KOLME MEKANIIKAN PARADOKSIA

Mats Gyllenberg ja
Eero-Matti Salonen

Rakenteiden Mekaniikka Vol 14
No. 3 1981 s. 36...43

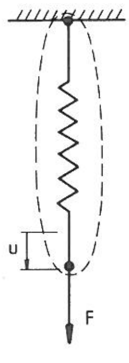
YHTEENVETO: Artikkelissa johdetaan seuraavat yllättävät tulokset: (1) Jousen venymä siihen vaikuttavan voiman johdosta häviää aina. (2) Maan painovoimaa ei tarvitse ottaa huomioon rakenteiden analysoinnissa. (3) Itse asiassa gravitaatiota ei ole olemassakaan. Lopuksi korjataan johdoissa tehdyt virheet.

JOUSI

Konservatiivisen diskreetin systeemin tasapainoyhtälöt saadaan tunnetusti kaavoista

$$\frac{\partial V}{\partial u_i} = 0 , \quad i = 1,2,\ldots,n \tag{1}$$

joissa $V = V(u_1,u_2,\ldots,u_n)$ on systeemin potentiaalienergia ja suureet $u_1,u_2,\ldots,u_n$ ovat ns. yleistettyjä siirtymiä tai yleistettyjä koordinaatteja, jotka määrittelevät systeemin aseman. Kaava (1) kulkee tavallisesti nimellä potentiaalienergian stationaarisen arvon — tai kun kyseessä on stabiili tasapainoasema — potentiaalienergian minimin periaate.



Kuva 1. Jousisysteemi.

Sovelletaan äskeistä tulosta kuvan 1 esittämän jousisysteemin analysoimiseen. Jousi otaksutaan tavanomaiseen tapaan massattomaksi ja lineaariseksi; ts. jousivoiman F ja jousen venymän (lepopituuden suhteen) u välillä on yhteys

$$F = ku , \tag{2}$$

jossa k on jousen ns. jousivakio. Olkoon F vaikkapa vakiovoima, esimerkiksi jousen päässä olevaan pistemassaan vaikuttava painovoima. Jousen kimmoenergia eli systeemin sisäinen potentiaalienergia on tunnetusti puoli kertaa jousivakio kertaa jousen venymä toiseen ja vakiovoiman potentiaalienergia on samoin miinus voima kertaa siirtymä voiman suunnassa. Täten systeemin kokonaispotentiaalienergian lauseke on tässä

$$V = \frac{1}{2} ku^2 - Fu \ , \tag{3}$$

kun asetetaan $V = 0$ alkutilassa $u = 0$. Periaatetta (1) sovellettaessa suureen V tulee olla lausuttuna siirtymien funktiona, joten ottamalla kaavan (2) mukaisesti huomioon, että $F = F(u) = ku$, saadaan

$$V(u) = \frac{1}{2} ku^2 - ku \cdot u = - \frac{1}{2} ku^2 \ . \tag{4}$$

Tasapainoyhtälö on

$$\frac{dV}{du} = -ku = 0 \ , \tag{5}$$

jonka ratkaisu on

$$u = 0 \tag{6}$$

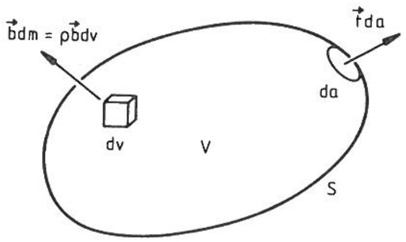
eli jousen venymä voiman F johdosta häviää.

MAAN PAINOVOIMA

Kontinuumimekaniikan ns. liikemäärän taseen aksiooma (engl. principle of balance of momentum) kuuluu seuraavasti /2, s. 213/: Kappaleeseen vaikuttavien ulkoisten voimien resultantti on yhtä suuri kuin kappaleen liikemäärän muutosnopeus. Kaavana tämä on

$$\int_S \vec{t} da + \int_V \rho \vec{b} dv = \frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{v} dv \ . \tag{7}$$

Ulkoiset voimat koostuvat siis ns. pintavoimista (engl. surface forces, contact forces), joiden suuruus pinta-alaa kohti on $\vec{t}$ (= traktio, jännitysvektori) sekä ns. kappalevoimista (engl. body forces) eli massavoimista, joiden suuruus massaa kohti on $\vec{b}$ (= ominaiskappalevoima, kenttävoiman intensiteetti). Suureet ρ, $\vec{v}$ ja t ovat vastaavasti tiheys, nopeus ja aika. Muiden tunnusten merkitys selvinnee kuvan 2 perusteella.



