$

(88)

Tasapainoehdot (88) on johdettu myös kirjoituksessa Kanerva ja Nordlund [10] tarkastelemalla sauvaendifferentiaalipalan tasapainoa.

TASOSSA KAAREVAN SAUVAN LIIKEYHTÄLÖT

Tarkastellaan ensin tasossa kaarevaa sauvaa, jonka poikkileikkauksen toinen pääakseli on joka kohdassa sauvan referenssiviivan sivunormaalitasossa. Tällöin sauvan esikierevyys $\tau \equiv 0$.



Kuva 5 Tasossa kaareva sauva.

Kuvan 5 perusteella myös $\kappa_2 \equiv 0$, joten $\kappa \equiv -\kappa_3 e_2$. Metriikkatekijän \sqrt{g} lauseke on tällöin

$$\sqrt{g} = 1 - x_3 \kappa_3 \quad (89)$$

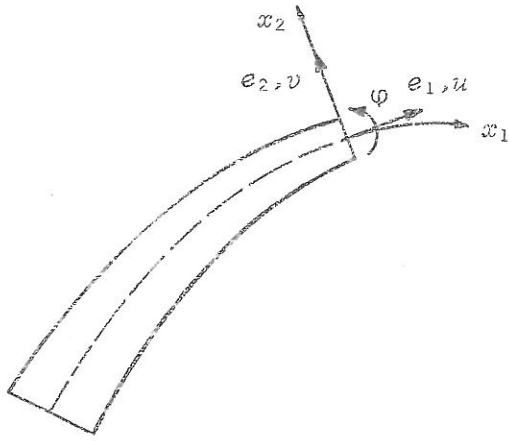
Merkitään $\kappa_3 \equiv \kappa$, $F^1 \equiv N$, $F^2 \equiv Q_b$, $F^3 \equiv Q_n$ sekä $M^1 \equiv T$, $M^2 \equiv M_b$ ja $M^3 \equiv M_n$. Käyttämällä tuloksia (66) ja (67) saadaan tasossa kaarevan sauvan liikeyhtälöiksi

$$\begin{aligned} N_{,1} - \kappa Q_n - J_{00} \ddot{u}_1 - J_{01} \ddot{\varphi}_2 + J_{10} \ddot{\varphi}_3 + \tilde{q}^1 &= 0 \\ Q_{b,1} - J_{00} \ddot{u}_2 + J_{01} \ddot{\varphi}_1 + \tilde{q}^2 &= 0 \\ Q_{n,1} + \kappa N - J_{00} \ddot{u}_3 - J_{10} \ddot{\varphi}_1 + \tilde{q}^3 &= 0 \\ T_{,1} - \kappa M_n + J_{01} \ddot{u}_2 - J_{10} \ddot{u}_3 - (J_{20} + J_{02}) \ddot{\varphi}_1 + \tilde{c}^1 &= 0 \\ M_{b,1} - Q_n - J_{01} \ddot{u}_1 - J_{02} \ddot{\varphi}_2 + J_{11} \ddot{\varphi}_3 + \tilde{c}^2 &= 0 \\ M_{n,1} + \kappa T + Q_b + J_{10} \ddot{u}_1 + J_{11} \ddot{\varphi}_2 - J_{20} \ddot{\varphi}_3 + \tilde{c}^3 &= 0 \end{aligned} \quad (90)$$

missä

$$\begin{aligned} N &= E I_{00} (u_{1,1} - \kappa u_3) + E I_{01} \varphi_{2,1} - E I_{10} (\varphi_{3,1} + \kappa \varphi_1) \\ Q_b &= G I_{00} (u_{2,1} - \varphi_3) - G I_{01} (\varphi_{1,1} - \kappa \varphi_3) \\ Q_n &= G I_{00} (u_{3,1} + \kappa u_1 + \varphi_2) + G I_{10} (\varphi_{1,1} - \kappa \varphi_3) \\ T &= -G I_{01} (u_{2,1} - \varphi_3) + G I_{10} (u_{3,1} + \kappa u_1 + \varphi_2) + G (I_{20} + I_{02}) (\varphi_{1,1} - \kappa \varphi_3) \\ M_b &= E I_{01} (u_{1,1} - \kappa u_3) + E I_{02} \varphi_{2,1} - E I_{11} (\varphi_{3,1} + \kappa \varphi_1) \\ M_n &= -E I_{10} (u_{1,1} - \kappa u_3) - E I_{11} \varphi_{2,1} + E I_{20} (\varphi_{3,1} + \kappa \varphi_1) \end{aligned} \quad (91)$$

Bickford ja Strom [11] ovat myös johtaneet yhtälöt (90) tarkastelemalla suoraan tasossa kaarevaa sauvaa.



