

JÄYKKYYSDERIVAATTAMENETelmäSTÄ HALKEAMAMEKANIIKASSA

Seppo Drivuori

Rakenteiden Mekaniikka Vol 14
No. 3 1981 s. 13...25

YHTEENVETO: Artikkelissa esitetään jäykkyysderivaattamenetelmä kiinnittäen erityistä huomiota lämpökuormiin. Menetelmä tarjoaa mahdollisuuden käyttää tavanomaisen elementtilaskennan tuloksia saamaan arvio rakenteessa olevan särön vakavuudesta. Esitettyä teoriaa sovelletaan kolmeen esimerkkiin vertaillen tuloksia muilla keinoilla saatuihin. Esimerkit ovat: lämpögradientin kuormittama tasomuodonmuutostilainen levy, mekaanisen ja lämpökuorman kuormittama pyörähdyssymmetrinen kappale sekä mekaanisen kuormituksen kuormittama särötestikappale kolmedimensioisella laskentamallilla käsiteltynä.

JOHDANTO

Voimalaitosten komponenttien käyttöturvallisuuden varmistamiseksi on pysyttävä arvioimaan rakenteessa jo olevan tai kuvitellun särön vaikutus komponentin toimintaan. Vapautuvan energian määrä särön kasvanutta pinta-alaa kohden G on tällainen suure, jonka lukuarvoa hyväksi käyttäen voidaan tehdä päätelmiä särön stabiiliudesta. Lineaarisisessa halkeamamekaniikassa G :llä on yhteys jännitysintensiteettikertoimeen K_I , joka on materiaaliveikko. Rajoittamalla lineaarisesti kimmoisiin tapauksiin voidaan K_I määrittää mm. J.R. Ricen esittämää viivaintegraalia J käyttäen /1/ tai energianvapautumismenetelmiä soveltamalla. Varsinkin jälkimmäiset menetelmät ovat käytännön tehtävissä taloudellisia ja helppokäyttöisiä. Näistä menetelmistä mainittakoon "särön kuviteltu kasvattamis"-menetelmä (Virtual Crack Extension Method) /2/, /3/ sekä Parks'n esittämä jäykkyysderivaattamenetelmä (Stiffness Derivative Method) /4/. Viimeistä menetelmää käytettäessä suoritetaan särön perustilannetta vastaavan elementtimallin tavanomainen laskenta. Tämän jälkeen jälkikäsitteilyohjelmalla voidaan helposti aiheuttaa perusmallin särön pituuteen muutoksia ja perustilanteen laskentatuloksia käyttäen laskea alkuperäisen mallin sekä tämän muutetun mallin energiasisältöjen erotus $-\Delta\pi$. Imatran Voima Oy:n elementtiohjelman IVOFEM /5/, /6/ yhteyteen on tehty jälkikäsitteilyohjelma IVOCRACK, joka laskee edellä mainittuja energiaerotuksia. Toistaiseksi on rajoitettu pääasiassa matemaattisesti 2-dimensioisiin laskentoihin. Alustavia kokeiluja on suoritettu myös kolmedimensioisella mekaanisesti kuormitetuilla malleilla.

JÄYKKYYSDERIVAATTAMENETELMÄN (JDM) TEORIA

Elementtimallin kokonaispotentiaalienergia on tunnetusti

$$\pi = \frac{1}{2} \{d\}^T [K] \{d\} - \{d\}^T \{F\} + \pi_T, \quad (1)$$

missä $\{d\}$ on solmuvapausastevektori, $[K]$ on rakenteen jäykkyysmatriisi, $\{F\}$ on mekaanisia ja lämpökuormia vastaava solmuvoimavektori ja π_T on ns. lämpöpotentiaalienergia (engl. käytetään termiä thermal energy). Lämpöpotentiaalienergian lauseke on

$$\pi_T = \frac{1}{2} \int_V \{e\}_T^T [D] \{e\}_T dv, \quad (2)$$

missä $\{e\}_T$ on lämpövenymävektori ja $[D]$ on kimmomatriisi. Tämä termi jätetään yleensä pois energialausekkeesta (1), koska se on vakio solmuisiirteiden suhteen. Tässä yhteydessä termi on kuitenkin merkityksellinen, koska särön kärkeä ympäröivien elementtien solmujen paikat muuttuvat eli elementeille tulee uudet lämpötilat.

Muodostamalla kokonaispotentiaalienergian (1) variaatio $\delta\pi$ saadaan

$$\begin{aligned} \delta\pi = & \frac{1}{2} \delta\{d\}^T [K] \{d\} + \frac{1}{2} \{d\}^T \delta[K] \{d\} + \frac{1}{2} \{d\}^T [K] \delta\{d\} - \delta\{d\}^T \{F\} - \\ & - \{d\}^T \delta\{F\} + \delta\pi_T. \end{aligned} \quad (3)$$

Jäykkyysmatriisin symmetrisyyden vuoksi ovat lausekkeen (3) ensimmäinen ja kolmas termi yhtäsuuria. Yhdistämällä nämä neljänteen termiin tulee

$$\delta\pi = \delta\{d\}^T ([K] \{d\} - \{F\}) + \frac{1}{2} \{d\}^T \delta[K] \{d\} - \{d\}^T \delta\{F\} + \delta\pi_T. \quad (4)$$

Elementtimallin tasapainoyhtälöiden johdosta jää lausekkeesta (4) jäljelle

$$\delta\pi = \frac{1}{2} \{d\}^T \delta[K] \{d\} - \{d\}^T \delta\{F\} + \delta\pi_T. \quad (5)$$

Kaava (5) muodostaa teoreettisen pohjan JDM:lle.

