

SUORIEN INTEGROINTIMENETELMIEN VERTAILU STABIILIUS- JA TARKKUUSOMINAISUUKSIEN SUHTEEN

Harri Kaasinen

Rakenteiden Mekaniikka Vol. 14
No. 1 1981 s. 10...22

YHTEENVETO: Artikkelissa selostetaan eräiden rakenteiden dynamiikassa esiintyvien suorien integrointimenetelmien stabiilius- ja tarkkuusominaisuuksia. Tarkastellut menetelmät ovat keskeisdifferenssimenetelmä, Houboltin menetelmä, Wilson θ - menetelmä sekä Newmarkin menetelmä. Amplitudin vaimeneminen sekä värähdysajan piteneminen ovat parametreina vertailtaessa eri menetelmiä. Esimerkkeinä tarkastellaan erään toistaiseksi tuntemattoman menetelmän ($\alpha = 22$, $\beta = 8$, $\gamma = 3$ - menetelmä) sekä Houboltin menetelmän ($\alpha = 27$, $\beta = 9$, $\gamma = 3$) tarkkuutta.

JOHDANTO

Tyypillinen ajasta riippuva ilmiö kuten värähtely voidaan esittää n -vapausasteiselle systeemille muodossa

$$\tilde{M} \ddot{\tilde{U}} + \tilde{C} \dot{\tilde{U}} + \tilde{K} \tilde{U} = \tilde{R}, \quad (1)$$

missä \tilde{M} , \tilde{C} ja \tilde{K} ovat kokoa $n \times n$ olevat massa-, vaimennus- ja jäykkyysmatriisit sekä \tilde{U} ja \tilde{R} ovat siirtymä- ja kuormitusvektorit. Yhtälö (1) esittää lineaarista toisen kertaluvun differentiaaliyhtälöryhmää, joka voidaan periaatteessa ratkaista käyttämällä tavanomaisia analyttisiä menetelmiä. Kuitenkin nämä tavat tulevat käytännössä hyvin hankaliksi, jos n on suuri ja tavallisesti turvaudutaankin numeerisiin menetelmiin. Seuraavassa tarkastellaan ns. suoraa integrointimenetelmiä (engl. direct integration method), jolloin nimityksellä "suora" tarkoitetaan lähdeä /2/ seuraten yhtälöiden (1) askel askeleelta tapahtuvaa numeerista integrointia ilman, että yhtälöt (1) muunnetaan ennen integrointia toiseen muotoon. Vastakohtainen menettely on ns. superpositiomenetelmä (engl. mode superposition method), jossa yhtälöt (1) ensin muunnetaan sopivalla muuttujien vaihdolla muotoon, jossa kytkentä yhtälöiden väliltä puuttuu. Jatkossa käsitellään kyllä myös superpositiomenetelmää, koska suorien menetelmien stabiilius- ja tarkkuuskysymyksiä voidaan tarkastella sen avulla helpommin.

SUORIA INTEGROINTIMENETELMIÄ

Tavanomaisessa superpositiomenetelmässä yhtälö (1) saatetaan muotoon

$$\ddot{\underline{X}}(t) + \underline{A}\dot{\underline{X}}(t) + \underline{B}^2\underline{X}(t) = \underline{C}^T\underline{R}(t), \quad (2)$$

missä matriisin \underline{C}^T pystyvektorit ovat systeemin M-ortonormeerattuja ominaisvektoreita $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ (vapaaat värähdysmuodot) ja diagonaalimatriisin \underline{B}^2 diagonaalialkiot ovat ominaisarvojen neliöitä $\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2$. Matriisi \underline{A} on samoin diagonaalimatriisi, jonka diagonaalialkiot ovat $2\xi_1\omega_1, 2\xi_2\omega_2, \dots, 2\xi_n\omega_n$, jossa ξ_i on värähdysmuotoon i liittyvä vaimennussuhde. Muoto (2) on saatu aikaan muunnoksella

$$\underline{U}(t) = \underline{C} \underline{X}(t). \quad (3)$$

Yhtälö (2) sisältää n toisistaan riippumatonta yhtälöä, jotka voidaan ratkaista esimerkiksi käyttämällä Duhamelin integraalia tai numeerista integrointia. Koska värähdysajat $T_i, i = 1, \dots, n$ tunnetaan, voidaan jokaisen yhtälön askelintegroinnissa käytettävä aika-askel Δt valita sopivaksi halutun tarkkuuden saavuttamiseksi.

Yhtälö (1) voidaan ratkaista myös suoralla integroinnilla, jolloin käytetään siis samaa aika-askelta jokaisessa yhtälössä. Jos toisaalta kaikki toisistaan riippumattomat yhtälö (2) integroidaan käyttämällä samaa aika-askelta, superpositiomenetelmä ja suora integrointi ovat ekvivalentit. Suora integrointi saadaan tarkaksi määrittämällä vain ne vasteet, joilla askelpituus Δt on murto-osa värähdysajasta. Muita vasteita ei määritetä tarkasti, mutta virhe on pieni, jos amplitudit ovat pieniä. Integroinnin stabiilisuus vaaditaan kaikilta värähdysmuodoilta, eli ratkaisu ei saa kasvaa rajatta niilläkään värähdysmuodoilla, joilla $\Delta t/T$ on suuri $1/2, 1/3, 1/4, 1/6$.

Koska yhtälön (1) suora integrointi vastaa yhtälön (2) integrointia aika-askelta Δt käyttäen, riittää menetelmän tarkkuuden ja stabiilisuuden tutkimiseksi, että tarkastelemme vain yhtä riviä

$$\ddot{x} + 2\xi\omega\dot{x} + \omega^2x = r \quad (4)$$

yhtälössä (2).