Kuva 2. Kontinuumikappale.

Käyttämällä hyväksi jännitystensorin $\tilde{\sigma}$ ja traktion $\vec{t}$ välistä tunnettua yhteyttä kappaleen pinnalla S sekä soveltamalla Gaussin ja Reynoldsin lauseita yhtälö (7) voidaan saattaa muotoon – lukija voi tarvittaessa vakuuttautua esimerkiksi lähteen /2/ avulla, että tässä kohdassa ei harrasteta vilppiä –

$$\int_V (\vec{\nabla}\cdot\tilde{\sigma}+\rho\vec{b}-\rho\,\frac{d\vec{v}}{dt})dv = \vec{0} \tag{8}$$

eli indeksimerkinnöin

$$\int_V (\frac{\partial\sigma_{ji}}{\partial x_j}+\rho b_i-\rho\,\frac{dv_i}{dt})dv = 0\ , \qquad i = 1,2,3\ . \tag{9}$$

Koska yhtälön (8) tai (9) tulee olla voimassa myös alueen V jokaisen osa-alueen ΔV suhteen, seuraa tästä, että integrandin tulee hävitä kaikkialla alueessa. Näin saadaan kontinuumimekaniikan ehkä tärkeimmät kaavat; ns. Cauchyn liikeyhtälöt (Cauchy v. 1827)

$$\vec{\nabla}\cdot\tilde{\sigma} + \rho\vec{b} = \rho\,\frac{d\vec{v}}{dt} \tag{10}$$

eli

$$\frac{\partial\sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho b_i = \rho\,\frac{dv_i}{dt}\ , \qquad i = 1,2,3\ . \tag{11}$$

Jos käsitellään staattista tapausta, jossa kiihtyvyys $d\vec{v}/dt = \vec{0}$, päädytään tavanomaisiin tasapainoyhtälöihin

$$\frac{\partial\sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho b_i = 0\ , \qquad i = 1,2,3\ . \tag{12}$$

Tarkastellaan vielä huolellisesti, miten ns. globaalisesta yhteydestä

$$\int_V f dv = 0 \tag{13}$$

johdetaan ns. lokaalinen yhteys

$$f = 0 \qquad \text{alueessa } V\ . \tag{14}$$

Perustelu tapahtuu seuraavasti (suora käännös lähteestä /2, s. 206/): "Otaksu, että integrandi eroaa nollasta sisäpisteessä; olkoon se vaikka positiivinen pisteessä P. Koska se on jatkuva, sen täytyy olla positiivinen pisteen P ympäristössä ja integraali tämän ympäristön yli olisi positiivinen rikkoen olettamusta, että integraali häviää tilavuuden V mielivaltaisen valinnan suhteen ja täten todistaen virheelliseksi otaksumamme, että olisi sisäpiste, jossa integrandi on positiivinen."

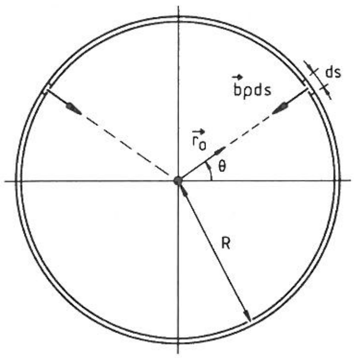
Sovellamme nyt liikemäärän taseen aksioomaa ottaen tarkasteltavaksi kappaleeksi koko maapallon. Hyvin suurella tarkkuudella pätee, että auringosta, kuusta ynnä muusta maailmankaikkeuden massasta syntyvä gravitaatiokenttä on vähäinen ja voimme siis sijoittaa yhtälöön (7)

$$\vec{b} = \vec{0}\ . \tag{15}$$

Korostettakoon vielä, että käsitteellä ulkoinen voima tarkoitetaan mekaniikassa kappaleen eli systeemin partikkeliin vaikuttavaa voimaa, joka syntyy kappaleen ulkopuolisen partikkelin johdosta. Partikkeliin vaikuttavalla sisäisellä voimalla tarkoitetaan taas voimaa, jonka aiheuttaa toinen systeemiin kuuluva partikkeli. Täten siis maapallon tapauksessa ulkoiset voimat kertyvät periaatteessa kaiken maapallon ulkopuolisen massan johdosta ja ilmeisesti kaava (15) on hyvä ensimmäinen approksimaatio. Mutta tällöinhän $\vec{b}$ tulee olemaan nolla myös liike- ja tasapainoyhtälöissä (11) ja (12). Kun ajatellaan maan pinnalla sijaitsevat rakenteet maapallon osiksi, saatu tulos pätee siis niillekin. Täten maan omaa painovoimakenttää ei tarvitse ottaa huomioon maan pinnalla sijaitsevien rakenteiden analysoinnissa. Tämä tulos avaa rakenteiden suunnittelijoille aivan uusia mahdollisuuksia.

