

## KEHÄRAKENTEIDEN SUURET MUODONMUUTOKSET

Kari Ikonen ja Heikki Raiko

Rakenteiden Mekaniikka Vol 15  
No. 1 1982 s. 1...13

**YHTEENVETO:** Artikkelissa esitetään menetelmä, jolla lineaariseen palkkielementtimenetelmään perustuva tietokoneohjelma voidaan melko pienellä ohjelmoinnin määrällä laajentaa sellaiseksi, että suuret muodonmuutokset ja stabiiliteetti-probleemat voidaan käsitellä. Menetelmä perustuu oletukseen, että yksittäisen elementin muodonmuutokset elementin paikallisessa koordinaatistossa ovat pieniä.

### JOHDANTO

Kehä- tai ristikkorakenteiden suurilla muodonmuutoksilla ja stabiliteetillä on merkitystä esimerkiksi mastoissa ja nosturikehissä sekä sellaisissa laakeissa hallien ja säiliöiden kattorakenteissa, joissa kantava osa muodostuu kehärakenteesta.

Kehärakenteiden lineaarista analysointia varten on tehty suuri määrä tietokoneohjelmia. Tämän vuoksi on tarpeen kehittää menetelmiä, joilla lineaarisia ohjelmia sopivasti täydentämällä voidaan laskea suuret muodonmuutokset ja stabiliteetti-ongelmat.

Yksinkertainen tapa suurten muodonmuutosten laskemiseen olisi jakaa kuorma osiin, laskea solmupisteiden siirtymät osakuormalla ja lisätä ne solmujen koordinaatteihin uuden geometrian saamiseksi ja jatkaa samaan tapaan seuraavien kuormanlisäysten käsittelyä.

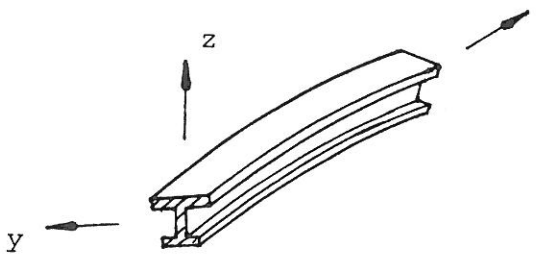
Tämä tapa johtaa kuitenkin yleisesti ja esim. laakeiden kaarien stabiliteettilaskelmissa virheelliseen tulokseen, minkä vuoksi oikein toimivan laskentamenetelmän kehittämiseksi on syytä nojautua yksityiskohtaiseen matemaattiseen tarkasteluun.

Nyt esitettävää laskentamenetelmää kehitettäessä oletetaan, että yksittäisen elementin muodonmuutokset ovat elementin paikallisessa koordinaatistossa pieniä. Tähän on aina mahdollista päästä, jos rakenne jaetaan tarpeeksi tiheästi elementteihin.

### KEHÄRAKENTEEN TASAPAINOYHTÄLÖN JOHTAMINEN ENERGIATARKASTELULLA

Suurten muodonmuutosten iterointikääva perustuu seuraavassa johdettavaan tasapainoyhtälöön. Yhtälön johtamisessa ei sinänsä ole mitään uutta, mutta koska yhtälön merkitys on keskeinen, se johdetaan kehärakenteelle sovellettuna.

Tarkastellaan aluksi yhtä elementtiä sen paikallisessa koordinaatistossa.



Elementin muuttaessa infinitesimaalisesti muotoaan on elementin muodonmuutosenergian muutos  $dW_e$

$$dW_e = \int_{V_e} d\{\epsilon\}_e^T \{\sigma\}_e dV_e, \quad (1)$$

jossa  $\{\epsilon\}_e$  on venymä ja  $\{\sigma\}_e$  jännitys. Ala-indeksi  $e$  viittaa elementtiin.

Kuva 1. Elementin paikallinen koordinaatisto.

Interpolaatiofunktioiden avulla voidaan tunnetusti muodostaa matriisi  $[B]_e$ , joka

muuntaa solmupistesiertymavektorin  $\{a\}_e$  venymiksi  $\{\epsilon\}_e$  seuraavasti:

$$d\{\epsilon\}_e = [B]_e d\{a\}_e. \quad (2)$$

Elementin asennon perusteella voidaan muodostaa matriisi  $[L]_e$ , joka muuntaa elementin globaalissa koordinaatistossa lausutun siirtymävektorin muutoksen  $d\{a\}_e^g$  paikallisessa koordinaatistossa ilmaistuksi muutokseksi seuraavasti:

$$d\{a\}_e = [L]_e d\{a\}_e^g. \quad (3)$$

Tasotapauksen koordinaatistomuunnosmatriisi on

$$[L]_e' = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

jossa  $\phi$  on elementin paikallisen x-akselin ja pääkoordinaatiston x-akselin välinen kulma. 3-dimensioisessa tapauksessa koordinaatistomuunnosmatriisi on

$$[L]_e' = \begin{bmatrix} x_x & x_y & x_z \\ y_x & y_y & y_z \\ z_x & z_y & z_z \end{bmatrix},$$

jossa ensimmäisellä vaakarivillä ovat paikallisen x-akselin suuntaisen yksikkövektorin komponentit, toisella y-akselin ja kolmannella z-akselin suuntaisen vektorin komponentit.

Lausekkeista (1), (2) ja (3) seuraa

$$dW_e = (d\{a\}_e^g)^T [L]_e'^T \int_{V_e} [B]_e'^T \{\sigma\}_e dV_e.$$

Summaamalla kaikkien elementtien vaikutus saadaan yhtäsuuruus solmupiste-kuormien  $\{R\}$  tekemään työhön

$$\sum (d\{a\}_e^g)^T [L]_e'^T \int_{V_e} [B]_e'^T \{\sigma\}_e dV_e = d\{a\}^T \{R\},$$

jossa vektori  $\{a\}$  on koko rakenteen siirtymävektori ja  $\{R\}$  kuormavektori globaalissa koordinaatistossa. Vaihtamalla summausmerkin paikka saadaan yhtälön molemmille puolille kerroin  $d\{a\}^T$ . Se voidaan nollassa eriävänä jättää pois, joten saadaan

$$\sum [L]_e^T \int_{V_e} [B]_e^T \{\sigma\}_e dV_e = \{R\}. \quad (4)$$

Tämä on yleispätevä tasapainoyhtälö riippumatta geometrisesta tai materiaalisesta epälineaarisuudesta ja se saadaan lineaarista tapausta lukuunottamatta toteutumaan yleisesti vain iteroimalla.  $[B]_e$  ja  $\{\sigma\}_e$  on nyt lausuttu elementin paikallisessa koordinaatistossa. Huomattakoon, että yhtälö (4) ei toteudu niille komponenteille, joille on annettu siirtymäreunaehdoja, koska vastaava komponentti vektorissa  $d\{a\}$  häviää.