Yhtälö (4) esittää yhden vapausasteen systeemin liikettä, T on värähdysaika, ξ on vaimennussuhde ja r vaikuttava kuormitus. Askelenetelmissä käytetään approksimaatio-operaattoria sekä kuormitusoperaattoria, joilla saadaan yhteys tuntemattomien muuttujien hetkellä $t+\Delta t$ sekä aikaisemmin määritettyjen tulosten välille.

Keskeisdifferenssimenetelmä

Menetelmässä liikeyhtälöä (4) tarkastellaan hetkellä t , eli

$$\ddot{x}_t + 2\xi\omega\dot{x}_t + \omega^2x_t = r_t. \quad (5)$$

Kiihtyvyyttä ja nopeutta hetkellä t approksimoidaan keskeisdifferenssikaavoilla

$$\ddot{x}_t = 1/\Delta t^2 (x_{t-\Delta t} - 2x_t + x_{t+\Delta t}), \quad (6)$$

$$\dot{x}_t = 1/2\Delta t (-x_{t-\Delta t} + x_{t+\Delta t}). \quad (7)$$

Sijoittamalla lausekkeet (6) ja (7) yhtälöön (5) saadaan riippuvuus

$$\begin{Bmatrix} x_{t+\Delta t} \\ x_t \end{Bmatrix} = \underline{A} \begin{Bmatrix} x_t \\ x_{t-\Delta t} \end{Bmatrix} + \underline{L} r_t, \quad (8)$$

jossa

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} \frac{2-\omega^2\Delta t^2}{1+\xi\omega\Delta t} & -\frac{1-\xi\omega\Delta t}{1+\xi\omega\Delta t} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{L} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta t^2}{1+\xi\omega\Delta t} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Yhtälössä (8) \underline{A} on approksimaatio-operaattori ja \underline{L} on kuormitusoperaattori. Yhtälöä (8) voidaan käyttää hyväksi tarkasteltaessa integrointimenetelmän stabiiliutta ja tarkkuutta, ratkaisu hetkellä $t+n\Delta t$ on nimittäin /1/, /2/, /3/, /6/, /7/, /8/

$$\begin{Bmatrix} x_{t+\Delta t} \\ x_t \end{Bmatrix} = \underline{A}^n \begin{Bmatrix} x_t \\ x_{t-\Delta t} \end{Bmatrix} + \underline{A}^{n-1} \underline{L} r_{t+\Delta t} + \dots + \underline{L} r_{t+(n-1)\Delta t}. \quad (10)$$

Keskeisdifferenssimenetelmä on ns. eksplisiittinen integrointimenetelmä, koska $x_{t+\Delta t}$:n ratkaisu perustuu liikeyhtälön käyttöön hetkellä t . Houboltin, Newmarkin sekä Wilson θ -menetelmät käyttävät liikeyhtälöä hetkellä $t+\Delta t$, josta syystä menetelmiä nimitetään implisiittisiksi. Keskeisdifferenssimenetelmässä aika-askel Δt on valittava pienemmäksi kuin $\Delta t_{cr} = T_n/\pi$, missä T_n on systeemin pienin ominaisvärähdysaika. Menetelmä on siten ns. ehdollisesti stabiili. /1/, /2/, /3/, /4/, /6/, /7/, /8/, /10/.

Wilson θ -menetelmä

Oletetaan, että kiihtyvyys \ddot{x}_t , nopeus \dot{x}_t ja siirtymä x_t hetkellä t ovat tunnettuja. Em. suureiden ratkaisemiseksi hetkellä $t+\Delta t$ Wilson θ -menetelmässä otaksutaan kiihtyvyyden muuttuvan lineaarisesti välillä $t, t+\theta\Delta t$ ($\theta \geq 1$). Parametri θ valitaan parhaan tarkkuuden ja stabiiliuden saavuttamiseksi. Kun $\theta = 1$ saadaan lineaarinen kiihtyvyyden menetelmä, joka on ehdollisesti stabiili. Arvoilla $\theta > 1,37$ menetelmä on ehdoitatta stabiili.

Merkitsemällä τ :lla ajan lisäystä ($0 \leq \tau \leq \theta\Delta t$), aikavälillä $t, t+\theta\Delta t$ otaksutaan

$$\ddot{x}_{t+\tau} = \ddot{x}_t + (\ddot{x}_{t+\Delta t} - \ddot{x}_t) \frac{\tau}{\Delta t}, \quad (11)$$

josta saadaan integroimalla

$$\dot{x}_{t+\tau} = \dot{x}_t + \ddot{x}_t \tau + (\dot{x}_{t+\Delta t} - \dot{x}_t) \frac{\tau^2}{2\Delta t}, \quad (12)$$

$$x_{t+\tau} = x_t + \dot{x}_t \tau + 1/2 \ddot{x}_t \tau^2 + (\dot{x}_{t+\Delta t} - \dot{x}_t) \frac{\tau^3}{6\Delta t}. \quad (13)$$

Hetkellä $t+\Delta t$ saadaan

$$\dot{x}_{t+\Delta t} = \dot{x}_t + (\dot{x}_{t+\Delta t} + \dot{x}_t) \frac{\Delta t}{2}, \quad (14)$$

$$x_{t+\Delta t} = x_t + \dot{x}_t \Delta t + (2\ddot{x}_t + \ddot{x}_{t+\Delta t}) \frac{\Delta t^2}{6}. \quad (15)$$

Wilson θ -menetelmässä liikeyhtälöä (4) tarkastellaan hetkellä $t+\theta\Delta t$ eli

$$\ddot{x}_{t+\theta\Delta t} + 2\xi\omega\dot{x}_{t+\theta\Delta t} + \omega^2 x_{t+\theta\Delta t} = r_{t+\theta\Delta t}. \quad (16)$$