GRAVITAATIO

Edellä osoitettiin, että maan pinnalla ei tarvitse ottaa huomioon maan omaa painovoimaa. Mutta vielä yleisemmin voidaan helposti osoittaa, että gravitaatiota ei ole lainkaan olemassa.



Kuva 3. Ympyrärengas ja pistemassa.

Todistus tapahtuu kuvan 3 esittämän ohuen homogeenisen ympyrärenkaan (keskipiste origossa, säde $R > 0$ ja massan viivatiehys $\rho > 0$) sekä origossa sijaitsevan pistemassan (massa $m > 0$) muodostaman systeemin avulla.

Pistemassan aiheuttaman gravitaatiokentän voimakkuus on tunnetusti

$$\vec{b}(\vec{r}) = -\gamma \frac{m}{r^2} \vec{r}_0 , \tag{16}$$

missä γ on yleinen gravitaatiovakio, $\vec{r}$ on paikkavektori ja $\vec{r}_0$ on $\vec{r}$:n suuntainen yksikkövektori. Pistemassan johdosta renkaaseen vaikuttava kokonaisgravitaatiovoima on siis tällöin

$$\vec{F} = \int_{\text{rengas}} \vec{b}(\vec{r})\rho ds = -\int_0^{2\pi} \gamma \frac{m}{R^2} \vec{r}_0(\theta)\rho R d\theta$$

$$= -\frac{\gamma m \rho}{R} \int_0^{2\pi} \vec{r}_0(\theta) d\theta = \vec{0} , \tag{17}$$

missä esiintyvät lisämerkinnät lienevät itsestään selviä. Se, että integraali häviää, seuraa suoraan symmetriasyistä (vrt. kuva 3) tai matemaattisemmin esittämällä $\vec{r}_0$-vektori komponenttimuodossa ($\vec{r}_0 = \cos\theta \vec{i} + \sin\theta \vec{j}$) ja suorittamalla sitten integroinnit.

Palautettakoon nyt mieleen integraalilaskennan väliarvolause

$$\int_V f dv = f^* v(V) \qquad (18)$$

eli jatkuvan funktion $f(\vec{r})$ tapauksessa alueessa V on ainakin yksi piste P* siten, että yhtälö (18) pätee. Suure v(V) on alueen V tilavuus ja $f^* = f(\vec{r}^*)$, jossa $\vec{r}^*$ on pisteen P* paikkavektori. Väliarvolause on esitetty tässä jatkoa silmälläpitäen kolmidimensioisessa tapauksessa, mutta se pätee analogisena myös yhdessä dimensiossa ja kun sitä sovelletaan integraaliin (17) saadaan siis tulos

$$\vec{F} = -\frac{\gamma m \rho}{R} \vec{r}_0^* \cdot 2\pi = \vec{0}\ , \qquad (19)$$

jossa $\vec{r}_0^*$ viittaa kehällä olevassa tietyssä pisteessä P* arvolla θ^* laskettuun yksikkövektorin $\vec{r}_0$ arvoon. Oletuksen mukaan m, R ja ρ ovat nollasta eroavia samoin kuin 2π ja koska $\vec{r}_0^*$ on yksikkövektori, sekään ei voi olla nolla. Ainoaksi mahdollisuudeksi jää, että gravitaatiovakio $\gamma = 0$; toisin sanoen gravitaatiota ei ole olemassa.

TODISTELUJEN KORJAUKSET

Jousen tapauksessa kaava (3) antaa oikean potentiaalienergian lausekkeen, josta saadaan yhtälö

$$\frac{dV}{du} = ku - F = 0 \qquad (20)$$

kuten pitääkin. Kaava (4) ei esitä enää systeemin potentiaalienergian yleistä lauseketta, vaan potentiaalienergian arvoa siirtymän avulla lausuttuna tasapainoasemassa.

