

## JÄÄN LIIKEKITKAN PERUSTEET

Pekka Oksanen

Rakenteiden Mekaniikka Vol 15  
No. 1 1982 s. 14...21

YHTEENVETO: Jään ja jonkin toisen aineen välinen liikekitka on laskettu olettamalla, että kitka aiheutuu kosketuskohdassa olevasta vesikalvosta, joka syntyy kitkasta kehittyneen lämmön sulattaessa jäätä vedeksi. Laskelmat ovat kohtalaisen hyvin yhtäpitäviä koetulosten kanssa, ja ne antavat oikeat riippuvuudet nopeudesta ja normaalivoimasta. Laskennan avulla voidaan siten selittää jään liikekitkan pääosa sekä saada tietoa jään liikekitkan mekanismista. Liikkuvan kappaleen jäykkyyden vaikutusta kitkaan on käsitelty lyhyesti.

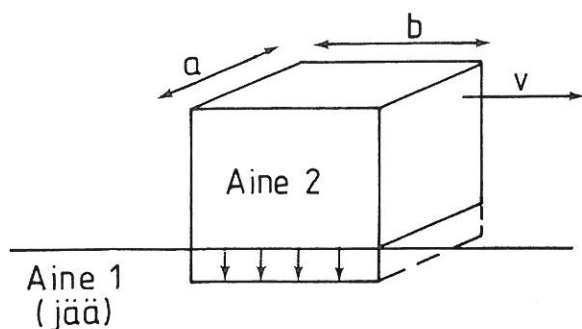
### JOHDANTO

Jään ja lumen liikekitka on tunnetusti noin kertaluokkaa pienempi kuin muilla aineilla ja vastaavasti pienempi kuin klassillisen kitkateorian mukaiset arvot. Tätä on käytetty hyväksi lukuisissa sovellutuksissa, mutta ilmiön luonteesta on edelleenkin jossakin määrin erilaisia käsityksiä.

Jään ja lumen kitkakerroin ei suinkaan ole vakio, kuten jokainen jäällä tai suksilla liikkunut on voinut omakohtaisesti todeta, vaan riippuu monista ulkoisista tekijöistä. Näiden riippuvuuksien tunteminen olisi kuitenkin tarpeellista ei vain jäällä liikkumisen vuoksi vaan myös eräiden rakenteiden kannalta, sillä liikkuva jää aiheuttaa lähinnä vedessä oleville rakenteille kitkan välityksellä kuormituksia, joiden suuruus olisi tiedettävä rakenteita mitoitettaessa. Tässä esityksessä tarkastellaan kuitenkin jään kitkaa pääasiallisesti fysikaalisena ilmiönä.

### VESIKERROKSEN AIHEUTTAMA KITKA

Yleisimmin hyväksytty käsitys jään pienelle kitkalle on, että se johtuu ohuesta vesikerroksesta kosketuspinnalla /3/. Aikaisemmin ajateltiin sen muodostuvan jään sulaessa paineen vaikutuksesta, mutta helposti voidaan todeta, että suurellakaan paineella jään sulamislämpötila ei laske kuin muutamalla asteella. Parempi selitys on, että vesikalvo muodostuu jään sulaessa liikekitkan kehittämän lämmön vaikutuksesta. Näin syntyvän vesikerroksen vaikutusta kitkakertoimeen voidaan tarkastella myös laskennollisesti seuraavaan tapaan /5/. Tarkastellaan kuvan 1 mukaista tilannetta, jossa jään (aine 1) päällä



Kuva 1. Kaaviokuva liikkuvan kappaleen ja jään kosketuskohdasta.

nopeus,  $d$ =vesikerroksen paksuus. Tässä on oletettu, että nopeusjakautuma vesikerroksessa on lineaarinen. Kitkakerroin  $\mu$  voidaan laskea yhtälöstä

$$\mu = \frac{F_{\mu}}{F_N} = \frac{\eta_o v A}{d F_N} \quad (2)$$

missä  $F_N$  on normaalivoima, jos siinä esiintyvät suureet tunnetaan. Vesikerroksen paksuus  $d$  saadaan ratkaistuksi, kun merkitään kitkasta kehittyvä lämpömäärä yhtä suureksi kuin jään sulamiseen ja kosketuspinnalta pois johtumiseen kuluva lämpömäärä. Tässä siten tavallaan yhdistetään mekaaninen yhtälö ja termodynaaminen yhtälö.