Käyttämällä yhtälöitä (11)...(13) hetkellä $\tau = \theta\Delta t$ ja sijoittamalla ne yhtälöön (16) saadaan yhtälö, missä ainoana tuntemattomana on $\dot{x}_{t+\Delta t}$. Ratkaisemalla $\ddot{x}_{t+\Delta t}$ ja sijoittamalla se yhtälöihin (14) ja (15) saadaan

$$\begin{Bmatrix} \ddot{x}_{t+\Delta t} \\ \dot{x}_{t+\Delta t} \\ x_{t+\Delta t} \end{Bmatrix} = \mathbb{A} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_t \\ \dot{x}_t \\ x_t \end{Bmatrix} + \mathbb{L} r_{t+\theta\Delta t}, \quad (17)$$

jossa

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\beta\theta^2}{3} - \frac{1}{\theta} - \gamma\theta & \frac{1}{\Delta t}(-\beta\theta - 2\gamma) & \frac{1}{\Delta t^2}(-\beta) \\ \Delta t(1 - \frac{1}{2\theta} - \frac{\beta\theta^2}{6} - \frac{\gamma\theta}{2}) & 1 - \frac{\beta\theta}{2} - \gamma & \frac{1}{\Delta t}(-\frac{\beta}{2}) \\ \Delta t^2(\frac{1}{2} - \frac{1}{6\theta} - \frac{\beta\theta^2}{18} - \frac{\gamma\theta}{6}) & \Delta t(1 - \frac{\beta\theta}{6} - \frac{\gamma}{3}) & 1 - \frac{\beta}{6} \end{bmatrix}, \quad (18)$$

$$\mathbb{L} = \begin{Bmatrix} \frac{\beta}{\omega^2 \Delta t^2} \\ \frac{\beta}{2\omega^2 \Delta t} \\ \frac{\beta}{6\omega^2} \end{Bmatrix}, \quad \beta = \left(\frac{\theta}{\omega^2 \Delta t^2} + \frac{\xi\theta^2}{\omega \Delta t} + \frac{\theta^3}{6} \right)^{-1}, \quad \gamma = \frac{\xi\beta}{\omega \Delta t}. \quad (19)$$

Newmarkin menetelmä

Menetelmässä otaksutaan, että

$$\dot{x}_{t+\Delta t} = \dot{x}_t + [(1-\delta)\ddot{x}_t + \delta\ddot{x}_{t+\Delta t}]\Delta t \quad (20)$$

ja

$$x_{t+\Delta t} = x_t + \dot{x}_t \Delta t + [(1/2-\alpha)\ddot{x}_t + \alpha\ddot{x}_{t+\Delta t}]\Delta t^2. \quad (21)$$

Parametrit δ ja α valitaan stabiiliuden ja tarkkuuden saavuttamiseksi.

Kun $\delta = 1/2$ ja $\alpha = 1/6$ saadaan ns. lineaarinen kiihtyvyyden menetelmä; sama kuin Wilson θ -menetelmä, kun $\delta = 1$. Ehdotta stabiilissa ns. Newmarkin menetelmässä $\delta = 1/2$ ja $\alpha = 1/4$.

Approksimaatio- ja kuormitusoperaattoreiksi saadaan yhtälöitä (16), (20) ja (21) käyttämällä, kun $\theta = 1,0$

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} -(\frac{1}{2} - \alpha)\beta - 2(1-\delta)\gamma & \frac{1}{\Delta t}(-\beta - 2\gamma) & \frac{1}{\Delta t^2}(-\beta) \\ \Delta t(1-\delta - (1/2-\alpha)\delta\beta - 2(1-\delta)\delta\gamma & (1-\beta\delta - 2\delta\gamma) & \frac{1}{\Delta t}(-\beta\delta) \\ \Delta t^2[1/2-\alpha - (1/2-\alpha)\alpha\beta - 2(1-\delta)\alpha\gamma & \Delta t(1-\alpha\beta - 2\alpha\gamma) & (1-\alpha\beta) \end{bmatrix}, \quad (22)$$

$$\mathbb{L} = \begin{bmatrix} \frac{\beta}{\omega^2 \Delta t^2} \\ \frac{\beta\delta}{\omega^2 \Delta t} \\ \frac{\alpha\beta}{\omega^2} \end{bmatrix}, \quad \beta = \left(\frac{1}{\omega^2 \Delta t^2} + \frac{2\xi\delta}{\omega\Delta t} + \alpha \right)^{-1}, \quad \gamma = \frac{\xi\beta}{\omega\Delta t}. \quad (23)$$

Havaitaan, että käyttämällä parametreille arvoja $\delta = 1/2$, $\alpha = 1/6$ ja $\theta = 1,0$ Newmarkin ja Wilson θ -menetelmissä, saadaan samat approksimaatio- ja kuormitusoperaattorit. Tämä oli odotettua, koska molemmissa menetelmissä otaksutaan kiihtyvyyden muuttuvan lineaarisesti aikavälillä t , $t+\Delta t$. /1/, /2/, /3/, /6/, /7/, /8/.

Houboltin menetelmä

Houboltin menetelmässä liikeyhtälöä (4) tarkastellaan hetkellä $t+\Delta t$. Kiihtyvyys ja nopeus hetkellä $t+\Delta t$ määritetään differenssikaavoilla

$$\ddot{x}_{t+\Delta t} = \frac{1}{\Delta t^2} (2x_{t+\Delta t} - 5x_t + 4x_{t-\Delta t} - x_{t-2\Delta t}), \quad (24)$$

$$\dot{x}_{t+\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} (11x_{t+\Delta t} - 18x_t + 9x_{t-\Delta t} - 2x_{t-2\Delta t}). \quad (25)$$

