

DER EINFLUSS DER ERDSCHWERKRAFT AUF DIE EIGENFREQUENZEN VON BAUWERKEN

Adolf Lingener

Rakenteiden Mekaniikka Vol 15
No. 1 1982 s. 22...32

ZUSAMMENFASSUNG: Bei der Berechnung der Eigenfrequenzen von Bauwerken wird meist von der Theorie der Balkenbiegung ausgegangen und der Einfluss der Gewichtskräfte vernachlässigt. Für bestimmte Typen von Bauwerken ist dies vor allem für die niedrigste Eigenfrequenz jedoch nicht zulässig. Die Berücksichtigung der Gewichtskräfte läuft auf die Bestimmung eines Korrekturgliedes auf der Grundlage des Rayleigh-Verfahrens hinaus und ist einfach zu handhaben.

EINLEITUNG

Der Einfluss statischer Lasten auf die Eigenfrequenz von mechanischen Strukturen ist im Allgemeinen vernachlässigbar. Eine wichtige Ausnahme bilden die Eigenfrequenzen rotierender Turbinenschaufeln, bei denen der sogenannte Fliehkraftzuschlag infolge der hohen Radialbeschleunigungen nicht vernachlässigbare Werte annimmt. Die Eigenfrequenzen von rotierenden Schaufeln werden durch die Fliehkkräfte erhöht [1].

Bei vielen Bauwerken, vor allem bei Türmen, Masten, Hochhäusern, Leichtbauhallen sind für die Ermittlung der Belastungen durch den Wind die tiefsten Biege-eigenfrequenzen von Bedeutung. Sie werden mit Hilfe entsprechender Berechnungsprogramme oder auch nur anhand von Näherungsformeln [2], [3] bestimmt. Dabei wird der Einfluss der Schwerebeschleunigung der Erde nicht berücksichtigt.

Zunehmende Bauwerksgrösse und wachsende Genauigkeitsanforderungen machen es notwendig, diese bisher vernachlässigten Einflüsse zu untersuchen und gegebenenfalls zu berücksichtigen.

Ziel dieser Untersuchung ist es, festzustellen, wann der Einfluss der Gewichtskraft berücksichtigt werden muss und diesen Einfluss quantitativ zu erfassen.

AUFSTELLUNG DER BEWEGUNGSGLEICHUNG FÜR EINEN HOMOGENEN BALKEN UNTER BERÜCKSICHTIGUNG DER ERDBESCHLEUNIGUNG

Es soll zunächst versucht werden, eine geschlossene analytische Lösung

für die Biegeschwingungen eines homogenen Balkens zu finden, dessen Längsachse die Richtung der Erdschwerkraft hat (Bild 1)

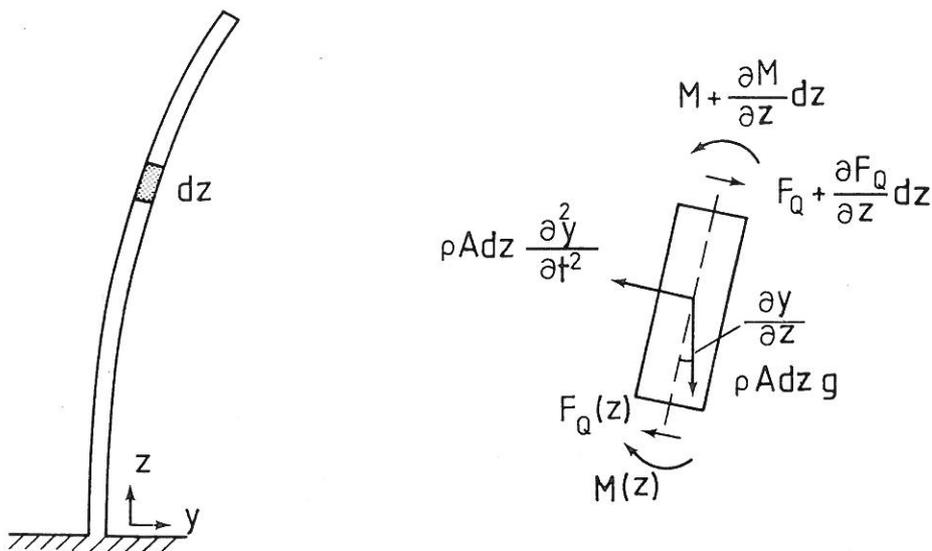


Bild 1. Schnittgrößen am Balkenelement.