Aikana  $b/v$ , jolloin kappale liikkuu oman pituutensa  $b$ , kehittyvä lämpömäärä  $Q_f$  on

$$Q_f = \mu F_N v \cdot \frac{b}{v} \quad (3)$$

Kosketuskohdasta johtuu lämpöä jäähän aikavälillä  $b/v$

$$Q_{c1} = \frac{\lambda_1 a b \Delta T_1}{\delta} \cdot \frac{b}{v} \quad (4)$$

missä  $\lambda_1$ =jään lämmönjohtavuus,  $\Delta T_1$ =lämpötilaero jään ja kosketuskohdan välillä,  $\delta$ =ainepaksuus, johon johtuminen tapahtuu.

Tässä on oletettu, että lämpö johtuu kohtisuorassa suunnassa kosketuspintaa vastaan ja että lämpötilajakautuma on lineaarinen syvyydelle  $\delta$ . Tämä ei pidä aivan tarkasti paikkaansa, mutta virhe on pieni, koska johtumisaika on hyvin lyhyt, eikä sillä ole periaatteellista merkitystä. Toisaalta jäähän johtuva lämpömäärä lämmittää  $\delta$ :n paksuista kerrosta eli

$$Q_{c1} = \rho_1 a b \delta c_1 \frac{\Delta T_1}{2} \quad (5)$$

missä  $\rho_1$ =jään tiheys,  $c_1$ =jään ominaislämpökapasiteetti.

Yhtälöistä (4) ja (5) voidaan eliminoida  $\delta$ , jolloin

$$Q_{c1} = a b \Delta T_1 \sqrt{\frac{b}{2v}} \sqrt{\lambda_1 c_1 \rho_1} \quad (6)$$

Jos jää ja sillä liukuva kappale olisivat aivan tasaisia, kappaleeseen joh-  
tuva lämpömäärä pitäisi laskea stationäärisen tilanteen mukaisesti. Näin ei  
kuitenkaan käytännössä koskaan ole, vaan kosketuskohdat syntyvät pinnan epä-  
tasaisuuksien korkeimmille kohdille vain lyhyiksi ajoiksi kerrallaan. Tästä  
syystä on perusteltua laskea kappaleeseen siirtyvä lämpömäärä transientin ti-  
lanteen mukaisesti yhtälöä (6) vastaavalla tavalla. Koska kappaleen alapinta  
on jatkuvasti lähellä jään sulamislämpötilaa (joka paineen vaikutuksesta on  
hiukan  $0^{\circ}\text{C}$  alapuolella), lämpötilaero  $\Delta T_2$  on pienempi kuin  $\Delta T_1$ . Käyttäen liik-  
kuvalle kappaleelle alaindeksejä 2 saadaan kosketuskohdasta pois johtuvaksi  
kokonaislämpömääräksi  $Q_c$

$$Q_c = Q_{c1} + Q_{c2} = ab\sqrt{\frac{b}{2v}}(\Delta T_1\sqrt{\lambda_1 c_1 \rho_1} + \Delta T_2\sqrt{\lambda_2 c_2 \rho_2}) \quad (7)$$

Lämpöä kuluu myös jään sulattamiseen vedeksi, ja tähän tarvittava lämpömäärä  
 $Q_m$  on

$$Q_m = ab d h \rho_o \quad (8)$$

missä  $h$  on jään sulamislämpö.

Kun nyt merkitään kehittyvä lämpömäärä (yhtälö (3)) yhtä suureksi kuin pois  
johtuva ja jään sulattamiseen kuluva lämpömäärä (yhtälöt (7) ja (8)) saadaan

$$\mu F_N v \cdot \frac{b}{v} = ab\sqrt{\frac{b}{2v}}(\Delta T_1\sqrt{\lambda_1 c_1 \rho_1} + \Delta T_2\sqrt{\lambda_2 c_2 \rho_2}) + abdh\rho_o \quad (9)$$

mistä vesikerroksen paksuus  $d$  voidaan ratkaista

$$d = \frac{1}{h\rho_o} \left[ \frac{\mu F_N}{a} - \sqrt{\frac{b}{2v}}(\Delta T_1\sqrt{\lambda_1 c_1 \rho_1} + \Delta T_2\sqrt{\lambda_2 c_2 \rho_2}) \right] \quad (10)$$