Lineaarisisessa tapauksessa on  $\{\sigma\}_e = [D]_e [B]_e \{a\}_e$ , jossa  $[D]_e$  on elementin kimomatriisi, jolloin kaavasta 4 tulee

$$\sum ([L]_e^T \int_{V_e} [B]_e^T [D]_e [B]_e dV_e) [L]_e \{a\}_e = \{R\}.$$

Integraali

$$[k]_e = \int_{V_e} [B]_e^T [D]_e [B]_e dV_e \quad (5)$$

on elementin jäykkyyismatriisi elementin paikallisessa koordinaatistossa, joten

$$\sum ([L]_e^T [k]_e [L]_e \{a\}_e) = (\sum [L]_e^T [k]_e [L]_e) \{a\} = [K] \{a\} = \{R\},$$

jossa

$$[K] = \sum [L]_e^T [k]_e [L]_e$$

on koko rakenteen jäykkyyismatriisi. Lineaarisen tapauksen tunnettu perusyhtälö on täten

$$[K] \{a\} = \{R\}. \quad (6)$$

#### ITEROINTIKAAVAN JOHTAMINEN

Yhtälö (4), joka on kehärakenteiden suurten muodonmuutosten perusyhtälö, on ratkaistavissa yleisessä tapauksessa vain iteratiivisesti. Pidetään tois- taiseksi kuormavektoria  $\{R\}$  vakiona ja oletetaan, että iteroinnin edetessä on iterointikierroksella  $i$  saatu elementin jännitykseksi  $\{\sigma\}_{e_i}$ , jossa olevaa virhettä merkitään  $\Delta\{\sigma\}_e$ :lla. Sijoittamalla 'oikea' jännityksen arvo

$$\{\sigma\}_e = \{\sigma\}_{e_i} + \Delta\{\sigma\}_e = \{\sigma\}_{e_i} + [D]_e [B]_e \Delta\{a\}_e$$

yhtälöön (4) ja ottamalla huomioon elementin paikallisessa koordinaatistossa vakiona pysyvän elementin jäykkymatriisin lauseke (5) saadaan

$$\sum [L]_e^T [k]_e \Delta \{a\}_e = \{R\} - \sum [L]_e^T \int_{V_e} [B]_e \{\sigma\}_{e_i} dV_e. \quad (7)$$

Yhtälön vasen puoli saadaan muotoon

$$\sum [L]_e^T [k]_e \Delta \{a\}_e = (\sum [L]_e^T [k]_e [L]_e) \Delta \{a\} = [K]_t \Delta \{a\},$$

jossa  $[K]_t$  on rakenteen tangentiaalinen jäykkymatriisi. Se voidaan helposti laskea rakenteen kulloisenkin geometrian perusteella. Matriisi  $[k]_e$  pysyy vakiona, mutta matriisi  $[L]_e$  muuttuu.

Merkitään yhtälön (7) oikealla puolella

$$\{F\}_{\sigma_e} = \int_{V_e} [B]_e^T \{\sigma\}_{e_i} dV_e, \quad (8)$$

joka esittää elementin jännitystilaa vastaavaa kuormavektoria elementin paikallisessa koordinaatistossa. Virheellisestä jännitystilasta aiheutuvaksi korjaukseksi siirtymätilaan tulee siis yhtälöstä (7)

$$\Delta \{a\} = [K]_t^{-1} (\{R\} - \sum [L]_e \{F\}_{\sigma_e}).$$

Tällä siirtymän korjauksella muutetaan rakenteen geometriaa ja siirtymävektorin iterointikaavaksi saadaan

$$\{a\}_{i+1} = \{a\}_i + \Delta \{a\} = \{a\}_i + [K]_t^{-1} (\{R\} - \sum [L]_e^T \{F\}_{\sigma_e}). \quad (9)$$

Iteroinnin kuluessa tämän kaavan kaikki termit muuttuvat paitsi mahdollisesti kuormavektori  $\{R\}$ . Tässä yksinkertaisessa iterointikaavassa on syytä kiinnittää huomiota termiin  $\sum [L]_e^T \{F\}_{\sigma_e}$ , joka helposti jää pois ilman yksityiskohtaista matemaattista tarkastelua. Iteroinnin suppettua kaavan (9) kaarisulkulauseke häviää ja tasapainoyhtälö (4) toteutuu.

Iterointi on mahdollista suorittaa koko kuormalle suoraan. Joissakin tapauksissa, esim. jos materiaalin epälineaarisuus halutaan ottaa tarkastelussa huomioon, on tarpeen lisätä kuormaa portaittain. Kaavan (9) yhteydessä tämä toteutetaan yksinkertaisesti siten, että iteroinnin supettua osakuormalla kuormavektoria muutetaan (yleensä kasvatetaan) ja iterointi aloitetaan alusta.

Iterointia on mahdollista joissakin tapauksissa nopeuttaa, jos tangentiaalista jäykkymatriisia  $[K]_t$  pidetään jonkin aikaa vakiona. Iterointimenetelmälle asetetaan tällöin kuitenkin melkoisia vaatimuksia, koska geometrisessa epälineaarisuudessa rakenne saattaa jäyketyä ja monet iterointimenetelmät eivät tällöin toimi. BFGS-menetelmän (kehittäjät Broyden, Fletcher, Goldfarb, Shanno) käytöstä on saatu hyviä kokemuksia myös geometrisesti epälineaarisissa probleemoissa (ks. /1/).