JDM:N KÄYTÄNNÖN TOTEUTTAMISESTA

Seuraavassa kuvauksessa ajatellaan lähinnä matemaattisesti kaksidimensioidista mallia. Yleistys kolmeen dimensioon on helppo.

Laaditaan laskentamalli, jossa särön kärkeä ympäröi 8-solmuiset elementit. Näiden elementtien särön kärkipistettä vastaava sivu kutistetaan pisteeksi ja särön kärjestä lähtevien sivujen välipisteet sijoitetaan $\frac{1}{4}$ -pisteeseen

särön kärjen puolelle /7/ (ks. myös kuva 5). Suoritetaan tavanomainen elementtilaskenta säästään ajosta seuraavat tiedot:

- mallin geometriatiedot (solmujen koordinaatit sekä elementtien solmunumerot),
- elementtien jäykkyyismatriisit $[k_1]^e$,
- elementtien kuormitusvektorit $\{f_1\}^e$,
- siirtymätila $\{d\}$,
- kuormitustiedot (mm. elementtien solmupistelämpötilat)
- elementtien lämpöpotentiaalienergiat π_{T1}^e .

Lämpöpotentiaalienergiatermin laskeminen elementteittäin oli ainoa muutos, joka täytyi tehdä IVOFEM-ohjelmaan. Tasomuodonmuutostilassa on elementin lämpöpotentiaalienergia

$$\pi_T^e = \int_{V^e} \frac{E(1+\nu)\alpha^2 \Delta T^2}{1-2\nu} dv. \quad (6)$$

Tämän tavanomaisen elementtilaskennan jälkeen käynnistetään jälkikäsitteily-ohjelma IVOCRACK. Tälle ohjelmalle annetaan lähtöarvoina haluttu määrä erilaisia säröä kasvattavia alkuperäisen mallin solmujen koordinaattien muutostietoja. Tavallisesti menetellään siten, että särön kärkeä ajatellaan siirretyn 10^{-4} - 10^{-6} särön kärkielementin sivun pituudesta. Säröä ympäröivien elementtien välipisteitä kuvitellaan siirretyn siten, että ne ovat myös muuttuneessa geometriassa vastaavassa asemassa kuin alkuperäisessä mallissa (siis joko $\frac{1}{4}$ -pisteessä tai sivun puolivälissä). Usein siirretään joitakin säröä ympäröiviä elementtikehiä yhdensuuntaissiirroksella 10^{-4} - 10^{-6} kärkielementin sivun pituudesta ja seuraavan elementtikehän välipisteitä puolet tästä määrästä. Tulos on muokatusta alueesta riippumaton, analogia J-integraalin tiestä riippumattomuudelle. IVOCRACK muodostaa uudet jäykkyyismatriisit $[k_2]^e$, uudet kuormitusvektorit $\{f_2\}^e$ ja uudet lämpöpotentiaalienergiatermit π_{T2}^e geometrialtaan muuttuneille ja vain näille elementeille. Kaavan (5) oikean puolen variaatiot saadaan nyt erotuksina

$$\delta[K] = [K_2] - [K_1], \quad (7)$$

$$\delta\{F\} = \{F_2\} - \{F_1\}$$

ja

$$\delta\pi_T = \pi_{T2} - \pi_{T1}.$$

Tämän jälkeen vapautuva energia $-\delta\pi$ on välittömästi laskettavissa.

LÄMPÖKUORMITUKSEN AIHEUTTAMIA LISÄPIIRTEITÄ

Lämpötilan muutosten aiheuttamien kuormitusten mukaanotto pakottaa seuraavien asioiden huomioon ottamiseen:

- lämpöenergiatermi on sisällytettävä energialausekkeeseen
- jälkikäsitteilyajossa on geometrialtaan muuttuneiden elementtien uusia solmupisteasemia vastaavat uudet solmulämpötilat laskettava alkuperäisestä lämpökentästä.

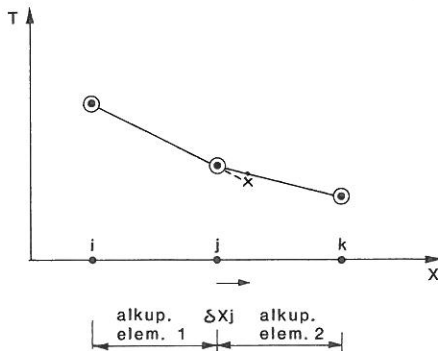
Likiratkaisu jälkimmäiselle esitetään seuraavassa kaksidimensioisiin tehtäviin viitaten. Yleistys kolmeen dimensioon on ilmeinen. Lämpötilan muutos δT on

$$\delta T = \frac{\partial T}{\partial x} \delta x + \frac{\partial T}{\partial y} \delta y, \quad (8)$$

missä δx ja δy tarkastelupisteen koordinaattien muutokset. Lämpötilakentän globaalit derivaatat $\frac{\partial T}{\partial x}$ ja $\frac{\partial T}{\partial y}$ voidaan määrittää kahden toisistaan poikkeavan suunnan \vec{n}_1 ja \vec{n}_2 derivaattojen $\frac{\partial T}{\partial n_1}$ ja $\frac{\partial T}{\partial n_2}$ avulla yhtälöryhmästä

$$\begin{bmatrix} \cos(\vec{n}_1 x) & \cos(\vec{n}_1 y) \\ \cos(\vec{n}_2 x) & \cos(\vec{n}_2 y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial T}{\partial n_1} \\ \frac{\partial T}{\partial n_2} \end{bmatrix}, \quad (9)$$

missä kosinitermi ovat \vec{n}_1 -suuntien suuntakosineja. Soveltamalla kaavaa (9) vuoron perään geometrialtaan muuttuneiden elementtien solmupisteisiin. Yhtälöryhmän vasemman puolen termit lasketaan likimäärin tarkasteltavasta solmusta lähtevien kahden sivun päätesolmujen lämpötilaerotuksen ja kyseisen sivun pituuden osamääränä. Tämä likimääräistys on yhteensopiva IVOFEM-ohjelman käyttämän 4-solmuisen kenttäproblemaelementin teorian kanssa. Oheinen kuva yksidimensioisen lämpötilajakauman paloittain lineaarisesta approksimaatiosta valottaa elementteittäin tapahtuvan solmujen uusien lämpötilojen laskemisessa syntyvää virhettä.