Sijoittamalla  $d$  tästä yhtälöstä yhtälöön (2) saadaan kitkakertoimelle  $\mu$  toi-  
sen asteen yhtälö

$$\mu^2 - \frac{a}{F_N} \cdot \sqrt{\frac{b}{2v}}(\Delta T_1\sqrt{\lambda_1 c_1 \rho_1} + \Delta T_2\sqrt{\lambda_2 c_2 \rho_2}) \cdot \mu - \frac{\eta_o v A h \rho_o a}{F_N^2} = 0 \quad (11)$$

mistä

$$\mu = \frac{1}{2} \frac{a}{F_N} \sqrt{\frac{b}{2v}}(\Delta T_1\sqrt{\lambda_1 c_1 \rho_1} + \Delta T_2\sqrt{\lambda_2 c_2 \rho_2}) \pm \sqrt{\frac{a^2 b}{8 F_N^2 v}(\Delta T_1\sqrt{\lambda_1 c_1 \rho_1} + \Delta T_2\sqrt{\lambda_2 c_2 \rho_2})^2 + \frac{\eta_o v A h \rho_o a}{F_N^2}} \quad (12)$$

Yhtälö (12) sisältää vielä käytännössä tuntemattomia suureita, joista päästään  
eroon tekemällä eräitä oletuksia kosketuskohdista. Jos näiden lukumäärä on  
 $n$ , kokonaiskosketuspinta-ala on  $A = nab$ . Lisäksi voidaan valita  $a = b$ , jol-  
loin käyttäen merkintää  $H_1 = F_N/A$  eli  $a = b = \sqrt{F_N/nH_1}$  saadaan

$$\mu = \frac{1}{2} \left( \frac{F_N}{n} \right)^{-\frac{1}{4}} \cdot H_1^{-\frac{3}{4}} \frac{1}{\sqrt{2V}} (\Delta T_1 \sqrt{\lambda_1 c_1 \rho_1} + \Delta T_2 \sqrt{\lambda_2 c_2 \rho_2}) + \sqrt{\frac{1}{2V} (\Delta T_1 \sqrt{\lambda_1 c_1 \rho_1} + \Delta T_2 \sqrt{\lambda_2 c_2 \rho_2})^2 + \eta_0 v h \rho_0} \quad (13)$$

Suure  $H_1$  voidaan tulkita jään kovuudeksi, toisin sanoen jään kovuus määrää todellisen kosketuspinta-alan. Yhtälö (13) on perusyhtälö, jota voidaan useimmissa tapauksissa yksinkertaistaa eri tekijöiden vaikutuksen selventämiseksi, kuten seuraavassa esitetään.

#### LÄMPÖTILAN VAIKUTUS

Lämpötilan suhteen voidaan erottaa kaksi aluetta, joilla kitka määräytyy eri tekijöistä ja riippuu siksi nopeudesta täysin eri tavoin. Kun lämpötila on matala ja  $\Delta T$  suuri, yhtälössä (11) kitkakertoimen  $\mu$  ensimmäisen asteen termin kerroin (joka kuvaa lämmön johtumista) on suuri verrattuna vakiokertoimeen (joka kuvaa jään sulamista ja vesikerroksen vastusta), joten kitkakertoimeksi saadaan

$$\mu = \left( \frac{F_N}{n} \right)^{-\frac{1}{4}} H_1^{-\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{1}{2V}} (\Delta T_1 \sqrt{\lambda_1 c_1 \rho_1} + \Delta T_2 \sqrt{\lambda_2 c_2 \rho_2}) \quad (14)$$