Dazu betrachten wir einen vertikal gelagerten Balken und greifen ein Längenelement dz heraus. Es seien

A - die Querschnittsfläche

ρ - die Dichte des Materials

EI - die Steifigkeit des Querschnitts

g - die Erdbeschleunigung

Nach Antragen der Schnittgrößen am Balkenelement und Bilden des Kräftegleichgewichts senkrecht zur Stabachse erhalten wir

$$\frac{\partial F_a}{\partial z} dz + \rho A dz g \frac{\partial y}{\partial z} - \rho A dz \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

Das Momentengleichgewicht liefert unter Vernachlässigung der Größen, die von zweiter Ordnung klein sind, die bekannte Bezeichnung

$$F_Q = \frac{\partial M}{\partial z}$$

Beachtet man weiterhin die Differentialgleichung der Biegelinie

$$\frac{\partial F_a}{\partial z} = \frac{\partial^2 M}{\partial z^2} = -EI \frac{\partial^4 y}{\partial z^4}$$

dann wird aus (1)

$$-EI \frac{\partial^4 y}{\partial z^4} + Ag \frac{\partial y}{\partial z} - A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0.$$

Mit dem üblichen Separationsansatz $y(z,t) = Y(z)\cos(\omega t + \beta)$ erhält man daraus

eine gewöhnliche Differentialgleichung 4. Ordnung für die Auslenkung $Y(z)$:

$$-EIY'''' + \rho AgY' + \rho AY\omega^2 = 0$$

bzw.

$$Y'''' - \frac{\rho A}{EI} (gY' + \omega^2 Y) = 0 \quad (2)$$

Der Lösungsansatz $Y = Ce^{\lambda z}$ für die Gleichung (2) liefert die charakteristische Gleichung

$$\lambda^4 - \frac{\rho Ag}{EI} \lambda - \frac{\rho A\omega^2}{EI} = 0 \quad (3)$$

Die Gleichung erlaubt wegen des Gliedes mit λ keine für die weiteren Überlegungen brauchbare Lösung.

DAS NÄHERUNGSVERFAHREN VON RAYLEIGH ZUR BESTIMMUNG DER NIEDRIGSTEN EIGENFREQUENZ SENKRECHT STEHENDER BAUWERKE MIT BERÜCKSICHTIGUNG DER EIGENLAST

Bei der Berechnung von Bauwerken ist vor allem die niedrigste Eigenfrequenz von Interesse. Es soll daher das Rayleigh-Verfahren auf solche Bauwerke angewendet werden, die sowohl kontinuierlich mit Masse belegt sind als auch Einzelmassen tragen. Der Unterschied zur sonst üblichen Anwendung auf Biegeschwingungen besteht in der Berücksichtigung der Absenkung der Elemente des Bauwerks bei der Schwingungsauslenkung. Das ist gleichbedeutend mit einer Verringerung der potentiellen Energie.

Die Voraussetzung konstanten Querschnitts lassen wir fallen. Zunächst betrachten wir ein Balkenelement dz und bestimmen die potentielle Energie des ausgelenkten Elements. (Bild 2.)