## KUORMAVEKTORIN $\{F\}_{\sigma_e}$ LASKEMINEN

Koska elementtiverkkoa tarpeeksi tihentämällä elementin muodonmuutokset elementin paikallisessa koordinaatistossa on saatavissa pieniksi, voidaan kaavaan (8) sijoittaa

$$\{\sigma\}_{e_i} = [D]_e [B]_e \{a\}_e, \text{ joten} \quad (10)$$

$$\{F\}_{\sigma_e} = [k]_e \{a\}_e.$$

Jos olisi otettava huomioon myös lämpökuorma, olisi yhtälö 10 kirjoitettava muotoon

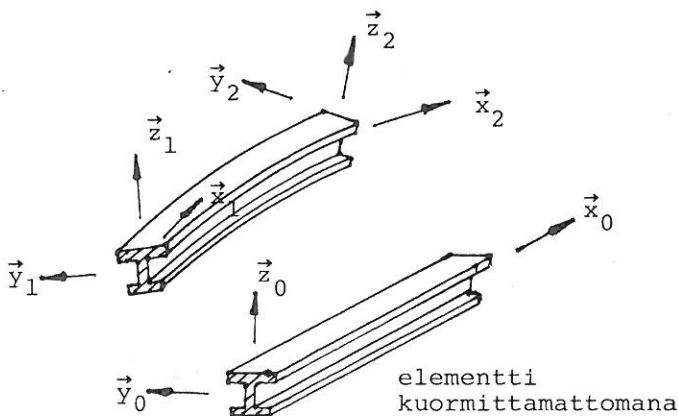
$$\{F\}_{\sigma_e} = [k]_e \{a\}_e - \int_{V_e} [B]_e^T [D]_e \{\epsilon\}^t dV_e,$$

jossa  $\{\epsilon\}^t$  on lämpövenymä.

Varsinaiseksi ongelmaksi muodostuukin siis vain siirtymävektorin  $\{a\}_e$  laskeminen elementin paikallisessa koordinaatistossa.

Elementin paikallinen koordinaatisto voidaan valita siten, että x-akseli kulkee elementin päätepisteiden kautta, jolloin vektorissa  $\{a\}_e$  ei ole siirtymätermiä, jotka olisivat kohtisuorassa x-akselia vastaan. Aksiaalisen muodonmuutoksen lisäksi on riittävää tarkastella vain kiertymiä. Aksiaalitermi kuormavektoriin  $\{F\}_{\sigma_e}$  lasketaan yksinkertaisesti siten, että elementin päätepisteiden tarkasteluhetken ja alkutilanteen koordinaateista lasketaan Pythagoraan lauseen mukaan elementin piteneminen ja tämä kerrotaan elementin aksiaaliseen jäykkyydellä, jolloin saadaan elementin päiden aksiaalivoimat.

Kiertymätermien laskemiseksi joudutaan tarkastelemaan elementin alku- ja loppupäässä olevien paikallisten koordinaatistojen kiertymiä. Paikallinen koordinaatisto yhtyy poikkipinnan pääjäyhyysakseleihin. Tarkastelu suoritetaan kolmessa vaiheessa tehokkaita vektorimerkintöjä käyttäen.

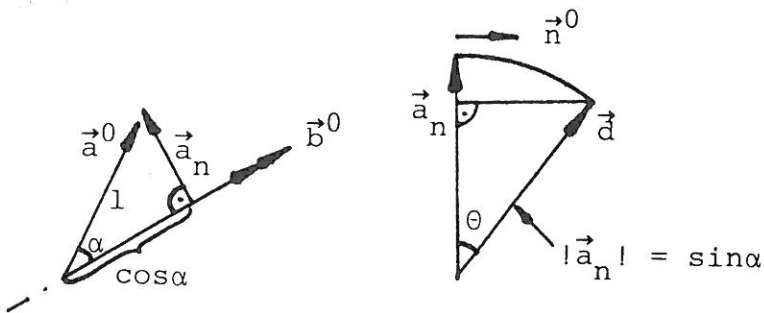


Kuva 2. Elementin koordinaatistot.

Ensimmäisessä vaiheessa selvitetään deformoituneen elementin alku- ja loppupään koordinaatistot, joihin liitetyviä akseleita on kuvassa 2 merkitty alaindekseillä 1 ja 2. Kuormittamattomassa alkutilassa suoran elementin alku- ja loppupään paikalliset koordinaatistot ovat samat. Tarkastellaan tilannetta elementin alkupäässä. Merkitään sen kokonaiskiertymä vektorilla

$$\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k},$$

jonka itseisarvo  $\theta = |\vec{b}^0|$  ilmaisee kiertymän suuruuden ja joka voi nyt olla mielivaltaisen suuri. Deformoitunut koordinaatisto saadaan kiertämällä vektoreita  $\vec{x}_0$ ,  $\vec{y}_0$  ja  $\vec{z}_0$  kulman  $\theta$  verran vektorin  $\vec{b}$  suuntaisen suoran ympäri. Tarkastellaan jonkin vektoreista  $\vec{x}_0$ ,  $\vec{y}_0$  ja  $\vec{z}_0$  kiertoa. Merkitään tätä vektoria  $\vec{a}^0$ :lla.



Kuva 3. Vektorin  $\vec{a}^0$  kierto vektorin  $\vec{b}^0$  ympäri kulman  $\theta$  verran.