Kuva 1. Kuvitellaan solmua j siirretyn δx_j :n verran. Soveltamalla elementteittäin kaavaa (9) saadaan geometrialtaan muuttuneiden elementtien 1 ja 2 solmulle j eri lämpötila-arvot.

- alkuperäisen mallin solmulämpötilat
- j -solmun uusi lämpötila elementistä 1 laskettuna
- j -solmun uusi lämpötila elementistä 2 laskettuna

JÄNNITYSINTENSITEETTIKERTOIMEN K_I LASKEMISESTA

Tasomuodonmuutostilassa vallitsee yhteys

$$\frac{(1 - \nu^2)}{E} K_I^2 = - \frac{\delta \pi}{\delta A}, \quad (10)$$

missä δA on särön kasvanut pinta-ala. Levyllä tämä saadaan kertomalla särön kärjen siirtymä levyn paksuudella. Pyörähdyssymmetrisellä kappaleella korvataan levyn paksuus termillä $2\pi r_{\text{särö}}$.

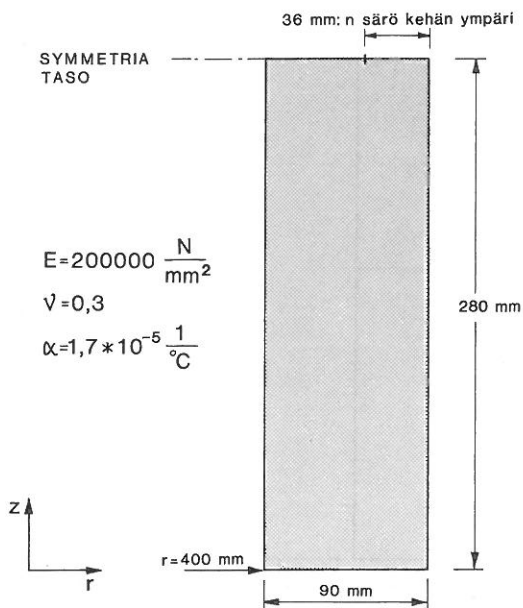
Tasojännitystilassa on vastaava yhteys

$$\frac{1}{E} K_I^2 = - \frac{\delta \pi}{\delta A}, \quad (11)$$

Lähteessä /9/ on esitetty laajemmin jännitysintensiteettikertoimeen liittyviä seikkoja.

SOVELLUTUSESIMERKKI 1

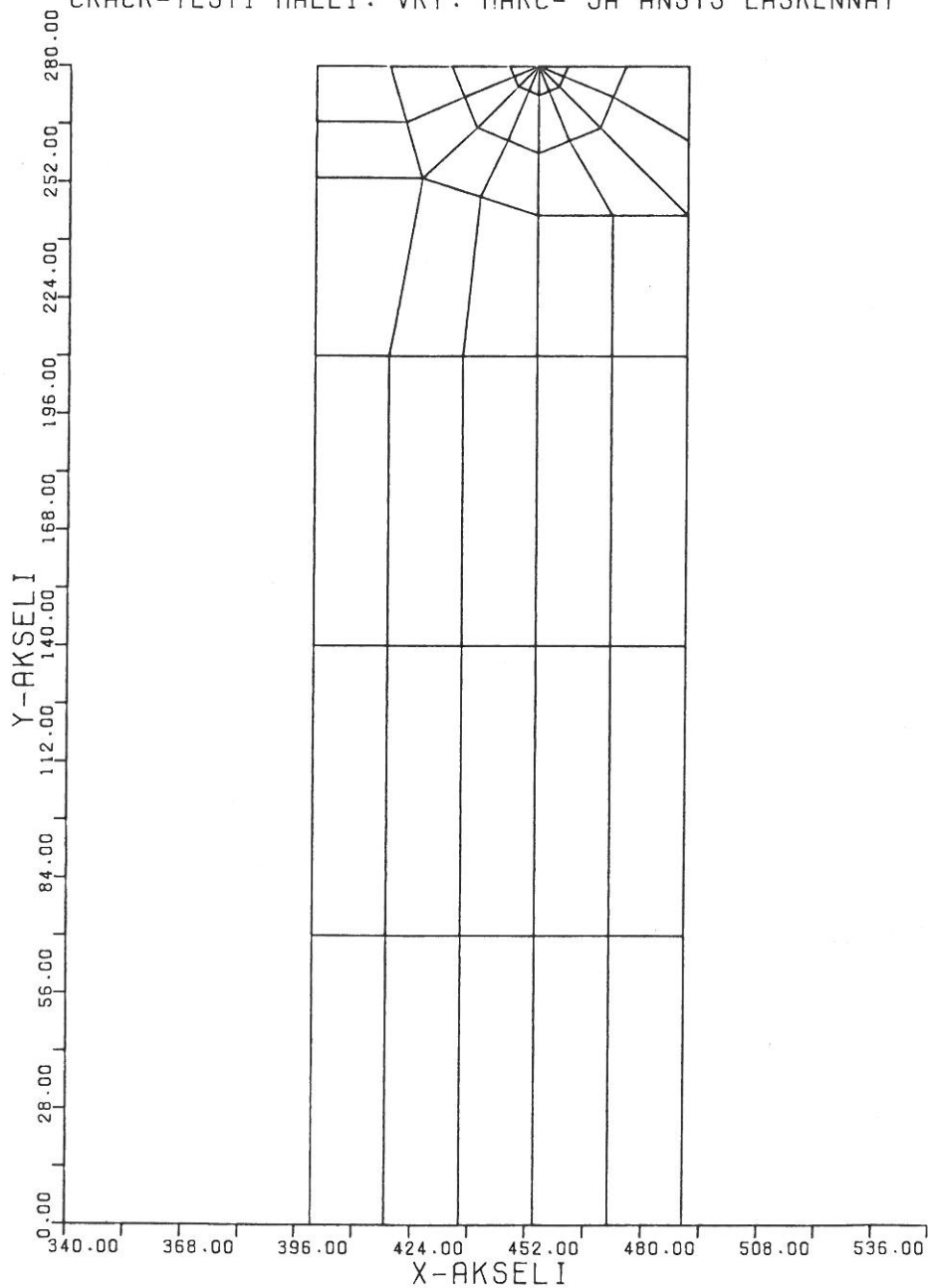
Ensimmäisenä esimerkkinä tarkastellaan kuvan 2 mukaista pyörähdyssymmetristä kappaletta, jossa on ympäri kehän ulottuva 36 mm syvyinen särö. Kuor-