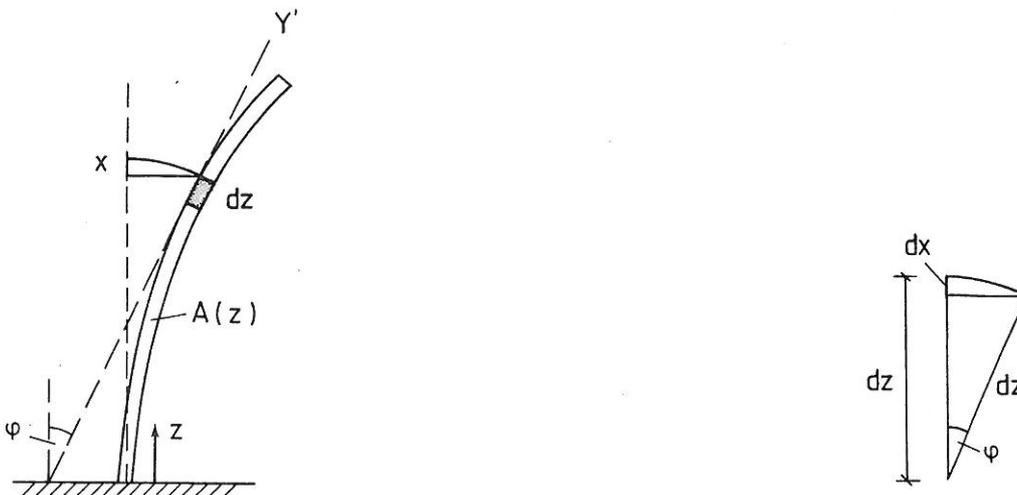


Bild 2. a) Verformter Balken mit element dz

b) Absenkung dx des Elements

Die Absenkung dx jedes Elements hängt von der Neigung Y' an der Stelle z ab. Aus Bild 2b ergibt sich

$$\begin{aligned} dx &= dz - dz \cos \varphi \\ &= (1 - \sqrt{1 - \sin^2 \varphi}) dz \\ &\approx \frac{1}{2} \varphi^2 dz \\ &\approx \frac{1}{2} Y'^2 dz \end{aligned}$$

Die gesamte Absenkung x des Elements erhält man durch Integration bis zur Stelle z . Um Verwechslungen zu vermeiden, bezeichnen wir die Integrationsvariable mit ζ und erhalten

$$x = \int_0^z Y'^2(\zeta) d\zeta$$

Die potentielle Energie des Elements infolge der Absenkung in z -Richtung beträgt also

$$U_E = -dmgx = -\frac{1}{2} \rho A(z) dz g x$$

Nach Einsetzen von dx erhält man

$$U_E = -\frac{1}{2} \rho g A(z) \int_0^z Y'^2(\zeta) d\zeta dz$$

Die gesamte potentielle Energie U_A aus der Absenkung aller Elemente findet man durch Integration über die Länge des Balkens:

$$U_A = -\frac{1}{2} \rho g \int_0^l A(z) \int_0^z Y'^2(\zeta) d\zeta dz \quad (4)$$

Für Einzelmassen an den Stellen $z = \ell_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) ist die innere Integration jeweils bis zur Masse m_i zu führen, (Bild 3)

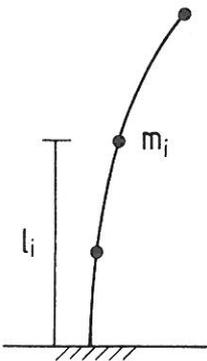


Bild 3. Berücksichtigung von Einzelmassen

während das äussere Integral in eine Summe übergeht:

$$U_M = -\frac{1}{2} g \sum_{i=1}^n m_i \int_0^{\ell_i} Y'^2(\zeta) d\zeta \quad (5)$$

Dazu kommt der Hauptanteil der potentiellen Energie, der aus der Biegearbeit herrührt:

$$U_B = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} EI(z) Y''^2 dz$$

Die kinetische Energie besteht aus den beiden Anteilen, die der massebelegte Balken und die Einzelmassen liefern:

$$T = \frac{1}{2} \rho \omega^2 \int_0^{\ell} A(z) Y^2(z) dz + \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{i=1}^n m_i Y^2(\ell_i) = \omega^2 N$$

Damit lautet der Rayleigh-Quotient

$$\omega^2 = \frac{U_B + U_A + U_M}{N} = \frac{U_B}{N} + \frac{U_A + U_M}{N}$$

Der erste Summand U_B/N ist der ohne Berücksichtigung der Erdschwere ermittelte Rayleigh-Quotient ω_R^2 . Das zweite Glied berücksichtigt den Einfluss von g . Explizit lautet der Ausdruck

$$\omega^2 = \omega_R^2 - \frac{\rho g \int_0^{\ell} A(z) \int_0^z Y'^2(\zeta) d\zeta dz + g \sum_{i=1}^n m_i \int_0^{\ell_i} Y'^2(\zeta) d\zeta}{\rho \int_0^{\ell} A(z) Y^2(z) dz + \sum_{i=1}^n m_i Y^2(\ell_i)} \quad (6)$$

Die Eigenfrequenzen werden also durch den Einfluss der Erdanziehungskraft kleiner.