Vektorilaskennan mukaan  $\vec{b}^0 = \vec{b}/|\vec{b}|$  ja  $\cos \alpha = \vec{a}^0 \cdot \vec{b}^0$ . Normaalivektorin  $\vec{a}_n$  pituus on  $|\vec{a}_n| = \sin \alpha$ , joten

$$\vec{a}_n^0 = (\vec{a}^0 - \cos \alpha \vec{b}^0) / \sin \alpha.$$

Vektoreiden  $\vec{b}^0$  ja  $\vec{a}_n^0$  ristitulo  $\vec{n}^0 = \vec{b}^0 \times \vec{a}_n^0$  on kohtisuorassa näiden vektoreiden muodostamaa tasoa vastaan, jolloin vektorin  $\vec{a}_n$  asento kierron jälkeen on

$$\begin{aligned} \vec{d} &= |\vec{a}_n| \cos \theta \vec{a}_n^0 + |\vec{a}_n| \sin \theta \vec{n}^0 \\ &= \cos \theta \vec{a}^0 - \cos \theta \cos \alpha \vec{b}^0 + \sin \theta (\vec{b}^0 \times \vec{a}^0). \end{aligned}$$

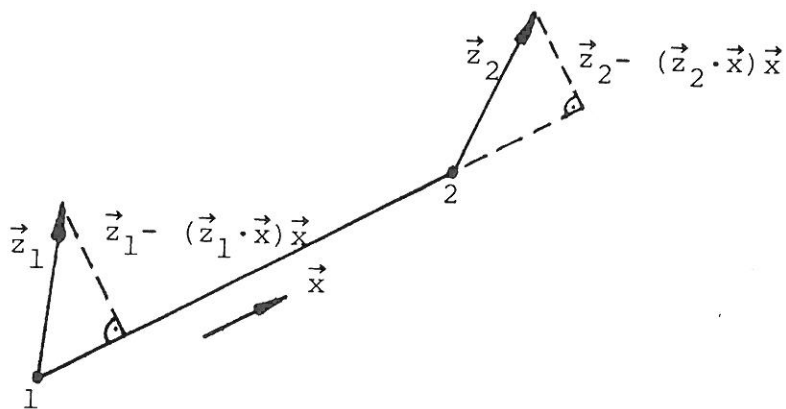
Haettu kierretty vektori, jota merkitään vektorilla  $\vec{c}^0$ , on

$$\vec{c}^0 = \cos \alpha \vec{b}^0 + \vec{d}$$

$$\vec{c}^0 = \cos \theta \vec{a}^0 + \cos \alpha (1 - \cos \theta) \vec{b}^0 + \sin \theta (\vec{b}^0 \times \vec{a}^0). \quad (11)$$

Tämän kaavan mukaan kierretään alkuperäisen koordinaatiston pääjäyhyysakselit uusiin asemiin.

Toisena vaiheena on koordinaatistojen 1 ja 2 avulla määrätä deformoituneen elementin paikallinen koordinaatisto  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  siten, että vektorit  $\vec{y}$  ja  $\vec{z}$  kuvaavat keskimäärin suuntia  $\vec{y}_1$  ja  $\vec{y}_2$  sekä  $\vec{z}_1$  ja  $\vec{z}_2$ .  $\vec{x}$ -vektori määräytyy suoraan elementin päätepisteiden sijainnin perusteella. Summataan vektoreiden  $\vec{z}_1$  ja  $\vec{z}_2$   $\vec{x}$ -akselia vastaan kohtisuorat komponentit (ks. kuva 4). Summavektorin suuntainen yksikkövektori on  $\vec{z}$ -vektori.  $\vec{y}$ -vektori saadaan vektoreiden  $\vec{z}$  ja  $\vec{x}$  ristitulona. Kolmannen vaiheen muodostaa elementin alku- ja loppupään kiertyminen  $\theta_x$ ,  $\theta_y$ , ja  $\theta_z$  määrittäminen. Riittää tarkastella vain elementin alkupäätä. Haetaan siis vektori, jonka ympäri deformoituneen elementin edellä määritettyä paikallista koordinaatistoa  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  on kierrettävä, jotta saataisiin koordinaatisto, jonka määrittelevät vektorit  $\vec{x}_1$ ,  $\vec{y}_1$  ja  $\vec{z}_1$ .



Kuva 4. Paikallisen koordinaatiston  $\vec{z}$ -suunnan laskemisessa käytettyjä merkintöjä.

Kiertoakseli voidaan helposti laskea siitä havainnosta, että se on kohtisuorassa vektoreita  $\vec{x}_1 - \vec{x}$ ,  $\vec{y}_1 - \vec{y}$  ja  $\vec{z}_1 - \vec{z}$  vastaan. Kiertoakselin suuntainen vektori on esim. ristitulo  $(\vec{x}_1 - \vec{x}) \times (\vec{y}_1 - \vec{y})$ . Kiertokulman suuruus voidaan tämän jälkeen laskeavähentämällä vektoreista  $\vec{x}_1$  ja  $\vec{x}$  ensin niiden kiertoakselilla olevat projektiot, jotka luonnollisesti ovat yksi ja sama vektori, ja sen jälkeen kiertokulma on suoraan näiden erotusvektoreiden välinen kulma. Se laskeetaan erotusvektoreiden pistetulon avulla.

Näin voidaan muodostaa kiertoakselin suuntainen vektori  $\vec{\theta}$ , jonka pituus on em. kiertokulman suuruinen.

Haetut kiertymät  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  ja  $\theta_z$  saadaan tämän jälkeen pistetuloina

$$\theta_x = \vec{\theta} \cdot \vec{x},$$

$$\theta_y = \vec{\theta} \cdot \vec{y} \quad \text{ja}$$

$$\theta_z = \vec{\theta} \cdot \vec{z}.$$

Nämä komponentit sijoitetaan oikeille paikoilleen vektoriin  $\{a\}_e$ , joka kerrotaan jäykkyyismatriisilla kuormavektorin  $\{F\}_{\sigma_e}$  saamiseksi. Tässä vaiheessa voidaan tarvittaessa laskea myös jännitykset.