Sijoittamalla lausekkeet (24) ja (25) yhtälöön (16) kun $\theta = 1,0$ saadaan

$$\begin{Bmatrix} x_{t+\Delta t} \\ x_t \\ x_{t-\Delta t} \end{Bmatrix} = \mathbb{A} \begin{Bmatrix} x_t \\ x_{t-\Delta t} \\ x_{t-2\Delta t} \end{Bmatrix} + \mathbb{L}r_{t+\Delta t}, \quad (26)$$

jossa

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} \frac{5\beta}{\omega^2 \Delta t^2} + 6\gamma & -\left(\frac{4\beta}{\omega^2 \Delta t^2} + 3\gamma\right) & \left(\frac{\beta}{\omega^2 \Delta t^2} + \frac{2\gamma}{3}\right) \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$\tilde{L} = \begin{bmatrix} \frac{\beta}{2} \\ \omega \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \beta = \left(\frac{2}{\omega^2 \Delta t^2} + \frac{11\xi}{3\omega \Delta t} + 1 \right)^{-1},$$

$$\gamma = \frac{\xi \beta}{\omega \Delta t}.$$

STABIILIUS

Integrointimenetelmää nimitetään ehdoitta stabiiliksi, jos homogeenisen yhtälön ratkaisu ei kasva rajatta olipa alkuarvo tai aika-askel mikä tahansa. Stabiilius tarkoittaa myös sitä, että tietokoneen aiheuttamat pyöristysvirheet siirtymissä, nopeuksissa sekä kiihtyvyyksissä eivät kasva integroinnissa. Menetelmää nimitetään ehdollisesti stabiiliksi, jos em. pätee vain kun $\Delta t/T$ on tiettyä arvoa pienempi.

Integroimismenetelmän stabiiliuden tutkimiseksi kirjoitetaan /2/ $\underline{A}^n = \underline{P}^{-1} \underline{J} \underline{P}$, jolloin yhtälössä (8)

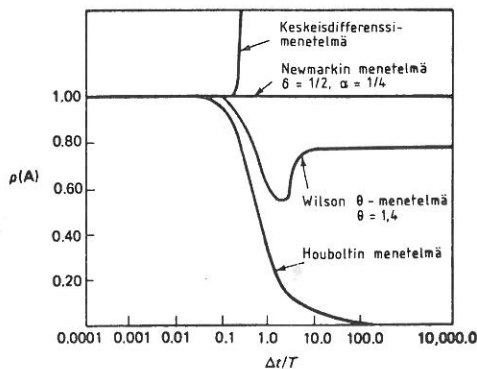
$$\underline{A}^n = \underline{P}^{-1} \underline{J}^n \underline{P}, \quad (28)$$

missä \underline{P} on matriisin \underline{A} ominaisvektoreista koostuva matriisi ja \underline{J} on matriisin \underline{A} ns. Jordan muoto. \underline{J} :n diagonaalialkiot muodostuvat \underline{A} :n ominaisarvoista λ_i . Merkitään $\rho(\underline{A}) =$ matriisin \underline{A} spektraalisäde, joka määritellään kaavalla

$$\rho(\underline{A}) = \max |\lambda_i|, \quad i = 1, 2, \dots \quad (29)$$

\underline{J}^n on rajoitettu, kun $n \rightarrow \infty$, jos ja vain jos $\rho(\underline{A}) \leq 1$. Edelleen $\underline{J}^n \rightarrow \underline{0}$ jos $\rho(\underline{A}) < 1$ sitä nopeammin, mitä pienempi $\rho(\underline{A})$ on.

Tarkasteltaessa keskeisdifferenssimenetelmän stabiiliutta havaitaan, että $\rho(\underline{A}) \leq 1$ silloin kun $\Delta t/T < 1/\pi$. Keskeisdifferenssimenetelmä on siten stabiili edellyttäen, että $\Delta t \leq \Delta t_{cr}$ ($\Delta t_{cr} = T/\pi$) ($\xi = 0$) eli menetelmä on ehdollisesti stabiili (kuva 1).

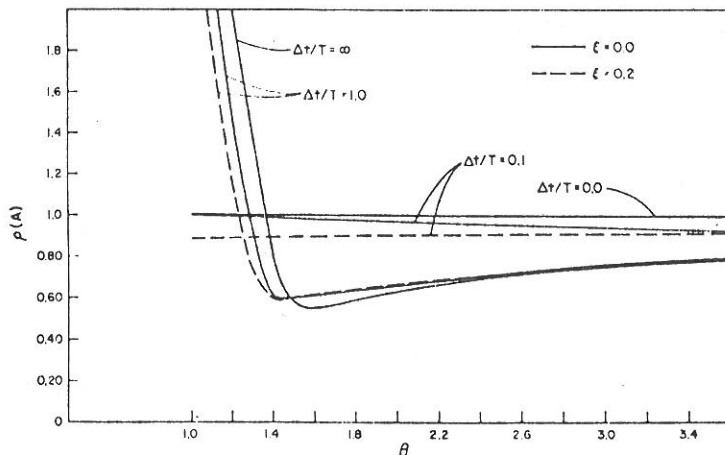


Kuva 1. /2/ Approksimaatio-operaattoreiden spektraalisäteet $\Delta t/T$:n funktiona eri menetelmissä ($\xi = 0$).

Newmarkin menetelmässä voidaan parametreja α ja δ muuntaa optimitarkkuuden ja stabiiliuden saavuttamiseksi. Integrointimenetelmä on ehdoitta stabiili ($\xi = 0$), jos $\delta \geq 0,5$ ja $\alpha \geq 0,25$ ($\delta + 0,5$)². /1/.

Kuvasta 1 nähdään myös, että Houboltin menetelmä ($\xi = 0$) on ehdoitta stabiili.