Wir wollen die Formel (6) für einige wichtige Sonderfälle, die z.T. elementar lösbar sind, diskutieren.

Masseloser Balken mit Endmasse

Hier ist $\rho = 0$, $i = 1$, $\ell_i = \ell$ (Bild 3). Bekanntlich ist hier

$$\omega_R^2 = \sqrt{\frac{3EI}{\ell^3}}$$

Wir missen das Korrekturglied

$$\omega_K^2 = \frac{gm \int_0^{\ell} Y'^2 dz}{mY^2(\ell)}$$

Dazu setzen wir für Y die aus elementare Biegetheorie ermittelte statische

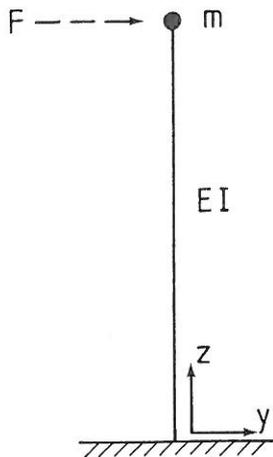


Bild 4. Masseloser Balken mit Endmasse

beträgt also

$$\omega = \sqrt{\frac{3EI}{l^3} - 1,2 \frac{g}{l}} \quad (7)$$

Balken mit konstantem Querschnitt und kontinuierlicher Massebelegung, $A = \text{const}$, $\rho = \text{const}$, $m_i = 0$

Das Korrekturglied lautet

$$\omega_K^2 = \frac{g \int_0^l \int_0^z Y'^2(\zeta) d\zeta dz}{\int_0^l Y^2(z) dz} \quad (8)$$

Zunächst bestimmen wir aus den Differentialgleichungen der Biegelinie und den Randbedingungen, die Ansatzfunktion

$$Y(z) = z^4 - 4lz^3 + 6l^2z^2$$

Mit dieser Ansatzfunktion erhält man durch Bilden der Integrale in (8)

$$\omega^2 = 1,875^4 \frac{EI}{\rho A l^4} - 1,56 \frac{g}{l} \quad (9)$$

Der Zahlenwert von 1,56 stimmt mit dem für Turbinenschaufeln gültigen Faktor für Turbinenschaufeln überein. Der Unterschied besteht im Vorzeichen und statt g tritt die Radialbeschleunigung auf.

Biegelinie infolge einer Einzellast am Ende an:

$$Y(z) = -\frac{1}{6} z^3 + \frac{1}{2} lz^2$$

Man erhält

$$\int_0^l Y'^2 dz = \frac{2}{15} l^5 \quad \text{und} \quad Y^2(l) = \frac{1}{9} l^6$$

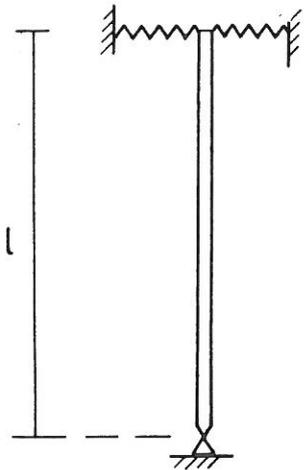
Daraus folgt

$$\omega_K^2 = 1,2 \frac{g}{l}$$

Die Eigenfrequenz eines senkrecht stehenden masselosen Balkens mit Einzelmasse am Ende