mituksena on $p = 100 \text{ N/mm}^2$ akselin suuntainen vetojännitys sekä $T = 500 \text{ }^\circ\text{C}$ lämpötilan nousu. Ensin suoritettiin normaali elementtilaskenta IVOFEM-ohjelmalla sekä kaupallisilla ANSYS- ja MARC-CDC-ohjelmilla. Laskentamallin piirturikuvat on esitetty kuvina 3-5. Taulukoissa I ja II verrataan saatuja jännitys- ja siirtymätuloksia.

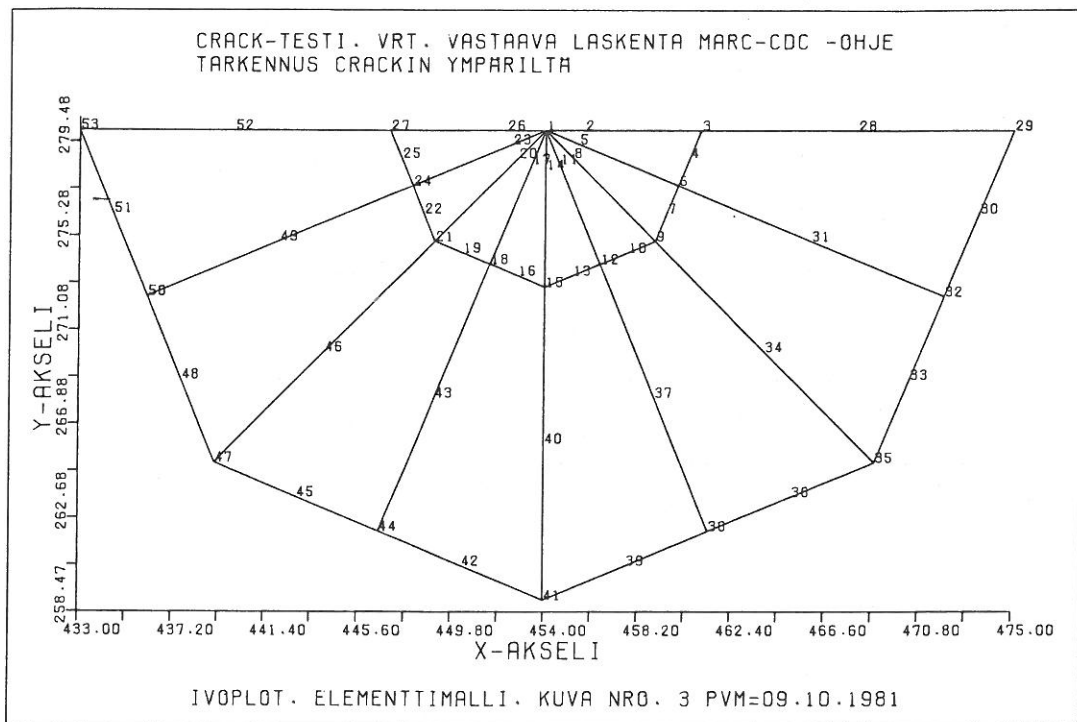
Kuva 2. Kehän ympäri ulottuvan särön omaavan pyörähdyskappalemallin skemaattinen kuva mittoineen.