Kuva 6 Kaari

Toisena esimerkkinä tasossa kaarevasta sauvasta tarkastellaan kuvan 6 kaarta, jolla on symmetria-tasona x_1x_2 -taso. Oletetaan, että sauvan kuormitukset ja siirtymät ovat tässä sauvan tasossa. Näin ollen $\kappa_3 = \tau \equiv 0$ ja $\kappa \equiv \kappa_2 e_3$ sekä $u_3 \equiv 0$ ja $\varphi_1 = \varphi_2 \equiv 0$. Merkitään

$$\kappa_2 \equiv \kappa, \quad u_1 \equiv u, \quad u_2 \equiv v, \quad \varphi_3 \equiv \varphi$$

$$F^1 \equiv N, \quad F^2 \equiv Q, \quad M^3 \equiv M_t$$

Koska metriikkatekijä $\sqrt{g} = 1 - x_2 \kappa$ ja x_2 -akseli on symmetria-akseli, niin tulomomentit I_{ij} ja J_{ij} häviävät aina, kun indeksi j on pariton. Soveltamalla tuloksia (66) ja (67) saadaan liikeyhtälöiksi

$$N_{,1} - \kappa Q - J_{00} \ddot{u} + J_{10} \ddot{\varphi} + \tilde{q}^1 = 0$$

$$Q_{,1} + \kappa N - J_{00} \ddot{v} + \tilde{q}^2 = 0$$

(92)

$$M_{t,1} + Q + J_{10} \ddot{u} - J_{20} \ddot{\varphi} + \tilde{c}^3 = 0$$

missä

$$N = EI_{00} (u_{,1} - \kappa v) - EI_{10} \varphi_{,1}$$

$$Q = GI_{00} (v_{,1} + \kappa u - \varphi)$$

(93)

$$M_t = -EI_{10} (u_{,1} - \kappa v) + EI_{20} \varphi_{,1}$$

Sijoittamalla jännitysresultanttien (93) lausekkeet yhtälöihin (92) päädytään siirtymien avulla lausuttuihin liikeyhtälöihin

$$[EI_{00}(u_{,1} - \kappa v) - EI_{10}\varphi_{,1}]_{,1} - \kappa GI_{00}(v_{,1} + \kappa u - \varphi) - J_{00} \ddot{u} + J_{10} \ddot{\varphi} + \tilde{q}^1 = 0$$

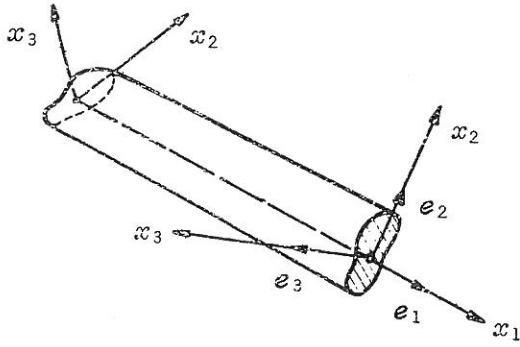
$$[GI_{00}(v_{,1} + \kappa u - \varphi)]_{,1} + \kappa EI_{00}(u_{,1} - \kappa v) - \kappa EI_{10}\varphi_{,1} - J_{00} \ddot{v} + \tilde{q}^2 = 0$$

(94)

$$[-EI_{10}(u_{,1} - \kappa v) + EI_{20}\varphi_{,1}]_{,1} + GI_{00}(v_{,1} + \kappa u - \varphi) + J_{10} \ddot{u} - J_{20} \ddot{\varphi} + \tilde{c}^3 = 0$$

Edellä saadut tulokset (92) - (94) vastaavat artikkelin *Tene, Epstein, Sheinman* [12] tuloksia.

SUORA ESIKIEREVÄ SAUVA



Kuva 7 Esikierevä sauva.