Wilsonin operaattorin spektraalisäde $\rho(\underline{A})$ θ :n, $\Delta t/T$:n ja ξ :n funktiona nähdään kuvasta 2. Havaitaan, että käyrät $\Delta t/T = \infty$ ja $\Delta t/T = 0$ ovat riippumattomia ξ :stä ja että menetelmä on ehdoitta stabiili eli $\rho(\underline{A}) \leq 1$ olipa $\Delta t/T$ mi-



Kuva 2. /6/ Spektraalisäde $\rho(A)$ θ :n funktiona Wilson θ -menetelmässä.

kä tahansa, jos vain $\theta \geq 1,37$. Kun $\theta \leq 1,37$, menetelmä on ehdollisesti stabiili. Stabiiliusraja riippuu tällöin systeemin fysikaalisesta vaimenuksesta. /1/, /2/, /3/, /6/, /7/, /8/, /9/, /10/.

TARKKUUS

Numeerisen integroinnin tarkkuus riippuu yleensä kuormituksesta, systeemin fysikaalisista parametreista ja aika-askeleen suuruudesta. Integrointimenetelmien tarkkuuden tutkimiseksi tarkastellaan problemaa /2/

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (30)$$

ottaen alkuehdot $x_0 = 1,0$, $\dot{x}_0 = 0,0$, $\ddot{x}_0 = -\omega^2$. Tarkka ratkaisu on tällöin $x = \cos \omega t$. Wilsonin ja Newmarkin menetelmissä yhtälöä (19) voidaan soveltaa suoraan näillä alkuehdoilla. Houboltin menetelmässä on käytetty apuna tarkkoja siirtymän arvoja $x_{\Delta t}$ ja $x_{2\Delta t}$.

Numeerisen integroinnin virhe on ilmaistu värähdysajan pitenemisen ja amplitudin vaimenemisen avulla. Kuvissa 5 ja 6 nähdään prosentuaalinen värähdysajan piteneminen ja amplitudin vaimeneminen eri integrointimenetelmissä $\Delta t/T$:n funktiona. Yleensä integrointi on hyvin tarkka kun $\Delta t/T$ on pienempi kuin 0,01. Kun $\Delta t/T$ kasvaa, suurenevät myös virheet. Newmarkin menetelmässä esiintyy vain värähdysajan pitenemistä, kun $\delta = 1/2$ ja $\alpha = 1/4$. Havaitaan myös, että Wilsonin menetelmä on arvolla $\theta = 1,4$ tarkempi kuin arvolla $\theta = 2,0$. Amplitudin vaimenemisella ja approksimaatio-operaattorin spektraalisäteellä on suora yhteys. Kuvasta 1 nähdään, että Newmarkin menetelmässä $\rho(A) = 1$ olipa $\Delta t/T$ mikä tahansa, mutta muilla integrointimenetelmillä paitsi keskeisdifferenssimenetelmällä $\rho(A) < 1$, kun $\Delta t/T > 0,01$.

Käytettäessä keskeisdifferenssimenetelmää on aika-askel Δt valittava

pienemmäksi kuin kriittinen aika-askel Δt_{cr} . Tällöin Δt on yleensä niin pieni, että käytännöllisesti katsoen kaikki n yhtälöä (2) integroituvat tarkasti. Ehdotta stabiileissa menetelmissä Δt voi olla suuri, kun vain koko rakenteen vasteeseen merkittävästi vaikuttavat vastekomponentit määräytyvät tarkasti. Muita vastekomponentteja ei lasketa niin tarkasti, koska ne ovat merkityksettömiä.

Lähteessä /2/ on tarkastelu amplitudin vaimenemista integroitaessa niitä värähdysmuotoja, joilla $\Delta t/T$ on suuri. Kokeessa käytettiin samaa aika-askelta Δt integroitaessa alimpien ja korkeimpien värähdysmuotojen vasteita. Havaittiin, että numeerisen integroinnin virheiden aiheuttama amplitudin vaimeneminen tehokkaasti "suodattaa" korkeitten värähdysmuotojen osuuden pois. Ilmiö havaittiin kaikilla integrointimenetelmillä lukuunottamatta Newmarkin menetelmää kun $\delta = 1/2$ ja $\alpha = 1/4$. Tällöin ei nimittäin tapahdu amplitudin vaimennusta, virheitä esiintyy vain värähdysajoissa. Suodatus osoittautuu hyödylliseksi. Niiden värähdysmuotojen vasteita, joilla $\Delta t/T$ on suuri, ei voida integroida tarkasti. Suodatuksen ansiosta saadaan kuitenkin kokonaisratkaisu, missä alhaisimpien värähdysmuotojen vasteet määräytyvät tarkasti vaikka Δt on suuri. /1/, /2/, /3/, /6/, /7/, /8/.

YLEISET PALAUTUSKAAVAT TOISEN KERTALUVUN LIIKEYHTÄLÖILLE

Lähteissä /1/ ja /10/ esitetään kolmen ja neljän pisteen palautuskaavat toisen asteen liikeyhtälöille. Kolmen pisteen palautuskaava saadaan soveltamalla painotettujen jäännösten menetelmää yhtälöön (1). Saadaan