CRACK-TESTI. VRT. VASTAAVA LASKENTA MARC-CDC -OHJE
CRACK-TESTI MALLI. VRT. MARC- JA ANSYS LASKENNAT

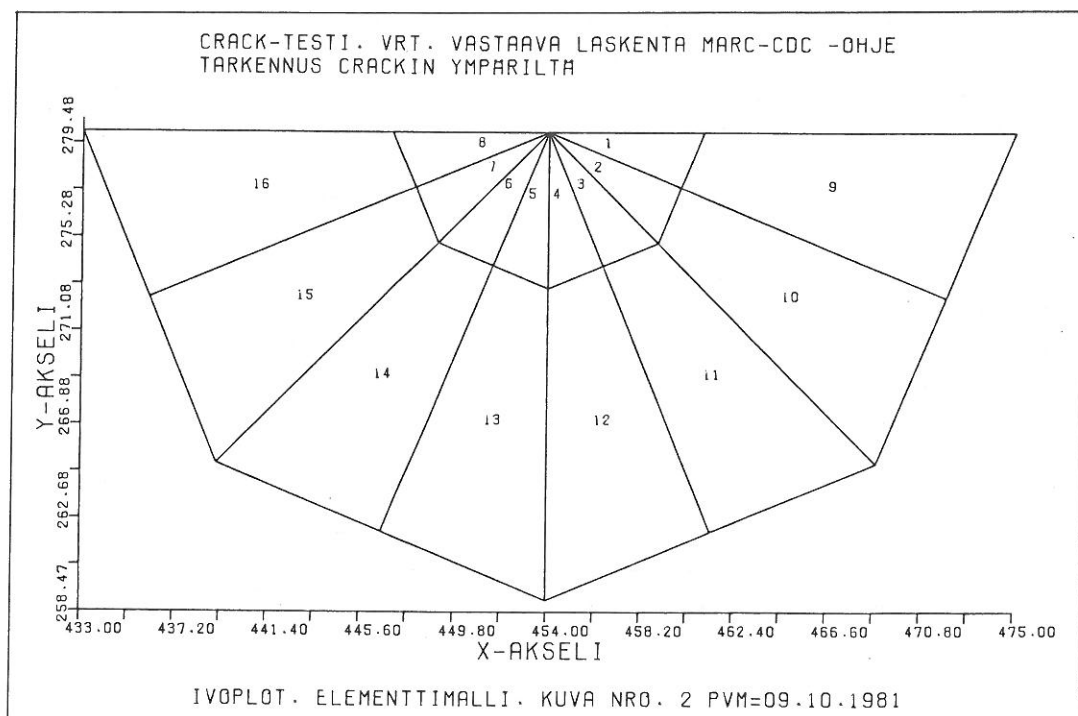


IWOPLLOT. ELEMENTTIMALLI. KUVA NRO. 1 PVM=09.10.1981

Kuva 3. Kuvan 2 kappaleen elementtimallin piirturikuva.



Kuva 4. Särön kärkeä ympäröivän kahden elementtikehän käsittävä piirturi-kuva elementtinumeroineen.



Kuva 5. Kuten kuva 4, mutta solmunumeroin varustettuna.

Taulukko I. Elementin 5 integrointipisteen 1 jännitystuloksia

ohjelma	σ_{rad}	σ_{aks}	σ_{keha}	τ	σ_{max}	σ_{min}
ANSYS	754.25	3042.9	1143.3	-323.08	3087.6	709.51
IVOFEM	754.248	3042.85	1143.32	-323.078	3087.59	709.514
MARC	754.2	3043.	1143.	-323.1	3088.	709.5

Taulukko II. Solmujen 1 ja 155 siirtymätuloksia

ohjelma	solmu 1 rad. siirt.	solmu 155 rad. siirt.	solmu 155 aks. siirt.
ANSYS	3.87001	3.29427	-2.52867
IVOFEM	3.87001	3.29427	-2.52867
MARC	3.8700	3.2943	-2.5287

Taulukoiden luvut on esitetty kyseisen ohjelman tulostamalla tarkkuudella. Solmu 155 sijaitsee mallin alareunan sisäpinnalla.

IVOCRACK-ohjelmaa käyttäen kuvitellaan säröä kasvatetun seuraavalla tavalla:

- Särön kärkipistettä (solmu 1) siirretään säteen suunnassa sisäänpäin δr :n verran sekä seuraavaa $\frac{1}{4}$ -välisölmukehää $\frac{3}{4}$ δr :n verran. Tällöin elementtien 1-8 geometria muokkautuu.
- Särön kärkipistettä ympäröivän elementtikehän (elementtinumerot 1-8) kaikkia solmuja siirretään säteen suunnassa sisäänpäin δr :n verran sekä seuraavan elementtikehän välipisteitä $\frac{1}{2}$ δr :n verran. Näin muokataan elementtien 1-16 geometriaa.

Taulukoissa III ja IV on esitetty IVOCRACK-tuloksia eri δr :n arvoilla laskettuna verrattuna MARC-ohjelmalla saatuun tulokseen. Lämpökuormituksen tapauksessa ei yhden sanan laskentatarkkuus (n. 8 merkitsevää numeroa) riittänyt, joten laskentatyö suoritettiin kahden sanan tarkkuutta käyttäen (n. 18 merkitsevää numeroa).

Taulukko III. Vapautuneen energian arvo ja vapautuneen energian arvo pinta-yksikköä kohden eri δr :n arvoilla tapaa A soveltaen

ohjelma	IVOCRACK					MARC
	δr (mm)	0.06	0.006	0.0006	0.00006	
$-\delta\pi$ (Nmm)	1009.0	112.93	11.414	1.1426	0.11427	1129.
$-\frac{\delta\pi}{\delta A}$ ($\frac{N}{mm}$)	5.90	6.60	6.67	6.68	6.68	6.60

ANSYS-ohjelmalla ei ollut mahdollisuutta energian laskemiseen lämpökuormien vaikuttaessa. Särön kärjen säde $r_{\text{särö}} = 454$ mm. Tuloksista havaitaan, että $\delta r = 0.06$ mm (= 0.01 särön kärkielementin sivun pituudesta) on ollut liian suuri. Erotusosamäärän arvo ei ole muuttunut siirtymän ollessa alueella $10^{-4} - 10^{-6}$ kärkielementin sivun pituudesta. 18 merkitsevän numeron laskentatarkkuuden johdosta on suositeltavaa käyttää niin pientä lisäsiirtymää, että erotusosamäärän laskemisessa ei tehdä tuntuva virhettä. Toisaalta on huolehdittava siitä, että sen jälkeen kun lisäsiirtymä on lisätty ko. solmun koordinaatteihin jää jäljelle vielä muutaman merkitsevän numeron laskentapelivara. MARC-ohjelman kanssa on saavutettu sopusointu. MARC-ohjelman laskenta suoritettiin eri tietokoneella kuin IVOCRACK-ajo.