Eräs toinen joskus esiintyvä virheellinen käsittely syntyy soveltamalla ns. energiaperiaatetta seuraavasti. Vakiovoiman F alkutilan (u = 0) suhteen tekemä työ Fu varastoituu jousen kimmoenergiaksi $1/2 \cdot ku^2$, josta saadaan jälleen väärä tulos $F = 1/2 \cdot ku$. Jos nimittäin jousen päähän vaikuttaa todella vakiovoima heti alkutilassa, systeemi aloittaa kiihtyvän liikkeen ja energiatarkastelua täytyy täydentää liike-energian osuudella. Jos taas energiatarkastelua sovelletaan antamalla systeemin siirtyä ns. kvasistaattisesti (eli siis niin hitaasti, että hitausvoimia ei tarvitse ottaa huomioon) peräkkäisten tasapainoasemien kautta alkutilasta lopputilaan, systeemiin täytyy vaikuttaa vakiovoiman F lisäksi siirtymän mukana lineaarisesti pienenevä lisävoima, joka tekee työn $-1/2 \cdot Fu$ systeemiin, jolloin näiden kahden voiman yhteensä tekemä työ on $1/2 \cdot Fu$ ja saadaan oikea yhtälö $1/2 \cdot Fu = 1/2 \cdot ku^2$.

Maan painovoimaprobleeman käsittelyssä tehtiin virhe kaavojen (8) ja (10) välisen askeleen kohdalla. Kenttävoiman intensiteetti $\vec{b}$ on periaatteessa paitsi paikan ja ajan funktio eli $\vec{b} = \vec{b}(\vec{r},t)$ myös funktio tarkasteltavasta kappaleesta eli sen täyttämästä avaruuden osasta V, koska $\vec{b}$ kaavassa (8) syntyy kappaleen ulkopuolisen massan johdosta. Osoitetaan tämä käyttämällä tunnusta $\vec{b}_V(\vec{r},t)$ – tai jos pidetään aluetta V kiinteänä ja määritellään $\vec{b}$ alueen V osa-alueessa ΔV – tunnusta $\vec{b}_{\Delta V}(\vec{r},t)$. Siirtyminen kaavasta (13) kaavaan (14) esitetään lähteessä /2/ massan säilymisen aksiooman yhteydessä johtamalla yhtälöstä

$$\int_V [\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v})]dv = 0 \tag{21}$$

lokaalinen yhtälö (ns. jatkuvuusyhtälö)

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v}) = 0 \ . \tag{22}$$

Yhtälössä (21) ei kuitenkaan esiinny alueen valinnan mukana muuttuvaa termiä, joten tulos (22) on täysin oikea.

Kaavan (13) sijasta on syytä lähteä liikkeelle kaavasta

$$\int_{\Delta V} \vec{f}_{\Delta V} dv = \vec{0} \ . \tag{23}$$

Jokaista alueen V osa-aluetta ΔV kohti on siis annettu ΔV:ssä määritelty vektoriarvoinen funktio $\vec{f}_{\Delta V}$ siten, että yhtälö (23) pätee. Johdetaan nyt tätä yhtälöä vastaava lokaalinen tulos $\vec{f} = \vec{0}$, jossa funktio $\vec{f}$ ei ole vielä täsmällisesti määritelty. Määritellään se seuraavasti:

$$\vec{f}(\vec{r},t) = \lim_{\Delta V \to P} \vec{f}_{\Delta V}(\vec{r},t) \ , \tag{24}$$

missä oikea puoli tarkoittaa raja-arvoa, jota $\vec{f}_{\Delta V}(\vec{r},t)$ lähenee ΔV:n kutistuessa kohti pistettä P ($\vec{r}$ on P:n paikkavektori). Oletetaan, että kaikille V:n pisteille P kaavan (24) mukainen raja-arvo on olemassa ja riippumaton tavasta, jolla ΔV kutistuu pistettä P kohti. Tällöin $\vec{f}$ on hyvin määritelty V:ssä. Tiedetään, että gravitaatiovoimakentän tapauksessa näin todellakin on asian laita (ks. /3, s. 94/).

Väitetään, että $\vec{f} = \vec{0}$ V:ssä. Kirjoitetaan funktiot $\vec{f}_{\Delta V}$ ja $\vec{f}$ komponenttimuotoon:

$$\vec{f}_{\Delta V}(\vec{r},t) = f_{\Delta V,1}(\vec{r},t)\vec{i} + f_{\Delta V,2}(\vec{r},t)\vec{j} + f_{\Delta V,3}(\vec{r},t)\vec{k} \ , \tag{25}$$

$$\vec{f}(\vec{r},t) = f_1(\vec{r},t)\vec{i} + f_2(\vec{r},t)\vec{j} + f_3(\vec{r},t)\vec{k} \ . \tag{26}$$