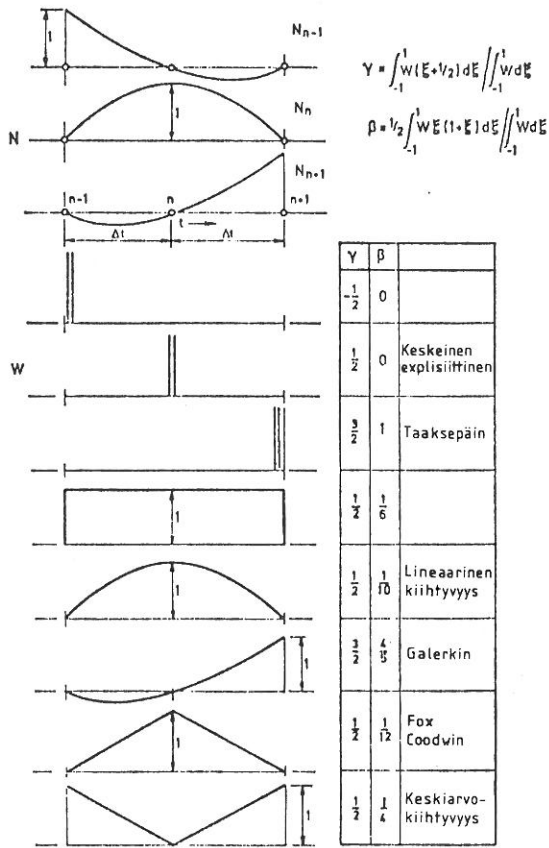
$$\begin{aligned} & [M + \gamma \Delta t C + \beta \Delta t^2 K] U_{n+1} + [-2M + (1-2\gamma)\Delta t C + (1/2 + \gamma - 2\beta)\Delta t^2 K] U_n \\ & + [M + (-1+\gamma)\Delta t C + (1/2 - \gamma + \beta)\Delta t^2 K] U_{n-1} = (\beta \Delta t^2) R_{n+1} \\ & + (1/2 + \gamma - 2\beta) R_n \Delta t^2 + (1/2 - \gamma + \beta) R_{n-1} \Delta t^2, \end{aligned} \quad (31)$$

missä $U = \sum N_i u_i$, $i = n-1, n, n+1$ (kuva 3). N_i :t ovat toisen asteen muotofunktioita

$$\begin{aligned} N_{n+1} &= \xi(1+\xi)/2, \\ N_n &= (1-\xi)(1+\xi), \\ N_{n-1} &= -\xi(1-\xi)/2, \end{aligned} \quad (32)$$

missä $\xi = t/\Delta t$, $-1 \leq \xi \leq 1$. Tämä Newmarkin yhtälön yleinen muoto on monipuolisin yhtälö käytettäessä kolmea perättäistä aikapistettä. Kuvassa 3 nähdään tunnettujen menetelmien painofunktiot sekä vastaavat γ - ja β -arvot, jotka eivät siis ole samat kuin approksimaatio-operaattorissa ja kuormitus-operaattorissa esiintyvät γ ja β . Newmarkin menetelmän $\gamma = 1/2$ viittaa symmetriseen painofunktioon.

Stabiiliutta on tarkasteltu otaksumalla yhtälön (4) ratkaisun olevan muo-



Kuva 3. /10/ Kolmen pisteen palautuskaavan paino- ja muoto-funktiot.

toa ($r = 0$) /1/

$$(\underline{u}_i)_{n+1} = \lambda (\underline{u}_i)_n,$$

$$(\underline{u}_i)_n = \lambda (\underline{u}_i)_{n-1}$$

sekä vaatimalla λ :n absoluuttiarvolta ehto (vrt. approksimaatio-operaattorin spektraalisäde)

$$|\lambda| \leq 1.$$

Stabiiliusehdoksi saadaan (kun vaimennussuhde $\xi = 0$)

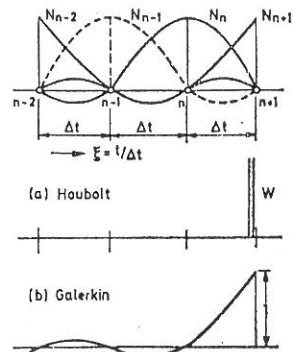
$$\beta \geq 1/4(1/2 + \gamma)^2,$$

$$\gamma \geq 1/2,$$

$$1/2 + \gamma + \beta \geq 0.$$

Tällöin menetelmä on ehdoitta stabiili.

Käyttämällä useampia aikapisteitä päästään korkeampiasteisiin menetelmiin.



α	β	γ
27	9	3
$\frac{702}{35}$	$\frac{36}{5}$	$\frac{13}{5}$

$$\alpha = \int_0^3 W \xi^3 d\xi / \int_0^3 W d\xi$$

$$\beta = \int_0^3 W \xi^2 d\xi / \int_0^3 W d\xi$$

$$\gamma = \int_0^3 W \xi d\xi / \int_0^3 W d\xi$$

Kuva 4. /10/ Neljän pisteen palautuskaavan paino- ja muoto-funktiot.

Neljän pisteen palautuskaavassa muotofunktiot ovat kolmatta astetta

$$\begin{aligned}
 N_{n+1} &= \xi(\xi-1)(\xi-2)/6 \\
 N_n &= -\xi(\xi-1)(\xi-3)/2 \\
 N_{n-1} &= \xi(\xi-2)(\xi-3)/2 \\
 N_{n-2} &= -\xi(\xi-1)(\xi-2)(-3)/5
 \end{aligned}
 \tag{36}$$

missä $\xi = t/\Delta t$, $0 \leq \xi \leq 3$ (kuva 4).

Yleiseksi neljän pisteen kaavaksi saadaan /1/

$$\begin{aligned}
 & [M(\gamma-1) + (\frac{1}{2}\beta - \gamma + \frac{1}{3})C \Delta t + (\frac{1}{6}\alpha - \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{3}\gamma)K \Delta t^2]U_{n+1} \\
 & + [(-3\gamma+4)M + (-\frac{3}{2}\beta + 4\gamma - \frac{3}{2})C \Delta t + (-\frac{1}{2}\alpha + 2\beta - \frac{3}{2}\gamma)K \Delta t^2]U_n \\
 & + [(3\gamma-5)M + (\frac{3}{2}\beta - 5\gamma + 3)C \Delta t + (\frac{1}{2}\alpha - \frac{5}{2}\beta + 3\gamma)K \Delta t^2]U_{n-1} \\
 & + [(-\gamma+2)M + (-\frac{1}{2}\beta + 2\gamma - \frac{11}{6})C \Delta t + (-\frac{1}{6}\alpha + \beta - \frac{11}{6}\gamma + 1)K \Delta t^2]U_{n-2} = \\
 & + [\frac{1}{6}\alpha - \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{3}\gamma]R_{n+1}\Delta t^2 + [-\frac{1}{2}\alpha + 2\beta - \frac{3}{2}\gamma]R_n\Delta t^2 \\
 & + [\frac{1}{2}\alpha - \frac{5}{2}\beta + 3\gamma]R_{n-1}\Delta t^2 + [-\frac{1}{6}\alpha + \beta - \frac{11}{6}\gamma + 1]R_{n-2}\Delta t^2
 \end{aligned}
 \tag{37}$$

missä $U = \sum N_i u_i$, $i = n-2, n-1, n, n+1$ (kuva 4). Houboltin menetelmässä $\alpha = 27$, $\beta = 9$ ja $\gamma = 3$.