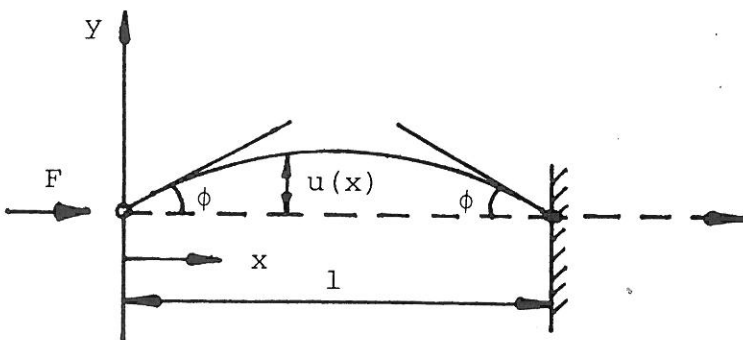
Suuriin muodonmuutoksiin liittyvän tarkastelun monimutkaisin vaihe on siis vektorin  $\{a\}_e$  kiertymätermien laskeminen. Tietokoneohjelmaan tästä aiheutuu noin sadan lauseen lisäys, mutta asia on sikäli yksinkertainen, että toiminnot muodostavat yhtenäisen kokonaisuuden, joka lineaarista tietokoneohjelmaa täydennettäessä voidaan tehdä erilliseksi osaksi. Ohjelmoinnissa on kiinnitettävä huomiota erikoistilanteisiin, kuten esim. siihen, että kahden yhden-suuntaisen vektorin ristitulolla ei voida määrittää kolmatta vektoria.

## SUPPENEVUUSKRITEERIT

Ohjelman toteutuksessa on suppenevuuskriteerinä käytetty kaavan (9) mukaisessa iteroinnissa siirtymävektorin, kuormavektorin sekä näiden tulovektorin normeja. Eri tyyppisissä analyyseissä suppenevuus saavutetaan selvästi vain jollakin normilla. Esim. stabiliteettianalyyseissä viimeksi mainittu ns. energianormi on selvin.

## ELEMENTIN KÄYRISTYMISEN VAIKUTUS

Palkkielementin pituudesta ja poikkipintasuuureista riippuen jossakin vaiheessa päätepisteiden kallistumien kasvaessa lineaarisen teorian pätevyysalue loppuu. Asian tutkiminen kaikkien vapausasteiden ollessa samanaikaisesti mukana on monimutkaista. Ilmeisesti aksiaalinen jäykkyys alenee herkimmin kallistumien kasvaessa. Seuraavassa rajoitutaan yksinkertaisuuden vuoksi tarkastelemaan vain aksiaalisen jäykkyyden pienenemistä jättäen aksiaalisen vapausasteen kytkeytymisen muihin vapausasteisiin huomioonottamatta. Oletetaan yksinkertaisuuden vuoksi, että kallistumat elementin alku- ja loppupäässä ovat itseisarvoltaan yhtäsuuret, jolloin taipuman  $u$  polynomiapproksimaatio on



$u = x(1 - \frac{x}{l}) \tan \phi$ . Jos kulma  $\phi$  on kohtuullisen pieni, on muodonmuutosenergia

Kuva 5. Käyristyneen elementin aksiaalijäykkyys.

$$W = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{N^2}{EA} dx + \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EI} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^l \frac{F^2}{EA} dx + \frac{1}{2} \int_0^l \frac{Fx[(1 - \frac{x}{l}) \tan \phi]^2}{EI} dx,$$

josta derivoimalla saadaan aksiaaliseksi siirtymäksi

$$\delta_x = \frac{\partial W}{\partial F} = \frac{Fl}{EA} + \frac{1}{30} \tan^2 \phi \frac{Fl^3}{EI}.$$

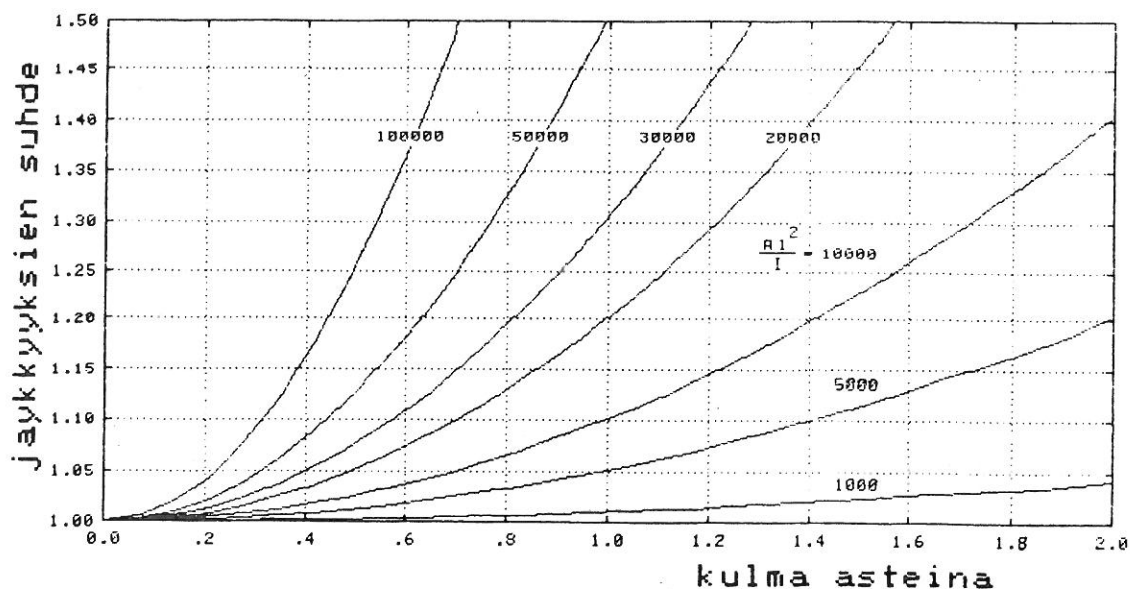
Suoran elementin  $\delta'_x = \frac{Fl}{EA}$ , joten suhde



$$\frac{\delta}{\delta'} = 1 + \frac{1}{30} \tan^2 \phi \frac{Al^2}{I}$$

kuvaa aksiaalijäykkyyksien suhdetta.

Kuvassa 6 on tulos esitetty graafisesti. Ohjelmaan voidaan tehdä lisäys, joka annetun toleranssin puitteissa varoittaa tai keskeyttää ohjelman toiminnan, jos käyrästyneen ja vastaavan suoran elementin aksiaalijäykkyydet poikkeavat liiaksi toisistaan.



Kuva 6. Aksiaalijäykkyyden pieneneminen elementin päiden kallistuman funktiona.