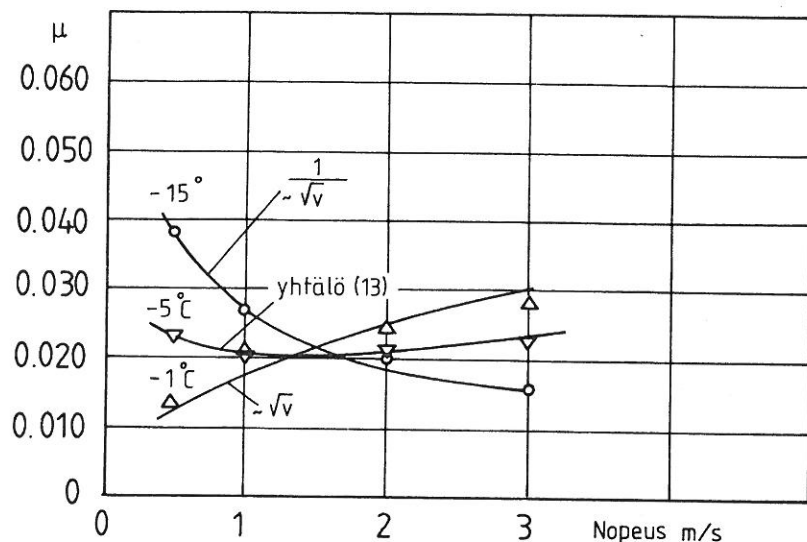
Samaan tulokseen päädytään, jos yhtälössä (10) merkitään vesikerroksen paksuus  $d = 0$ . Tämä ei merkitse sitä, että vesikerrosta ei olisi lainkaan, vaan että se on hyvin ohut ja että sen aikaansaamiseen tarvittava lämpömäärä on pieni verrattuna kosketuskohdasta pois johtuvaan lämpömäärään. Toisin sanoen tasapainotilassa käytännöllisesti katsoen kaikki kitkan vaikutuksesta kehittyvä lämpö siirtyy johtumalla pois, ja kitkakerroin määräytyy siten molempien aineiden lämpöteknillisten ominaisuuksien perusteella. Tässä yhteydessä voidaan myös todeta, että kitkan vaikutuksesta syntyvä vesikalvovoitelu poikkeaa tavallisesta voiteluaineilla tapahtuvasta hydrodynaamisesta voitelusta. Jälkimmäisessä tapauksessa voiteluainekerroksen tulee olla paksumpi kuin pinnan epätasaisuudet, jotta kiinteät aineet eivät pääsisi koskettamaan toisiaan, kun taas jään tapauksessa vesikerros syntyy juuri kosketuskohtiin ja vain niihin. Vesikalvo on nimittäin niin ohut ( $0^\circ\text{C}$  lähellä olevia lämpötiloja lukuun ottamatta), että se ei lyhyenä ( $10^{-3} \dots 10^{-4} \text{s}$ ) kosketusaikana ehdi merkittävästi levitä kosketuskohdan ulkopuolelle.

Kun toisaalta lämpötila on lähellä  $0^\circ\text{C}$ , lämpötilaerot  $\Delta T_1$  ja  $\Delta T_2$  ovat pieniä ja kitka määräytyy vesikerroksen ominaisuuksien perusteella

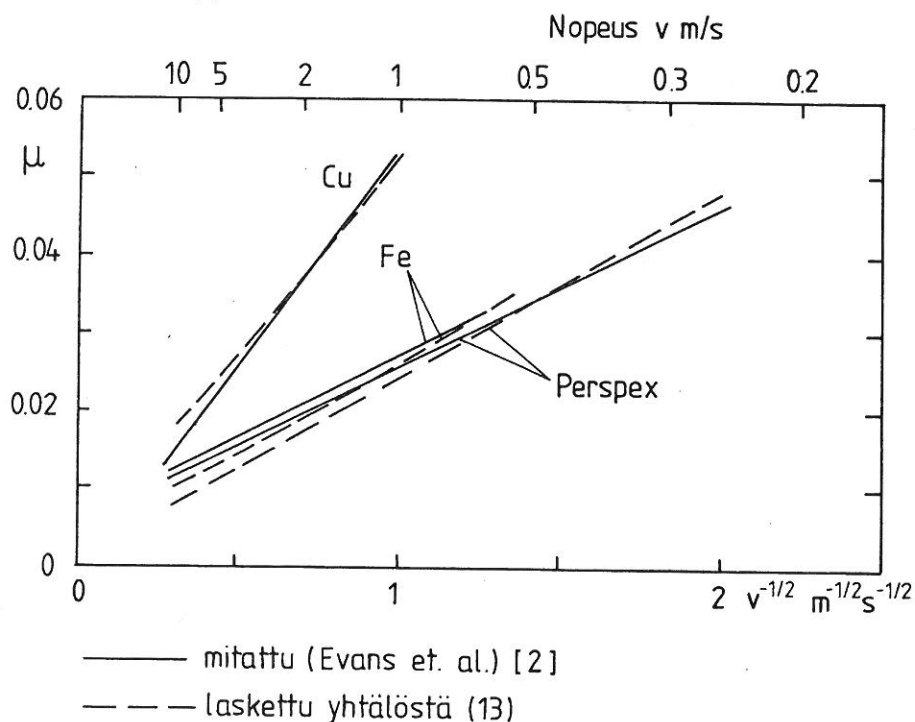
$$\mu = \left( \frac{F_N}{n} \right)^{-\frac{1}{4}} H_1^{-\frac{3}{4}} \sqrt{\eta_0 v h \rho_0} \quad (15)$$

Tässä tapauksessa siis kehittyvä lämpö kuluu kokonaan jään sulattamiseen vedeksi.