Taulukko IV. Kuten taulukko III, mutta tapaa B soveltaen

δr (mm)	0.06	0.006	0.0006
$-\delta\pi$ (Nmm)	908.12	111.26	11.330
$-\frac{\delta\pi}{\delta A}$ ($\frac{N}{mm}$)	5.31	6.50	6.62

Taulukon IV tulos tukee "tiestä" riippumattomuuden väitettä.

SOVELLUTUSESIMERKKI 2

Toisena esimerkkinä tarkastellaan lähteissä /8/ ja /3/ ratkaistua lämpögradientin kuormittamaa tasomuodonmuutostilaista levyä, ks. kuva 6. Mallin piirturikuva esitetty kuvana 7. Taulukossa V on esitetty IVOCRACK-ohjelmalla saatuja tuloksia erilaisilla mallinmuokkaustavoilla.

Taulukko V. IVOCRACK-tuloksia. Puolet mallista

	Tapa A	Tapa B	Tapa C	Tapa D
$-\delta\pi$ (Nmm)	$0.10084 \cdot 10^{-3}$	$0.10090 \cdot 10^{-3}$	$0.10077 \cdot 10^{-3}$	$0.10105 \cdot 10^{-3}$
$-\frac{\delta\pi}{\delta A}$ ($\frac{N}{mm}$)	4.03	4.04	4.03	4.04

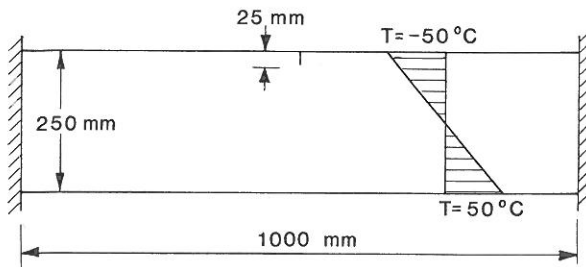
Eri tavoilla muokattiin mallia seuraavasti:

Tapa A: elementit 4 ja 5,

Tapa B: elementit 3-6 ja 9-12,

Tapa C: elementit 2-6, 8-12 ja 14-18,

Tapa D: elementit 1-24.



Paksuus=25 mm , $E=200000 \text{ N/mm}^2$, $\nu = 0,3$

$\alpha = 1,0 \cdot 10^{-5} \text{ 1/}^\circ\text{C}$

Kuva 6. Lämpögradientin kuormittama tasomuodonmuutostilainen levy.

Kaikissa tapauksissa oli särön kärjen siirtymä $\delta y = 10^{-6} \text{ mm}$ y-akselin negatiiviseen suuntaan, joten $\delta A = 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ mm}^2$. Taulukossa laskettu $\frac{\delta \pi}{\delta A}$ -arvo vastaa puolta koko rakenteen vastaavasta arvosta. K-arvo on täten

$$K = \sqrt{\frac{200000}{1-0,3^2}} \cdot 2 \cdot 4,08 \frac{\text{N}}{\text{mm}^{3/2}} = 1339 \frac{\text{N}}{\text{mm}^{3/2}}$$

Vertaillaan saatu K-arvoa lähteissä /3/ ja /8/ esitettyihin tuloksiin.

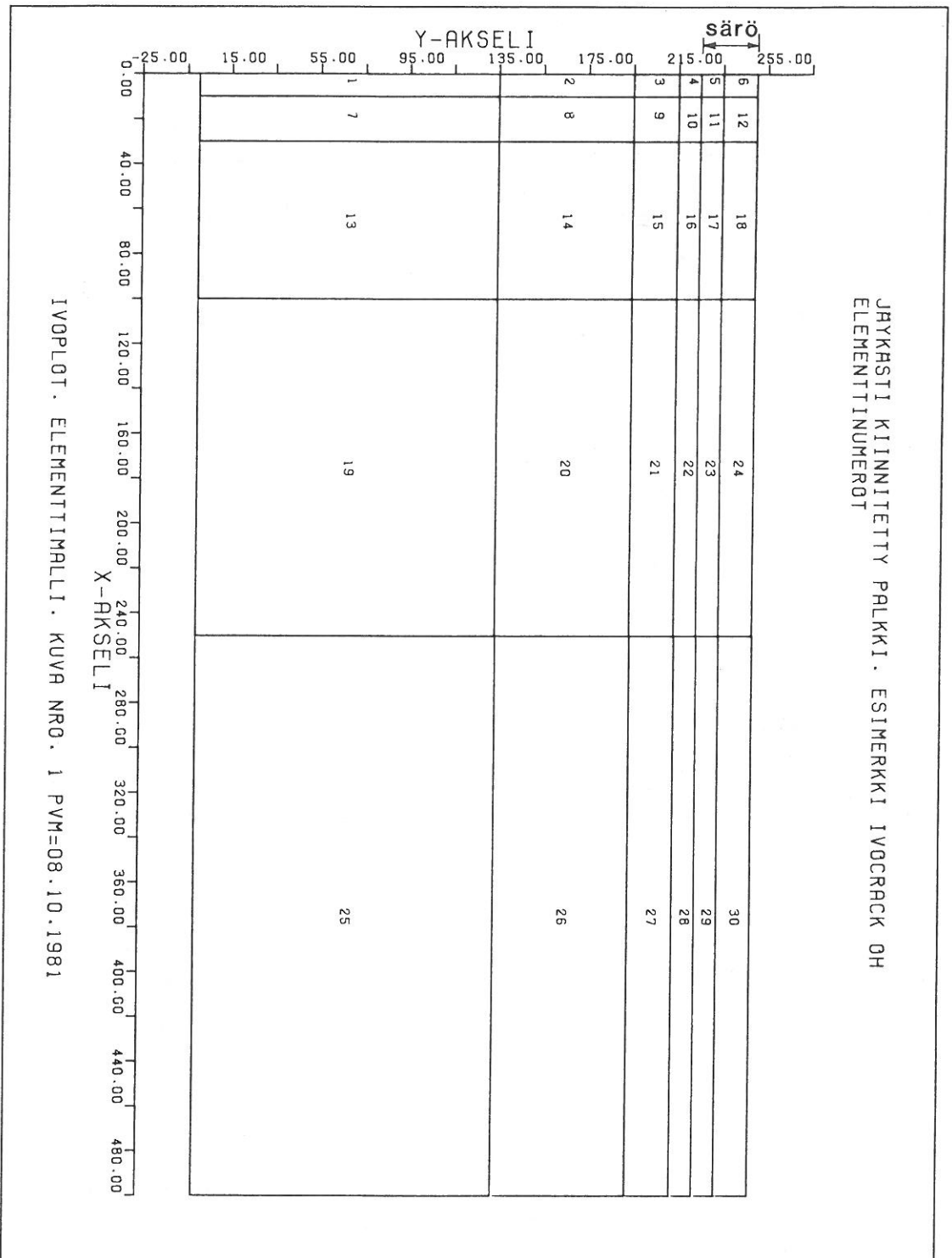
lähde	menetelmä	$K_I \left(\frac{\text{N}}{\text{mm}^{3/2}} \right)$
artikkeli	JDM	1339.
/3/	Kahden mallin energiaerotus	1307.
/8/	J-integraali	1267.