#### LASKENTAESIMERKKEJÄ

##### Ulkopalkin nurjahdus ja kiepahdus

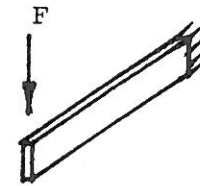
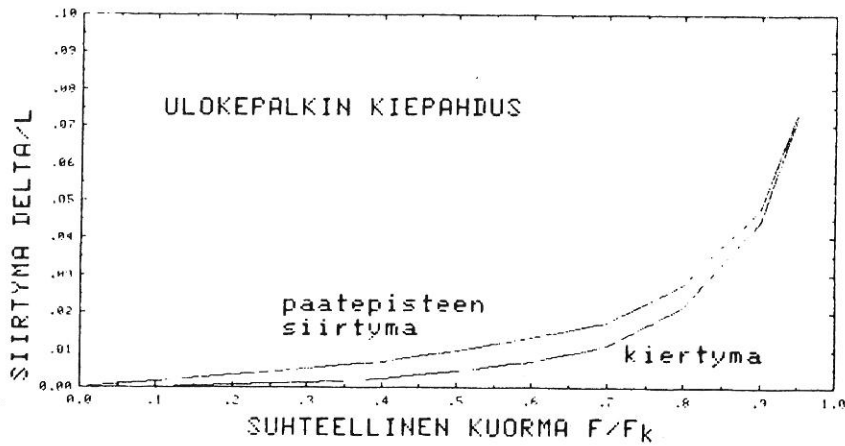
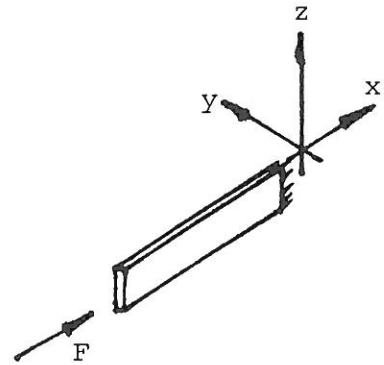
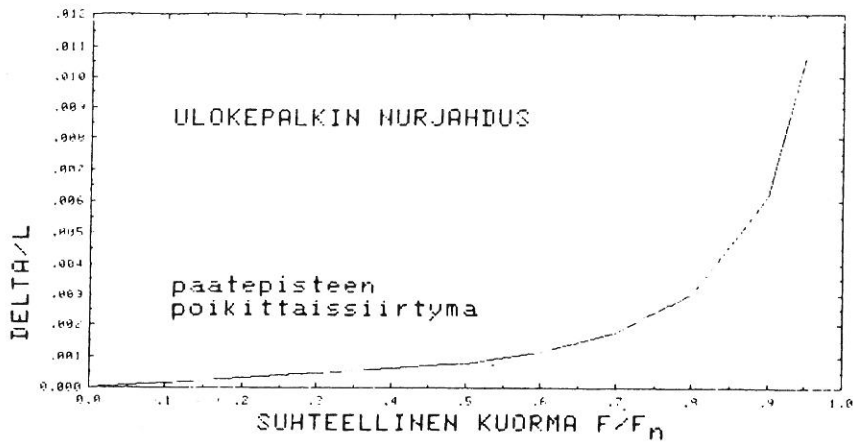
Kuvassa 7 on esitetty siirtymän riippuvuus suhteellisesta kuormituksesta ulokepalkin päässä.  $F_n$  ja  $F_k$  on laskettu analyttisistä kaavoista

$$F_n = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

$$F_k = \frac{4.013}{l^2} \sqrt{EI_z GI_t}$$

Kuvan 7 käyrästä nähdään, että kuormaa lisättäessä kriittinen kuorma vastaa analyttisistä kaavoista laskettuja arvoja. Näissä esimerkkitapauksissa laskentamenetelmä edellyttää, että geometriassa tai kuormituksessa on pieni poikkeama ideaalitilanteesta, jotta siirtymiä alkaisi muodostua. Tämä on lähempänä fyysikaalista todellisuutta verrattuna tilanteeseen, jossa rakenne oletetaan virheettömäksi, jolloin tulos on myös epävarmalla puolella.

Molemmissa tapauksissa palkki jaettiin kymmeneen elementtiin ja kuorma kymmeneen portaaseen välillä 50-130 % nurjahdus- tai kiepahduskuormasta. Pie-

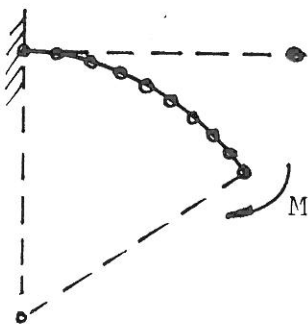


Kuva 7. Ulokepalkin nurjahdus ja kiepahdus.

nilillä kuorman arvoilla tarvittiin n. neljä iterointikierrrosta kuormanlisäystä kohti ja viimeisellä kuorman lisäyksellä, jolla vielä saatiin tulos, tarvittiin n. 15 iterointia. Ajoaika CDC CYBER 173-koneella oli 0,6 s keskusyksikköaika yhtä laskentakierrosta kohti ja laskentakierroksia oli 44.

Pistemomentin kuormittama uloke

Pelkän taivutusmomentin kuormittama palkki käyristyy ympyrän kaarelle.



Tässä tapauksessa laskentamenetelmä osoittautui hyvin tarkaksi ja kuormitettaessa palkkia niin, että kallistumaksi ulokkeen päässä tuli 1 rad, olivat poikkeamat ympyrän kaaresta hyvin pieniä. (Kuva 8.)