Tarkastellaan seuraavassa suoraa esikierevää sauvaa, jonka tavallisimpana sovellutuksena on roottorin lapa. Sauvan kierevyys on τ ja $\kappa_2 = \kappa_3 = 0$. Näin ollen

$$\kappa = \tau e_1 \quad \& \quad \sqrt{g} = 1$$

Merkitään $F^1 \equiv N$, $F^2 \equiv Q_2$, $F^3 \equiv Q_3$
 $M^1 \equiv T$, $M^2 \equiv M_2$, $M^3 \equiv M_3$.

Soveltamalla tuloksia (66) ja (67) päädytään yhtälöihin

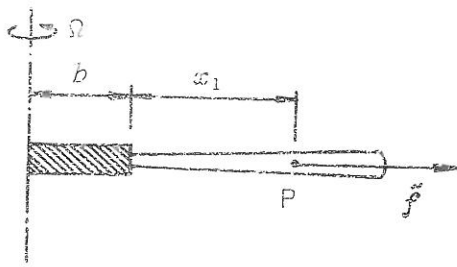
$$\begin{aligned} N_{,1} - J_{00} \ddot{u}_1 + J_{10} \ddot{\varphi}_3 - J_{01} \ddot{\varphi}_2 + \tilde{q}^1 &= 0 \\ Q_{2,1} - \tau Q_3 - J_{00} \ddot{u}_2 + J_{01} \ddot{\varphi}_1 + \tilde{q}^2 &= 0 \\ Q_{3,1} + \tau Q_2 - J_{00} \ddot{u}_3 - J_{10} \ddot{\varphi}_1 + \tilde{q}^3 &= 0 \\ T_{,1} + J_{01} \ddot{u}_2 - J_{10} \ddot{u}_3 - (J_{20} + J_{02}) \ddot{\varphi}_1 + \tilde{e}^1 &= 0 \\ M_{2,1} - \tau M_3 - Q_3 - J_{01} \ddot{u}_1 - J_{02} \ddot{\varphi}_2 + J_{11} \ddot{\varphi}_3 + \tilde{e}^2 &= 0 \\ M_{3,1} + \tau M_2 + Q_2 + J_{10} \ddot{u}_1 + J_{11} \ddot{\varphi}_2 - J_{20} \ddot{\varphi}_3 + \tilde{e}^3 &= 0 \end{aligned} \tag{95}$$

missä

$$\begin{aligned} N &= E I_{00} u_{1,1} + E I_{01} (\varphi_{2,1} - \tau \varphi_3) - E I_{10} (\varphi_{3,1} + \tau \varphi_2) \\ Q_2 &= G I_{00} (u_{2,1} - \tau u_3 - \varphi_3) - G I_{01} \varphi_{1,1} \\ Q_3 &= G I_{00} (u_{3,1} + \tau u_2 + \varphi_2) + G I_{10} \varphi_{1,1} \\ T &= -G I_{01} (u_{2,1} - \tau u_3 - \varphi_3) + G I_{10} (u_{3,1} + \tau u_2 + \varphi_2) + G (I_{20} + I_{02}) \varphi_{1,1} \\ M_2 &= E I_{01} u_{1,1} + E I_{02} (\varphi_{2,1} - \tau \varphi_3) - E I_{11} (\varphi_{3,1} + \tau \varphi_2) \\ M_3 &= -E I_{10} u_{1,1} - E I_{11} (\varphi_{2,1} - \tau \varphi_3) + E I_{20} (\varphi_{3,1} + \tau \varphi_2) \end{aligned} \tag{96}$$

Jos sauvan referenssiviiva on *venymätön* eli $\varepsilon_{11}(x_2 = x_3 = 0) \equiv 0$, niin tuloksen (31) perusteella $u_{1,1} = 0$. Jos sauvan *leikkausmuodonmuutosta ei oteta huomioon*, niin systeemin vapausaste vähenee kahdella, sillä tällöin

$$\varphi_2 = -u_{3,1} \quad \& \quad \varphi_3 = u_{2,1} \tag{97}$$



Kuva 8 Roottorin lapa.