Parametrit α , β ja γ Wilson θ -menetelmään saadaan kaavoista

$$\begin{aligned}
 \alpha &= 2 + 4\theta + 3\theta^2 + \theta^3, \\
 \beta &= 4/3 + 2\theta + \theta^2, \\
 \gamma &= 1 + \theta.
 \end{aligned}
 \tag{38}$$

Stabiiliusehdoksi neljän pisteen palautuskaavassa saadaan ($\xi = 0$) nyt

$$\begin{aligned}
 3/2 < \gamma \leq \beta/3 + 1/2, \\
 3/4 + 9\beta/2 - 5\gamma < \alpha \leq -9\gamma^2 + 3\beta\gamma + 13\gamma - 6.
 \end{aligned}
 \tag{39}$$

ESIMERKKI

Tutkitaan värähdysajan pitenemistä ja amplitudin vaimenemista Houboltin menetelmässä sekä menetelmässä, missä $\alpha = 22$, $\beta = 8$ ja $\gamma = 3$ neljän pisteen palautuskaavassa. $\alpha = 22$, $\beta = 8$, $\gamma = 3$ -menetelmän amplitudin vaimeneminen on lähteen /1/ mukaan melko vähäistä.

Tarkastellaan jälleen probleemaa /2/

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

alkuehdoin $x_0 = 1,0$, $\dot{x}_0 = 0,0$ ja $\ddot{x}_0 = -\omega^2$; tarkka ratkaisuhan on $x = \cos \omega t$.

Muodostetaan menetelmiä vastaavat approksimaatio-operaattorit. Houboltin menetelmän approksimaatio-operaattori saadaan suoraan lausekkeesta (27). $\alpha = 22$, $\beta = 8$, $\gamma = 3$ -menetelmää vastaavaksi approksimaatio-operaattoriksi saadaan

$$A = \begin{bmatrix} \beta \left(\frac{5}{\omega^2 \Delta t^2} - \frac{1}{2} \right) + 3\gamma & \frac{-4\beta}{\omega^2 \Delta t^2} & \beta \left(\frac{1}{\omega^2 \Delta t^2} + \frac{1}{6} \right) - \frac{1}{3} \gamma \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (40)$$

missä

$$\beta = \left(\frac{2}{\omega^2 \Delta t^2} + \frac{8\xi}{3\omega \Delta t} + \frac{2}{3} \right)^{-1}, \quad \gamma = \frac{\xi \beta}{\omega \Delta t}. \quad (41)$$

Nopeuden lausekkeeksi $\alpha = 22$, $\beta = 8$, $\gamma = 3$ -menetelmässä saadaan yhtälöstä (37)

$$\dot{x}_t = \frac{1}{6\Delta t} (8x_t - 9x_{t-\Delta t} + x_{t-3\Delta t}). \quad (42)$$

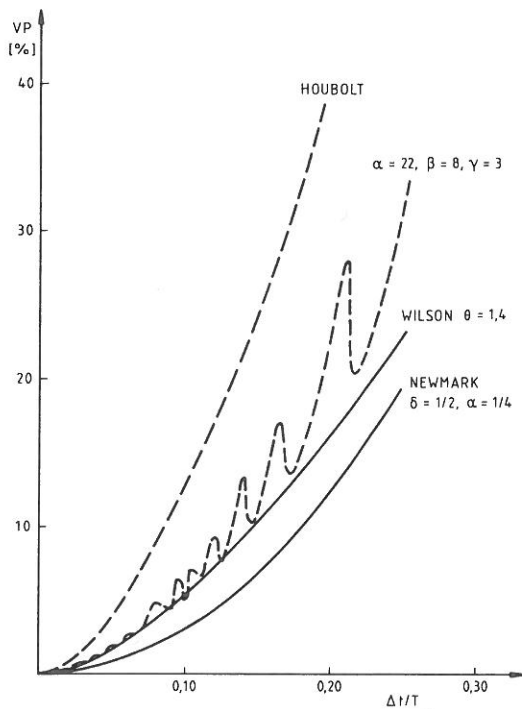
Houboltin menetelmän nopeuden lauseke saadaan yhtälöstä (25). Värähdysajan pitenemistä ja amplitudin vaimenemistä tutkittiin 0,005:n välein arvoilla $\Delta t/T = 0 \dots 0,25$. Kriittisissä kohdissa eli silloin kun approksimaatio alkoi saavuttaa maksimipoikkeamaa, askeljakoa tihennettiin jakamalla Δt :n suurin aika-askel kymmeneen osaan ja määrittämällä poikkeamat kyseisissä pisteissä. Apuna askeljaon tihennyksessä käytettiin muotofunktiota

$$\begin{aligned} N_1 &= 1/4(\xi^3 - 3\xi + 2), \\ N_2 &= 1/4(\xi^3 - \xi^2 - \xi + 1), \\ N_3 &= 1/4(-\xi^3 + 3\xi + 2), \\ N_4 &= 1/4(\xi^3 + \xi^2 - \xi - 1). \end{aligned} \quad (43)$$