SOVELLUTUSESIMERKKI 3

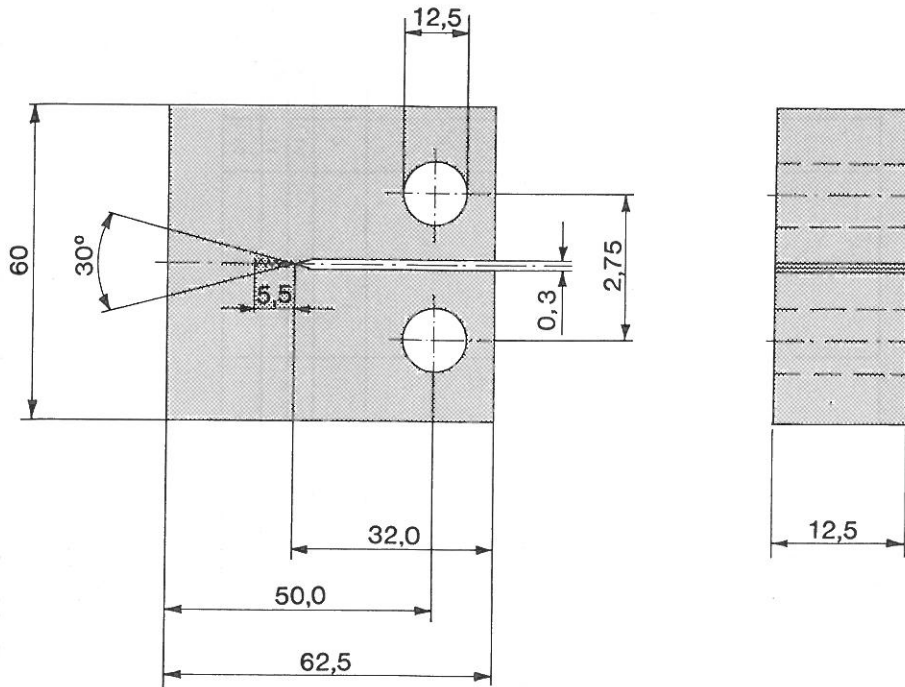
Esitetään lopuksi kolmedimensioista kappaletta käsittelevä esimerkki. Tätä halkeaman mallikoekappaletta on tutkittu raportissa /10/. Kappaleen mitat selviävät kuvasta 8. Mallia esittävä kuva 9 on otettu suoraan raportista. Malli koostuu 114 20-solmuoisesta isoparametrisestä elementistä, vapausasteita on 1788 ja yhtälöryhmän puolinauhan leveys on 387 vapausastetta. Symmetriasuunnasta on mallina $\frac{1}{4}$ koko kappaleesta. Elementtilaskennan jälkeen IVOCRACK-ohjelman kolmedimensioisella versiolla kuviteltiin säröä kasvatetun joka kohdasta samalla määrällä $\delta x = 10^{-5} \text{ mm}$. Tuloksena saatiin $-\delta \pi = 0,34386 \cdot 10^{-5} \text{ Nmm}$, josta vapautuva energia pintayksikköä kohden

$$G = - \frac{\delta \pi}{\delta A} = 4 \frac{0,34386 \cdot 10^{-5}}{12,5 \cdot 10^{-5}} \frac{\text{N}}{\text{mm}} = 0,11 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$$