Tavallisin sovellutus suorasta, esikierevästä sauvasta on roottorin lapa. Lapa on kiinnitetty jäykkään kiekkoon, jonka säde on b ja joka pyörii vakioikulmanopeudella Ω kuvan 8 mukaisesti. Rotaatiosta johtuvat hitausvoimat voidaan sisällyttää tilavuusvoimaan \tilde{f} , jonka lausekkeeksi seuraa

$$\tilde{f} = \rho (b + x_1) \Omega^2 g^1 = \rho (b + x_1) \Omega^2 e_1 / \sqrt{g}$$

Tulosten (56) ja (57) mukaan referenssiviivalle kootut kuormituksen pituustiheydet ovat

$$\tilde{q} = \iint_A \tilde{f} \sqrt{g} \, dA = \iint_A \rho (b + x_1) \Omega^2 \, dA e_1 = \rho A (b + x_1) \Omega^2 e_1$$

$$\tilde{s} = \iint_A \mu^0 \times \tilde{f} \sqrt{g} \, dA = (b + x_1) \Omega^2 (J_{01} e_2 - J_{10} e_3)$$

(98)

Usein roottorin poikkileikkauksella on symmetria-akseli, esimerkiksi x_2 -akseli. Tällöin $I_{ij} = 0$ ja $J_{ij} = 0$ aina, kun indeksi j on pariton. Jos vielä oletetaan referenssiviiva venymättömäksi, jolloin $u_{1,1} = 0$, niin u_1 on vakio. Toisaalta reunaehtosta seuraa, että $u_1(x_1=0) = 0$. Näin ollen $u_1 \equiv 0$. Liikkeyhtälöt (98) sievenevät tällöin muotoon

$$\begin{aligned} & [GI_{00}(u_{2,1} - \tau u_3 - \varphi_3)]_{,1} - \tau GI_{00}(u_{3,1} + \tau u_2 + \varphi_2) - \tau GI_{10} \varphi_{1,1} - J_{00} \ddot{u}_2 = 0 \\ & [GI_{00}(u_{3,1} + \tau u_2 + \varphi_2) + GI_{10} \varphi_{1,1}]_{,1} + \tau GI_{00}(u_{2,1} - \tau u_3 - \varphi_3) - J_{00} \ddot{u}_3 - J_{10} \ddot{\varphi}_1 = 0 \\ & [GI_{10}(u_{3,1} + \tau u_2 + \varphi_2) + G(I_{20} + I_{02}) \varphi_{1,1}]_{,1} - J_{10} \ddot{u}_3 - (J_{20} + J_{02}) \ddot{\varphi}_1 = 0 \\ & [EI_{02}(\varphi_{2,1} - \tau \varphi_3)]_{,1} - \tau EI_{20}(\varphi_{3,1} + \tau \varphi_2) - GI_{00}(u_{3,1} + \tau u_2 + \varphi_2) - GI_{10} \varphi_{1,1} - J_{02} \ddot{\varphi}_2 = 0 \\ & [EI_{20}(\varphi_{3,1} + \tau \varphi_2)]_{,1} + \tau EI_{02}(\varphi_{2,1} - \tau \varphi_3) + GI_{00}(u_{2,1} - \tau u_3 - \varphi_3) + J_{20} \ddot{\varphi}_3 + \\ & \quad - J_{10} \Omega^2 (b + x_1) = 0 \end{aligned}$$

(99)

Carnegie [13],[14] johtaa myös esikierevän roottorin lavan liikkeyhtälöt, jotka ovat melko puutteelliset. Carnegien yhtälöistä puuttuvat esimerkiksi yhtälöryhmän (99) ne termit, joissa on kierevyys τ tekijänä. Hodges [15] tarkastelee esikierevän sauvan tasapainotettavaa ja siinä erityisesti sauvaa puristavan normaalivoiman aiheuttamaa vääntöä.

SUORA SAUVA

Sovelletaan kaarelle saatuja yhtälöitä (93) ja (94) suoraan sauvaan, jolla $\kappa \equiv 0$ ja $\sqrt{g} = 1$. Tällöin voidaan merkitä

$$I_{00} \equiv A \quad \& \quad J_{00} \equiv \rho A$$

missä A on sauvan poikkileikkauksen pinta-ala. Suoran sauvan jännitysresultantit ovat

$$\begin{aligned} N &= EA u_{,1} - EI_{10} \varphi_{,1} \\ Q &= GA(v_{,1} - \varphi) \\ M_t &= -EI_{10} u_{,1} + EI_{20} \varphi_{,1} \end{aligned} \tag{100}$$

sekä liikeyhtälöt

$$\begin{aligned} [EA u_{,1} - EI_{10} \varphi_{,1}]_{,1} - \rho A \ddot{u} + J_{10} \ddot{\varphi} + \tilde{q}^1 &= 0 \\ [GA(v_{,1} - \varphi)]_{,1} - \rho A \ddot{v} + \tilde{q}^2 &= 0 \\ [-EI_{10} u_{,1} + EI_{20} \varphi_{,1}]_{,1} + GA(v_{,1} - \varphi) + J_{10} \ddot{u} - J_{20} \ddot{\varphi} + \tilde{c}^3 &= 0 \end{aligned} \tag{101}$$