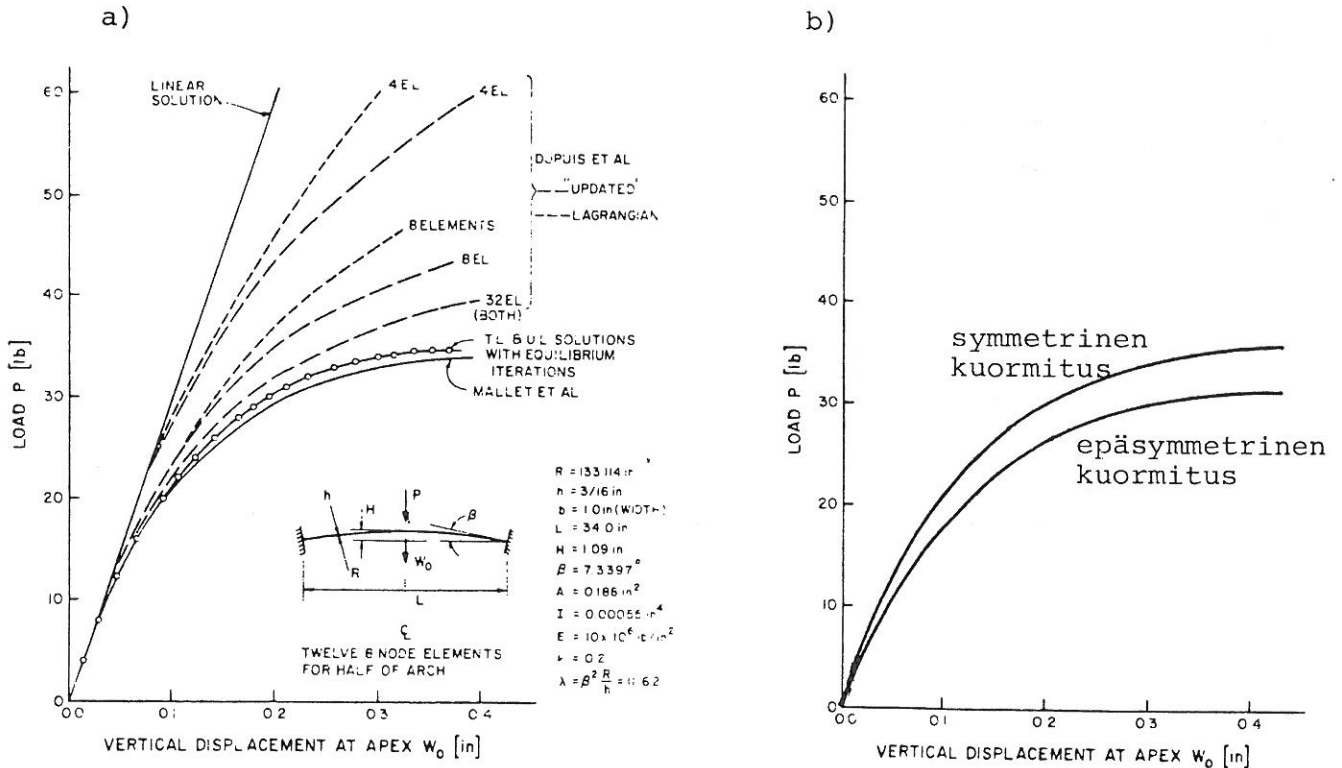
Laakean kaaren stabiliteetti

Kuva 8. Palkin taivuttaminen ympyrän kaarelle.

Tämä esimerkki on otettu viitteestä /1/, jossa on laskettu symmetrinen tapaus (kuva 9a). Kuvassa 9b on esitetty tulos symmetrisessä ja

epäsymmetrisessä tapauksessa. Symmetrisen tapauksen tulos vastaa hyvin kuvasta 9a ilmenevää oikeata tulosta. Epäsymmetrisessä tapauksessa kaaren kantokyky on n. 10 % pienempi kuin symmetrisessä tapauksessa.

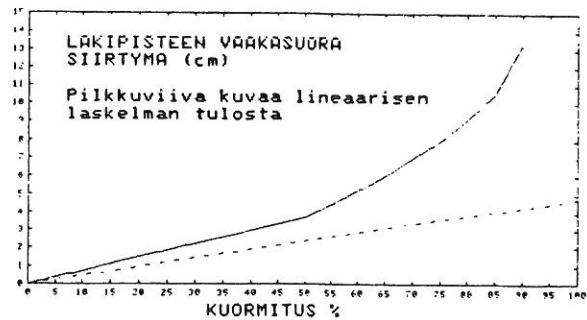
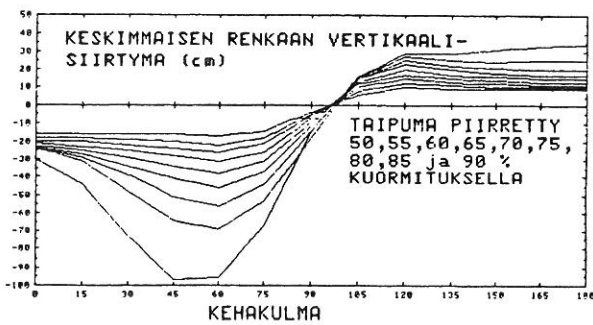
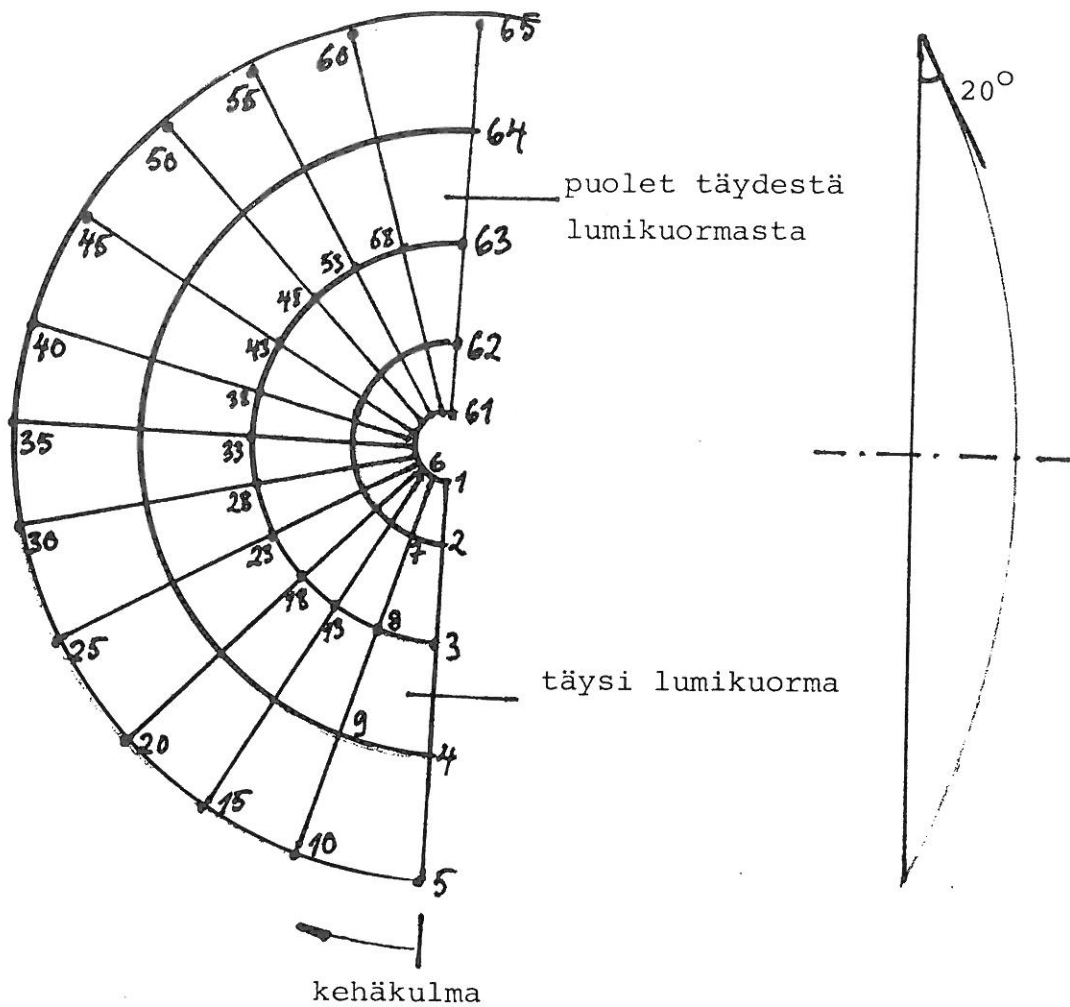
Kaari jaettiin 16 elementtiin ja kuormitus 20 portaaseen, joista kunkin käsittelemiseen tarvittiin keskimäärin 3 iterointikierrosta. Ajoaikaa kului 1 s yhtä laskentakierrosta kohti ja laskentakierroksia oli 58.