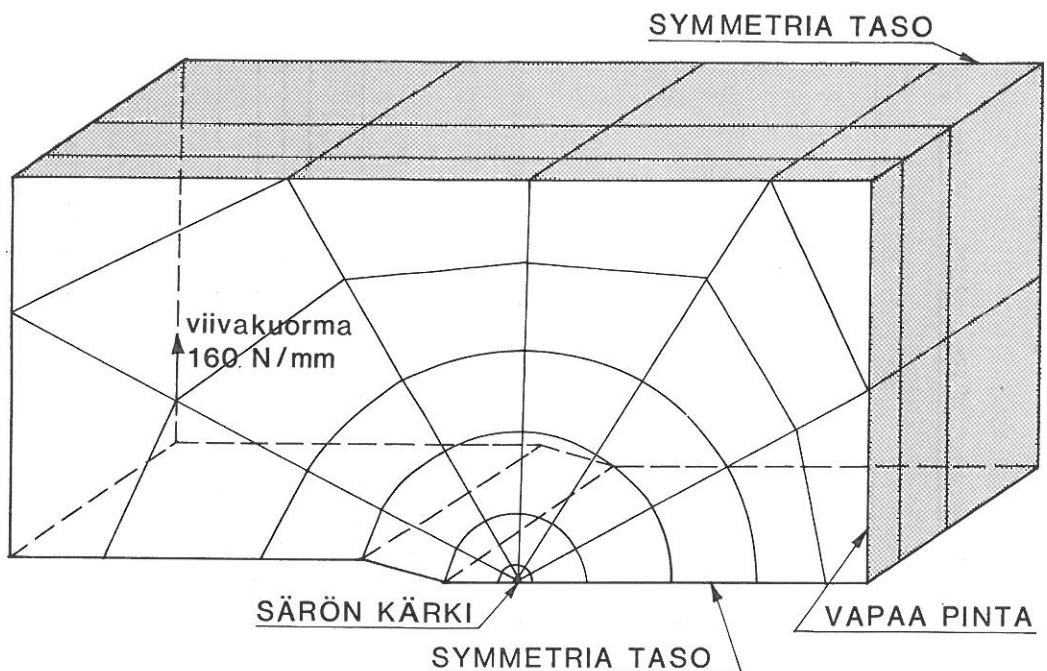
energiaa vapautuvan sama määrä joka kohdassa säröä. Tämä pitää hyvin paik-



Kuva 7. Kuvan 6 rakenteen laskentamallin piirturikuva. Symmetrisyistä mallin muodostaa rakenteen puolikas.



Kuva 8. Särön käyttäytymiseen käytetyn mallikoekappaleen kuva mittoineen.



Kuva 9. Kuvan 8 kolmedimensioinen laskentamalli, jota kuormitetaan piste-kuormalla.

kansa aivan pinta-aluetta lukuunottamatta. Lähteestä /10/ on saatavissa täsmälleen sama lukuarvo $-\frac{\delta\pi}{\delta A}$:lle. IVOCRACK- ja IVOFEM-ajojen kuluttamien keskusyksikköaikojen suhde oli 0.016. Siis jälkikäsitteily oli vajaat 2 % elementtiajosta.

LOPPUPÄÄTELMÄT

Artikkelissa esitetty jäykkyysderivaattamenetelmä on kirjoittajan näkemys englanninkielisessä kirjallisuudessa esiintyvistä SDM:stä (stiffness derivative method). T.K. Hellen /3/ lienee ensimmäisenä ottanut mukaan lämpöpotentiaalienergiatermin. Elementtien uutta asemaa vastaavien solmujen uusien lämpötilojen laskemista ei liene missään kirjallisuudessa aiemmin esitetty.

Esitelty menetelmä on osoittautunut käytännön laskelmissa taloudelliseksi, erittäin käyttäjäystävälliseksi. Menetelmän soveltaminen kolmedimensioisiin tehtäviin mekaanisten kuormien yhteydessä ei tuo uusia ongelmia. Ainoastaan lämpökentän käsittely tulee käsitellä erikseen kaavojen (8) ja (9) kolmedimensioisilla vastikkeilla.

Puutteena voi mainita lämpökentän elementteittäisessä käsittelyssä syntyvän virheen (ks. kuva 1), joka on käytännössä osoittautunut vaikuttavan tuloksiin ≤ 10 %.

Lopuksi haluan kiittää hyödyllisistä keskusteluista VTT:n Ydinvoimatekniikan laboratorion tekn.lis. Kari Ikosta, dipl.insinööriä Heikki Raikoa sekä Timo Mikkolaa lämpökuormitusten käsittelyssä olleiden vaikeuksien yhteydessä. Samoin kiitän CEEB:n Dr. T.K. Helleniä saamistani arvokkaista lähdemateriaaleista. IVO:n Koneosaston Alpo Neuvoselle osoitan kiitokseni artikkelissa esitetyn kolmedimensioisen analyysin suorittamisesta.

KIRJALLISUUTTA

- [1] Rice, J.R., A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks, Journal of Applied Mechanics, Transaction of the ASME (1968) s. 379-385.
- [2] Hellen, T.K., On the method of virtual crack extensions, Int. J. num. Meth. Engng., 9 (1975), s. 187-207.
- [3] Hellen, T.K., Cesari, F. and Maitan, A., The application of fracture mechanics in thermally stressed structures, Central Electricity Generating Board, Report RD/B/5039N81 (1981), 40 sivua.
- [4] Parks, D.M., A stiffness derivative finite element technique for determination of elastic crack tip stress intensity factors, Int. J. Fract. 10, 4 (1974), s. 487-502.
- [5] Orivuori, S., Elementtimenetelmään perustuvan ohjelmajärjestelmän IVOFEM esittely, Rakenteiden Mekaniikka 8 (1975) 3-4, s. 198-210.

- [6] Orivuori, S., Description of IVOFEM program, Imatran Voima Oy, 1979, Sisäinen raportti, 49 sivua.
- [7] Barsoum, R.S., On the use of isoparametric finite elements in linear fracture mechanics, Int. J. num. Meth. Engng., 10 (1976), s. 25-37.
- [8] Ikonen, K., J-integraali murtumismekaniikassa, Rakenteiden Mekaniikka 13 (1980) 4, s. 21-36.
- [9] Kärnä, T., Murtumismekaniikan perusteita, Rakenteiden Mekaniikka 10 (1977) 4, s. 43-55.
- [10] Prij, J., Two and three dimensional elasto-plastic finite element analyses of a compact tension test specimen, IAEA Specialists' Meeting on Reliability Engineering and Lifetime Assessment of Primary Components, 1-3 December 1980, Vienna, 33 sivua.

Seppo Orivuori, dipl.ins., Imatran Voima Oy