Gelenkig gelagerter senkrecht stehender starrer Balken

Dieser Fall, der sich elementar ebenso einfach behandeln lässt, repräsentiert näherungsweise einen abgespannten Mast. Er wird ebenso behandelt wie der Fall 3.2, jedoch mit der besonders einfachen exakten Ansatzfunktion $Y = z$. Es ergibt sich sofort



$$\omega_K^2 = \frac{g \int_0^l \int_0^z \zeta d\zeta}{l \int_0^l z^2 dz} = \frac{3}{2} \frac{g}{l}$$

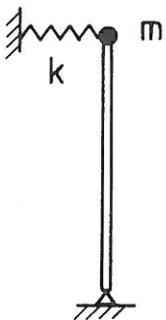
Als tiefste Eigenfrequenz erhält man

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 1.5 \frac{g}{l}} \quad (10)$$

$\sqrt{1.5 g/l}$ ist bekanntlich die Pendelfrequenz eines am oberen Ende aufgehängten Balkens.

Bild 5. Gelenkig gelagerter starrer Balken.

Masseloser starrer Balken mit Endmasse



Der Vollständigkeit halber sei noch der gelenkig gelagerte masselose Balken mit Endmasse erwähnt (Bild 6):

Hier gilt analog

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{g}{l}} \quad (11)$$

Bild 6. Masseloser starrer Balken mit Endmasse.

ANWENDUNG AUF KONKRETE BAUWERKE

Die Formeln (7) bis (11) lassen erkennen, wie einfach die Berücksichtigung des Schwerkrafteinflusses auf die Eigenfrequenzen zu handhaben ist. Da die Eigenfrequenz durch ein additives Korrekturglied präzisiert wird, kann die Berechnung wie bisher erfolgen und nur bei solchen Bauwerken, wo dies erforderlich ist, wird dann das Korrekturglied bestimmt. Bei der Anwendung auf konkrete Bauwerke stellt man zunächst fest, dass die Korrekturglieder meist sehr klein sind und in Abhängigkeit von der Qualität des eingesetzten Berechnungsverfahrens in der Grössenordnung der aus der Modellbildung

resultierenden Fehler liegen oder noch kleiner sind.

Vom Quadrat der nach einem beliebigen Verfahren ermittelten tiefsten Eigenfrequenz ω_0^2 ist ein Glied $k \cdot g/l$ zu subtrahieren wobei k zwischen 1 und 1,56 liegt. Dabei ist es sinnvoll, mit einem festen Wert für k , zB $k = 1,5$ zu rechnen und erst dann, wenn sich nennenswerte Abweichungen ergeben, den genauen Wert von k zu bestimmen. Die Zahlenwerte für die nachfolgenden Beispiele sind aus Arbeiten über die Windwirkung auf schwingungsgefährdete Bauwerke entnommen [2], [3] und geben einen Überblick über die Grössenordnung der zu erwartenden Korrekturen.

Stahlbetonschornstein von 303 m Höhe

In [2] werden für ein Berechnungsmodell mit konstanter Massebelegung folgende Daten angegeben.

$$EI = 4,8 \cdot 10^{13} \text{ Nm}^2$$

$$\mu = \rho A = 64150 \text{ kg/m.}$$

Daraus ergibt sich aus der bekannten Formel für den einseitig eingespannten Stab für die tiefste Eigenkreisfrequenz

$$\omega_0 = 1,875^2 \cdot \sqrt{\frac{EI}{\mu l^4}} = 1,049 \text{ s}^{-1}$$

Das entspricht einer Periodendauer von $T_0 = 2\pi/\omega_0 = 6\text{s}$. Die korrigierte Eigenkreisfrequenz wird gemäss (9):

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 1,56 \text{ g/l}} = 1,024 \text{ s}^{-1}$$

Der Fehler infolge Vernachlässigung der Gewichtskraft beträgt daher

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0 - \omega}{\omega} = 2,4 \%$$

Stahlblechschorstein von 60 m Höhe

Es ist nach [2]

$$EI = 5,2 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2, \quad \mu = 200 \text{ kg/m}$$