Jos yhtälöissä (100) ja (101) referenssiviiva valitaan sauvan keskiviivaksi ja se oletetaan venymättömäksi, niin $u_{,1} \equiv 0$. Jos lisäksi sauvan pitkittäissuuntainen jäykän kappaleen liike on estetty, niin myös $\ddot{u} \equiv 0$. Tällöin yhtälöistä (101) seuraa

$$\begin{aligned} [GA(v_{,1} - \varphi)]_{,1} - \rho A \ddot{v} + \tilde{q}^2 &= 0 \\ [EI_{20} \varphi_{,1}]_{,1} + GA(v_{,1} - \varphi) - J_{20} \ddot{\varphi} + \tilde{c}^3 &= 0 \end{aligned} \tag{102}$$

Yhtälöitä (102) kutsutaan usein *Timoshenkon palkkiyhtälöiksi*. Niistä saadaan *Eulerin-Bernoullin palkkiyhtälöt* jättämällä sauvan leikkausmuodonmuutos ja poikkileikkauksen rotaatichitaisu huomioon ottamatta.

KIIITOKSET

Tekijä kiittää apul. prof. Hannu Outista ja leht. Juhani Koskea kirjoitusta koskeneista neuvoista sekä *Tekniikan Edistämissäätiötä* taloudellisesta tuesta.

KIRJALLISUUSVIITTEET

- [1] Szabó I., *Die Entwicklung der Elastizitätstheorie im 19. Jahrhundert nach Cauchy*. Die Bautechnik, **53**(1976)4, s. 109-116.
- [2] Love A., *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. Fourth Edition. Dover Publications, New York 1944, s. 381-454.
- [3] Washizu K., *Some considerations on a naturally curved and twisted slender beam*. Journal of Mathematics and Physics, **43**(1964)2, s. 111-116.
- [4] Wempner G., *Mechanics of Solids with applications to thin bodies*. McGraw-Hill Book Company, New York 1973, s. 352-390.
- [5] Salmi T., *Mekaniikka 2, Kinematiikka. Teoriaa ja esimerkkejä*. Kustannusyhdytymä, Tampere 1979.
- [6] Salmi T., *Käyrän ja poikkileikkaukseltaan muuttuvan palkin liikeyhtälöt*. I Suomen Mekaniikkapäivien esitelmät. Oulun yliopisto, Kone-tekniikan osasto. Raportti n:o 33, toim. Antti Pramila. Oulu 1982, s. 115-135.
- [7] Flügge W., *Tensor Analysis and Continuum Mechanics*. Springer-Verlag, Berlin 1972.
- [8] Väisälä K., *Vektorianalyysi*. 5. painos. Werner Söderström Osakeyhtiö, Porvoo 1966.
- [9] Boudiansky B., *Tensors*. Handbook of Applied Mathematics (ed. Pearson C.), van Nostrand Reinhold Company, New York 1974.
- [10] Kanerva P., & Nordlund O.-P., *Ruuviviivan muotoinen avaruussauva*. Rakenteiden Mekaniikka, **10**(1977)1, s. 21-37.
- [11] Bickford W., & Strom B., *Vibration of plane curved beams*. Journal of Sound and Vibration, **39**(1975)2, s. 135-146.
- [12] Tene V., Epstein M., & Sheinman I., *Dynamics of curved beams involving shear deformation*. Int. J. Solids and Structures, **11**(1975)7/8, s. 827-840.
- [13] Carnegie W., *Vibration of pre-twisted cantilever blading allowing for rotary inertia and shear deflection*. J. Mech. Eng. Sci., **6**(1964)2, s. 105-109.
- [14] Carnegie W., *The application of the variational method to derive the equations of motion of vibrating cantilever blading under rotation*. Bull. Mech. Eng. Educ., **6**(1967)1, s. 29-38.
- [15] Hodges D., *Torsion of pretwisted beams due to axial loading*. Journal of Applied Mechanics, **47**(1980)2, s. 393-397.

Tapio Salmi, dipl. ins., Tampereen teknillinen korkeakoulu, Konetekniikan osasto.