Yhtälöistä (14) ja (15) nähdään, että matalissa lämpötiloissa kitkakerroin on verrannollinen  $1/\sqrt{v}$ :hen mutta lähellä  $0^{\circ}\text{C}$  se on verrannollinen  $\sqrt{v}$ :hen. Tämä johtuu siitä, että kitka määräytyy näissä tapauksissa erilaisten mekanismien perusteella. Kuvassa 2 on esitetty eräitä mittaustuloksia kahden jääpinnan välisestä kitkasta sekä kuvassa 3 mitattuja ja laskettuja tuloksia kuparin, raudan ja Perspex-muovin kitkasta jäällä.



Kuva 2. Jään kitkakerroin nopeuden funktiona eri lämpötiloissa, normaalivoima 10 N. (Eri lämpötiloissa on ollut eri koe-kappale.)



Kuva 3. Mitattujen [2] ja laskettujen tulosten vertailua, lämpötila  $-11,5^{\circ}\text{C}$ , normaalivoima 11,35 N.

Yhtälössä (13) esiintyvää lämpötilaeroa  $\Delta T_2$  kosketuskohdan ja liikkuvan kappaleen sisäosan välillä ei yleensä tunneta. Se on kuitenkin lähes aina merkityksettömän pieni /1/, ja se joudutaan ottamaan huomioon ainoastaan tapauksissa, joissa liikkuva kappale on erittäin hyvä lämmönjohde, esim. kuparia /5/.

## LIKKUVAN KAPPALEEN JÄYKKYYDEN VAIKUTUS

Yhtälön (13) mukaan kitkakerroin riippuu mm. normaalivoimasta jaettuna kosketuskohtien lukumäärällä  $F_N/n$  ja jään kovuudesta  $H_1$ . Koska  $F_N/n$  on korotettu potenssiin  $-1/4$ , voiman kasvaessa kitkakerroin pienenee. Toisaalta voiman kasvaessa kosketuskohtien lukumäärä saattaa myös kasvaa, mikä puolestaan vähentää kitkakertoimen pienenemistä. Siten on odotettavissa, että koejärjestelyistä riippuen mitattu kitkakerroin jonkin verran poikkeaa  $F_N^{-1/4}$ -riippuvuudesta, mikä onkin todettu mm. viitteen /4/ tuloksissa. Sovitettaessa eräitä mittaustuloksia /2/ yhtälön (13) mukaiseen malliin on todettu, että sopiva arvo kosketuskohtien lukumäärälle ko. tapauksessa oli  $n = 20$  /5/.

Kosketuskohtien lukumäärä ja siten kitkakerroin riippuu myös liikkuvan kappaleen jäykkyydestä. Jos ajatellaan kappale päistään tuetuksi palkiksi (kaksi kosketuskohtaa) normaalivoiman vaikuttaessa niiden välillä, enempää kosketuskohtia ei synnykään, jos palkki on äärettömän jäykkä. Jos sen sijaan palkki taipuu, se koskettaa myös tukien välillä jätät ja muodostuu vähintään kolme kosketuskohtaa. Jos palkin jäykkyys on hyvin pieni ja kuorma on tasaisesti jakautunut, palkki mukautuu hyvin jään pinnan epätasaisuuksiin ja kosketuskohtia syntyy runsaasti. Siten samasta materiaalista tehdyillä erilaisilla kappaleilla saattaa olla hiukan erilainen kitkakerroin (vaikka tätä ei ole vielä kokeellisesti osoitettu).

Yhtälössä (13) on oletettu, että todellinen kosketuspinta-ala (joka on yleensä monta kertalukua pienempi kuin kappaleen mitat) määräytyy jään kovuuden  $H_1$  perusteella eli siten jään plastisen muodonmuutoksen perusteella. Jos liikkuvan kappaleen kovuus onkin pienempi kuin jään, kosketuspinta-ala määräytyy sen ominaisuuksien mukaisesti. Koska kappale voi olla paljon joustavampaa ainetta kuin jää, kysymykseen voi tulla myös elastinen muodonmuutos, jolloin yhtälöä (13) joudutaan vastaavasti muuttamaan.

Kun kosketuspinta-ala edellä saatiin plastisen muodonmuutoksen perusteella yhtälöstä

$$A = \frac{F_N}{H_1} \quad (16)$$

se elastisen muodonmuutoksen tapauksessa on /1/

$$A = 1,2 \pi \left( \frac{F_N R}{E} \right)^{2/3} \quad (17)$$



missä R kappaleen pinnan (pallomaisten) epätasaisuuksien kaarevuussäde, E on kimmokerroin.