Daraus folgt

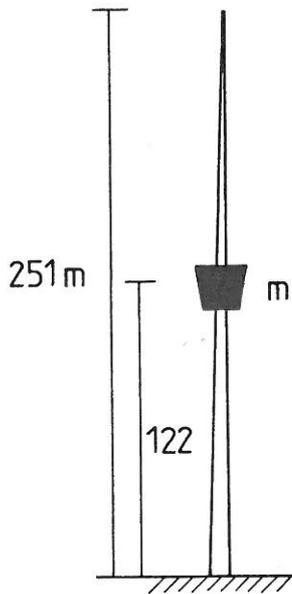
$$\omega_0 = 3,516 \cdot \sqrt{\frac{EI}{\mu l^4}} = 4,98 \text{ s}^{-1}$$

und

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 1,56 \text{ g/l}} = 4,95 \text{ s}^{-1}$$

Der Fehler beträgt hier nur 0,6 %.

Fernsehturm von 251 m Höhe idealisiert als Einmassenschwinger (Bild 7).
In [2] sind folgende Daten angegeben



$$m = 7170 \text{ t}$$

$$k = 8,5 \cdot 10^6 \text{ N/m}$$

Höhe der idealisierten Masse

$$h = 122 \text{ m}$$

Daraus ergibt sich

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 1,089 \text{ s}^{-1}$$

Die korrigierte Eigenkreisfrequenz beträgt
gemäss (7)

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 1,2 \frac{g}{h}} = 1,043 \text{ s}^{-1}$$

Bild 7. Berechnungsmodell
eines Fernsehturmes.

Der Fehler beträgt 4,4 %.

Für das gegenwärtig höchste Bauwerk der Welt, den Moskauer Fernsehturm ist eine Eigenschwingzeit von $T_0 = 13 \text{ s}$ bekannt. Unter Zugrundelegung einer ähnlichen Überlegung liegt der Einfluss der Erdschwerkraft hier in der Grössenordnung von etwa 10 %.

Dreischiffige Stahlhalle auf Einmassenschwinger reduziert

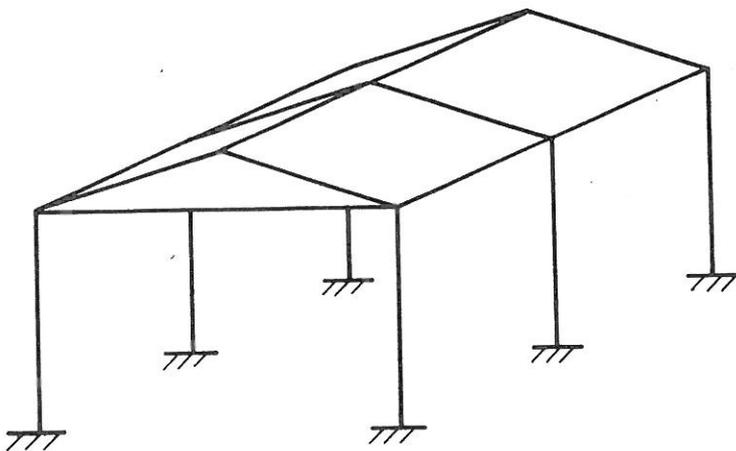


Bild 8. Dreischiffige Stahlhalle.

Die Eigenschwingzeit ist in [2] mit $T_0 = 2 \text{ s}$ angegeben, die Höhe der Ersatzmasse bei Reduzierung auf einen Einmassenschwinger mit $h = 5,4 \text{ m}$. Daraus ergibt sich

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 3,14 \text{ s}^{-1}$$

und

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 1,2 \frac{g}{h}} = 2,77 \text{ s}^{-1}$$

Der Fehler beträgt hier 13,3 %.

Die betrachteten Beispiele zeigen, dass bei der Berechnung der niedrigsten Eigenfrequenz von Bauwerken ohne Berücksichtigung des Einflusses der Erdschwerkraft die auftretenden Fehler nicht in jedem Falle vernachlässigbar sind.

Vor allem bei solchen Bauwerken, die eine niedrige erste Eigenfrequenz aufweisen und besonders bei denen, die dazu noch niedrig sind, können grössere Abweichungen auftreten.