Määritelmän (24) mukaan on selvää, että

$$f_i(\vec{r},t) = \lim_{\Delta V \to P} f_{\Delta V,i}(\vec{r},t) \ , \qquad i = 1,2,3 \tag{27}$$

ja kaava (23) on yhtäpitävä kaavojen

$$\int_{\Delta V} f_{\Delta V,i} dv = 0 , \quad i = 1,2,3 \tag{28}$$

kanssa. Oletetaan, että kaikki funktiot $f_{\Delta V,i}$ ovat jatkuvia ja sovelletaan väliarvolausetta (kaava (18)). Lauseen mukaan ΔV:ssä on pisteet P_1^*, P_2^*, P_3^* siten, että

$$\int_{\Delta V} f_{\Delta V,i} dv = f_{\Delta V,i}(\vec{r}_i^*,t)v(\Delta V) , \quad i = 1,2,3 . \tag{29}$$

Yhtälöt (28) ja (29) antavat yhdessä

$$f_{\Delta V,i}(r_i,t) = 0 , \quad i = 1,2,3 . \tag{30}$$

Kun ΔV kutistuu kohti pistettä P, niin pisteet P_1^*, P_2^*, P_3^* lähestyvät P:tä ja voidaan (tietyn jatkuvuusolettamuksen vallitessa) helposti osoittaa, että

$$f_{\Delta V,i}(\vec{r}_i^*,t) \to f_i(\vec{r},t) , \tag{31}$$

josta heti seuraa lokaalinen yhtälö

$$f_i(\vec{r},t) = 0 , \quad i = 1,2,3 \tag{32}$$

eli

$$\vec{f} = \vec{0} \quad \text{alueessa } V . \tag{33}$$

Edellä mainitun jatkuvuusolettamuksen tarkka formulointi sekä väitteen (31) täsmällinen todistus sivuutetaan siitä syystä, että määrittelemällä funktio $\vec{f}$ hieman toisella tavalla tulos (33) voidaan johtaa yksinkertaisemmin väliarvolausetta käyttämättä (ks. /1/).

Edellisen perusteella suure $\vec{b}$ Cauchyn liikeyhtälössä (10) tarkoittaa periaatteessa kaikesta avaruuden massasta ko. pisteeseen kehittyvää kenttävoiman intensiteettiä. Tavallisemmassa liikeyhtälöiden johtamistavassa – jossa tarkasteltavaksi kappaleeksi otetaan heti differentiaalinen tilavuusalkio dv – ei ole varaa termin $\vec{b}$ merkityksen väärästä tulkinnasta.

Gravitaation häviämisen todistelussa sovellettiin väärin väliarvolausetta, koska se ei päde yleensä vektoriarvoisille funktioille. Itse asiassa kaava (17), oikein tulkittuna, on hyvä vastaesimerkki. Koska gravitaatiovakio tiedetään nollasta eroavaksi, yhtälö (17) on yhtäpitävä kaavan

$$\int_0^{2\pi} \vec{r}_o(\theta)d\theta = \vec{0} \tag{34}$$

kanssa. Yllä olevassa integraalissa integroitava on jatkuva funktio, jonka itseisarvo on = 1 kaikilla argumentin θ arvoilla, mutta kuitenkin integraali häviää. Tilanne poikkeaa olennaisesti reaalifunktioiden tapauksesta; erityisesti väliarvolause ei ole voimassa.

Tämä selittää myös sen, miksi Cauchyn liikeyhtälöiden johdossa ei voitu soveltaa väliarvolausetta suoraan funktioihin $\vec{f}_{\Delta V}$, vaan oli pakko siirtyä ensin komponenttiesitykseen. Todettakoon tähän liittyen vielä, että lähteessä /2, s. 76/ on juuri sovellettu väliarvolausetta väärin vektoriarvoiseen funktioon johdettaessa tunnettua kaavaa $\vec{t}^{(n)} = \vec{t}^{(1)}n_1 + \vec{t}^{(2)}n_2 + \vec{t}^{(3)}n_3$.

KIITOKSET

Haluamme kiittää tekn.lis. Markku Tuomalaa artikkelin syntyyn johtaneista keskusteluista sekä artikkelia koskevista huomautuksista.

KIRJALLISUUTTA

[1] Gyllenberg, M., On internal body forces and the derivation of Cauchy's equation of motion, in preparation.

[2] Malvern, L.E., Introduction to the mechanics of a continuous medium, Prentice-Hall, 1969.

[3] Väisälä, K., Vektorianalyysi, Werner Söderström, 1954.

Mats Gyllenberg, dipl.ins., Eero-Matti Salonen, apul.prof.,

Teknillinen korkeakoulu, Yleinen osasto, Mekaniikan laitos