Kitkakertoimen lausekkeeksi saadaan tällöin

$$\mu = \frac{1}{2}(1,2\pi)^{\frac{3}{4}} \left(\frac{F_N}{n}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{E}{R}\right)^{-\frac{1}{2}} \left[ \frac{1}{\sqrt{2v}} (\Delta T_1 \sqrt{\lambda_1 c_1 \rho_1} + \Delta T_2 \sqrt{\lambda_2 c_2 \rho_2}) + \sqrt{\frac{1}{2v} (\Delta T_1 \sqrt{\lambda_1 c_1 \rho_1} + \Delta T_2 \sqrt{\lambda_2 c_2 \rho_2})^2 + \eta_o v h \rho_o} \right] \quad (18)$$

Jos kosketuspinta-ala määräytyy elastisen muodonmuutoksen perusteella, kappaleessa tapahtuu sen liikkuaessa ilmeisesti myös viskoelastisia häviöitä, jotka lisäävät kitkaa, mutta näihin ei tässä yhteydessä puututa tarkemmin.

#### MENETELMÄT KITKAN PIENENTÄMISEKSI

Useimmissa käytännön sovellutuksissa pyritään pieneen liikekitkaan. Edellä oleva käsittely antaa viitteitä siitä, mitä tekijöitä on aiheellista ottaa huomioon, kun on kysymys jään kitkasta.

Ensimmäiseksi on todettava, että pintojen olisi oltava mahdollisimman sileitä. Jos esim. liikkuvan kappaleen pinnassa on teräviä ulokkeita, ne auravat jäähän vakoja, ja voitelevaa vesikalvoa ei pääse muodostumaan. Kitkakerroin määräytyy tällöin jään leikkautumisen perusteella ja on paljon suurempi kuin vesikerroksen perusteella määräytyvä kitkakerroin. Liikkuvan kappaleen lämmönjohtavuus ei saisi olla erityisen suuri. Tässä suhteessa vaatimustaso on melko lievä, sillä esim. teräksellä se on jo riittävän pieni. Noin  $-10^{\circ}\text{C}$ :ssa teräkseen johtuvan lämmön vaikutus kitkakertoimeen on vain n. 5 %. Jäätä koskevan pinnan tulisi olla pieni ja kappaleen jäykkyuden suuri, jotta kosketuskohtien lukumäärä jäisi pieneksi. Tämän vaikutus ei tosin ole kovin voimakas, koska kosketuskohtien lukumäärä esiintyy potenssissa  $1/4$  (yhtälö (13)). Kappaleen liukuvalla pinta-alalla alarajan asettaa jään kovuus. Se riippuu mm. voiman vaikutusajasta ja varsinkin  $0^{\circ}\text{C}$  lähellä voimakkaasti lämpötilasta. Lämpötiloissa  $-10\dots-15^{\circ}\text{C}$  sopivat jään kovuusarvot ovat luokkaa  $30\dots60 \text{ MN/m}^2$ , lähellä  $0^{\circ}\text{C}$  ehkä  $1\dots2 \text{ MN/m}^2$ .

Kovin suuria mahdollisuuksia jään kitkan pienentämiseksi ei siten ole nähtävissä. Teoreettinen käsittely antaa kuitenkin mahdollisuuden todeta kvantitatiivisesti kunkin tekijän vaikutuksen ja siten poistaa tarpeettomia arveluita sekä vähentää kokeellisen tutkimuksen tarvetta.

#### KIRJALLISUUSLUETTELO

- [1] Archard, J.F., The temperature of rubbing surfaces. Wear 2 (1958/59), s. 438-455.

- [2] Evans, D.C.B., Nye, J.F. ja Cheeseman, K.J., The kinetic friction of ice. Proc. R. Soc. London A.347 (1976), s. 493-512.
- [3] Hobbs, P.V., Ice Physics, London, Oxford University Press, 1974. 837 s.
- [4] Oksanen, P., Coefficient of friction between ice and some construction materials, plastics and coatings. Espoo 1980. Valtion teknillinen tutkimuskeskus, Rakennetekniikan laboratorio, Tiedonanto 7, 73 s.
- [5] Oksanen, P. ja Keinonen, J., The mechanism of friction of ice. Wear, ilmestyy 1982.

*Pekka Oksanen, tekn.lis., Valtion teknillinen tutkimuskeskus, rakennetekniikan laboratorio*