BEZIEHUNGEN ZUR KNICKLÄNGE

Das dargestellte präzisierte Berechnungsverfahren für Biegeschwingungen erlaubt zugleich die Bestimmung der Knickgrenzen komplizierter Balken.

Der Einfluss der Eigenlast wird durch ein Korrekturglied berücksichtigt, das vom Quadrat der auf herkömmliche Weise bestimmten Eigenkreisfrequenz subtrahiert wird. Der Grenzfall $\omega = 0$ stellt den Versagensfall dar. Wir wollen dies an dem im Punkt 3.2 behandelten Beispiel erläutern.

Für den masselosen Balken mit der Endmasse m hatten wir gefunden (7)

$$\omega^2 = \frac{3EI}{ml^3} - 1,2 \frac{g}{l}$$

Aus $\omega = 0$ ergibt sich die Grenzlänge, bei der keine Schwingung mehr möglich ist, zu

$$l_g = \sqrt{\frac{3}{1,2} \frac{EI}{mg}}$$

Wir vergleichen dieses Ergebnis mit der Knicklänge eines Stabes der Steifigkeit EI unter der Last $F = mg$ (Bild 9).

Es handelt sich hier um einen Eulerfall mit der Knicklänge

$$l_k = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{EI}{mg}}$$

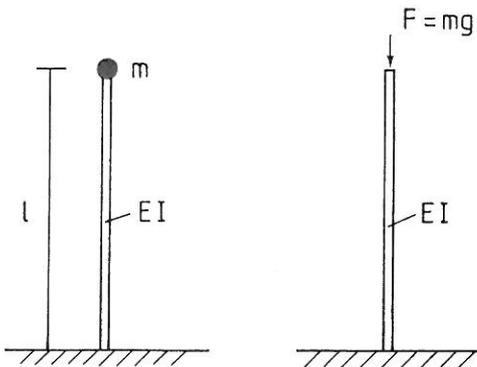


Bild 9. Beziehungen zur Knicklänge.

In der Tat ist $\sqrt{\frac{3}{1,2}} = 1,58 \approx \frac{\pi}{2} = 1,57$.

Die Abweichung rührt aus der verwendeten Ansatzfunktion des Rayleigh-Verfahrens, die ja nicht die exakte dynamische Biegelinie verwendete.

Für die sogenannten Nicht-Euler-Fälle lassen sich auf diese Weise ziemlich einfach die Stabilitätsgrenzen ermitteln, wie z.B. die Grenzlänge oder eine Mindeststeifigkeit. Für das Beispiel Stahlbetonschornstein findet man z.B. aus $\omega = 0$ einen Wert für die theoretische Grenzlänge eines solchen Bauwerks. Es ergibt sich aus

$$\omega^2 = 0 = 12,36 \frac{EI}{\mu \ell^4} - 1,56 \frac{g}{\ell} g$$

$$\ell_g^3 = 7,92 \frac{EI}{\mu g}$$

$$\ell_g = 1,99 \cdot \sqrt[3]{\frac{EI}{\mu g}}$$

Mit den Zahlenwerten des genannten Beispiels findet man eine Grenzlänge von $\ell_g = 839$ m.

Dieser Wert besagt aber weder, dass man einen so hohen Schornstein errichten könnte, weil schon vorher andere Versagenkriterien zu beachten sind, noch, dass höhere Bauwerke bei geeigneter Steifigkeits- und Masseverteilung nicht denkbar wären.

LITERATUR

- [1] Traupel, Thermische Turbomaschinen Bd II, Springer-Verlag 1968.
- [2] Trätner, A, Beitrag zur Erfassung stochastischer lastwirkungen auf Bauwerke am Beispiel des natürlichen Windes, Dissertation TH Magdeburg 1977.
- [3] Bauforschung Baupraxis, Heft 48, Windwirkung auf schwingungsgefährdete Bauwerke, Bauinformation der Bauakademie der DDR, Berlin 1980.

Adolf Lingener, Dr. sc. techn., Technische Hochschule Magdeburg, Sektion Maschinenbau, Lehrstuhl Experimentelle Mechanik.