Kuva 9. Laakean kaaren voima-siirtymäriippuvuus.

#### Kattorakenteen kokonaisstabiliteetti

Rakenteen kuormituksena on oma paino ja lumikuorma siten, että toisella puolella kattoa lunta on kaksi kertaa enemmän kuin toisella. On riittävää tarkastella symmetrisistä puoliskoista vain toista (kuva 10). Katto on melko laakea kaltevuuden ollessa katon reunalla n.  $20^\circ$ . Kuvassa 9 on esitetty kolmannen renkaan vertikaalisiirtymät suhteellisen kuorman eri arvoilla. Suurin siirtymä tulee solmupisteiden 18 ja 23 kohdalle. Käyristä voidaan päätellä katon menettävän kantokykynsä suhteellisen kuorman ollessa yli 90 %. 100 %:n kuormalla iterointi ei enää supennut. Jo 80 %:n kuormituksella siirtymät ovat kolminkertaiset verrattuna lineaarisen teorian mukaan laskettuihin siirtymiin. Ajoaikaa kului noin puoli minuuttia yhtä iterointikierrosta kohti ja iterointikierrroksia tarvittiin yhtä kuormitusta kohti yleensä vähemmän kuin 10.



Kuva 10. Kattorakenne, keskimmäisen renkaan (solmut 3,8,...,63) vertikaalsiirtymät ja lakipisteen vaakasiirtymä.

#### JOHTOPÄÄTÖKSIÄ

Edellä kuvattu laskentamenetelmä ja sen mukaiset lisäykset lineaarisiin tapauksiin kehitettyyn palkkielementtuohjelmaan laajentavat huomattavasti mahdollisuuksia ratkaista käytännön kehärakenteisiin liittyviä ongelmia. Mo-

nimutkaistenkin kehärakenteiden suuret siirtymät, kokonaisstabiliteettia koskevat tarkastelut, nurjahdukset ja kiepahdukset voidaan käsitellä. Numeerisen menetelmän etuna on myös, että rakenteen valmistuksessa syntyvät geometriset virheellisyydet on helppo ottaa laskentamallissa huomioon ja saada näin fyysisesti realistinen arvio rakenteen käyttäytymisestä. Laskentamenetelmän rajoituksena on, että yksittäisen elementin muodonmuutokset elementin paikallisessa koordinaatistossa ovat pieniä. Tämä rajoitus olisi mahdollista poistaa siirtymällä käyristyviin elementteihin, kuten on tehty esim. ADINA-ohjelmassa (/1/). Käyristyvien elementtien mukaanottaminen mutkistaisi kuitenkin huomattavasti teoriaa ja lineaarisiin tapauksiin kehitetyn kehäohjelman täydentäminen ei kävisi päinsä enää yhtä helposti kuin edellä esitetyssä menetelmässä. Vaatimus yksittäisen elementin pienistä muodonmuutoksista kasvattaa tietysti elementtimallin kokoa ja ajokustannuksia, mutta siirryttäessä lähitulevaisuudessa supertietokoneiden käyttöön voidaan hyvinkin suurten kehärakenteiden suuret muodonmuutokset ja stabiliteettiongelmat ratkaista kohtuullisin kustannuksin.

#### KIRJALLISUUTTA

- [1] Bathe, K.J., Finite Element Analysis Using the ADINA System. ADINA Seminar, August 27-28, 1981, Stockholm, ADINA Engineering Ab, Västerås.

*Kari Ikonen, tekn.lis., Valtion teknillinen tutkimuskeskus, Ydinvoimatekniikan laboratorio*

*Heikki Raiko, dipl.ins., Valtion teknillinen tutkimuskeskus, Ydinvoimatekniikan laboratorio*