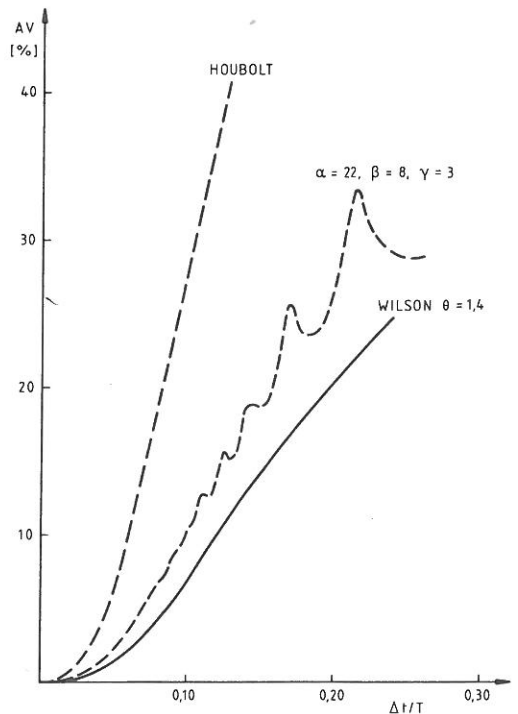
Δt :n suuruisella välillä ξ muuttui nyt -1:sta +1:een. Siirtymäksi hetkellä ξ saatiin nyt päätepisteiden siirtymien ja nopeuksien sekä muotofunktioiden (43) avulla

$$x_\xi = [N_1, N_2, N_3, N_4] \left\{ \begin{array}{l} x_t \\ \frac{\Delta t}{2} \dot{x}_t \\ x_{t+\Delta t} \\ \frac{\Delta t}{2} \dot{x}_{t+\Delta t} \end{array} \right\} \quad (44)$$

Tulokset ilmenevät kuvista 5 ja 6. Katkoviivoin piirretyt käyrät osoittavat koetulokset tutkituilla Houboltin ja $\alpha = 22$, $\beta = 8$, $\gamma = 3$ -menetelmillä, ja yhtenäisin viivoin piirretyt käyrät on saatu lähteistä /2/ ja /6/.



Kuva 5. Prosentuaalinen värähdysajan piteneminen eri integrointimenetelmillä $\Delta t/T$:n funktiona.



Kuva 6. Prosentuaalinen amplitudin vaimeneminen eri integrointimenetelmillä $\Delta t/T$:n funktiona.

Kuvasta 5 havaitaan, että prosentuaalinen värähdysajan piteneminen ei kasvaakaan $\alpha = 22, \beta = 8, \gamma = 3$ -menetelmällä tasaisesti $\Delta t/T$ -suhteen kasvaessa, kuten lähteissä /1/, /2/, /3/ ja /6/ esitetyillä muilla integrointimenetelmillä. Kyseissä menetelmässä alkoi värähdysajan pidennyskäyrä $\Delta t/T$:n kasvaessa heilahdella tavalla, jolle ei löytyne yksiselitteistä sääntöä. $\alpha = 22, \beta = 8, \gamma = 3$ -menetelmä on kuvien 5 ja 6 mukaan oskilloinnista huolimatta tarkkuudeltaan Houboltin menetelmän ja Wilson θ -menetelmän välissä, kun $\theta = 1,4$. Houboltin menetelmässä sitä vastoin värähdysajan piteneminen kasvoi jatkuvasti $\Delta t/T$:n kasvaessa.

Amplitudin vaimenemisessa havaittiin $\alpha = 22, \beta = 8, \gamma = 3$ -menetelmässä vastaavanlaista heilahtelua kuin värähdysajan pitenemiskäyrässä, joskin lievempänä. Sekä värähdysajan pitenemis-käyrässä että amplitudin vaimenemiskäyrässä heilahtelu lisäksi kasvaa $\Delta t/T$:n kasvaessa.

Houboltin menetelmässä havaittiin hyvin voimakkaasti kasvava vaimennyskäyrä. Tämä oli odotettavissa, koska Houboltin menetelmässä approksimaatio-operaattorin spektraalisäde kuvassa 1 pienenee kaikkein voimakkaammin $\Delta t/T$:n kasvaessa.

KIRJALLISUUS

- [1] Zienkiewicz, O.C., The finite element method, 3., expanded and revised edition of The finite element method in engineering science. London & New York 1977. 787 s.
- [2] Bathe, K.J. & Wilson, E.L., Numerical methods in finite element analysis. Englewood Cliffs, N.J. 1976. 528 s.
- [3] Clough, R.W., & Penzien, J., Dynamics of structures. Mc Graw-Hill, New York, N.Y. 1975. 634 s.
- [4] Biggs, J.M., Introduction to structural dynamics. Mc Graw-Hill, New York, N.Y. 1964.
- [5] Ahola, E., Lujuusoppi, Elementtimenetelmä, TKY 342. Otakustantamo, Otaniemi 1975. 201 s.
- [6] Bathe, K.J. & Wilson, E.L., Stability and accuracy analysis of direct integration methods. Earthquake Engineering and Structural Dynamics 1 (1973), s. 283-291.
- [7] Nickell, R.G., On the Stability of approximation operators in problems of structural dynamics. International Journal of Solids and Structures 7 (1971), s. 301-319.
- [8] Nickell, R.E., Direct integration methods in structural dynamics. Journal of the Engineering Mechanics Division 99 (1973) EM 2 s. 303-317.
- [9] Wood, W.L., On the Zienkiewicz four time-level scheme for the numerical integration of vibration problems. International Journal for Numerical Methods in Engineering 11 (1977) s. 1519-1528.
- [10] Zienkiewicz, O.C., A new look at the Newmark Houbolt and other time stepping formulas. A weighted residual approach. Earthquake Engineering and Structural Dynamics 5 (1977) s. 413-418.

Harri Kaasinen, Teknillinen korkeakoulu, Rakennusinsinööri-osasto